Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Алгебраические системы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 (определение алгебраической системы) 6

Пример 2 (определение изоморфизма и гомоморфизма) 8

Пример 3 (определение изоморфизма) 20

Пример 4 (определение гомоморфизма) 33

Пример 5 (определение конгруенции) 38

Пример 6 (определение конгруенции) 49

Пример 7 (определение фактор-системы) 63

Пример 8 (фактор-система, построенная по гомоморфизму) 73

Пример 9 (фактор-группы группы Z_8) 90

Примеры универсальных алгебр 104

Задача I.1 105

Задача I.2 106

Формулы из определения гомоморфизма и конгруенции 106

Задача II.3 107

Задача II.4 108

Задача II.5 109

Задача II.6 110

Задача II.7 111

Проверка, что отношение является конгруенцией 111

Задача III.8 112

Задача III.9 113

Задача III.10 114

Нахождение фактор-системы 114

Задача IV.11 115

Задача IV.12 116

Задача IV.13 117

Задача IV.14 118

Нахождение всех фактор-систем алгебраической системы 118

Задача V.15 119

Задача V.16 120

Задача V.17 121

Ответы и решения 122

Пример 1. Например, если взять в качестве Ω множество целых чисел и положить $\mathcal{F} = \{+, \cdot\}$ — множество из операций «сложение» и «умножение» (на множестве целых чисел), $\mathrm{P} = \{\leq\}$ — отношение «меньше либо равно» (для целых чисел), то получим **алгебраическую систему**: $\mathbb{Z} = \langle Z, \{+, \cdot\}, \{\leq\}\rangle$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \{f_+, f_\bullet\}, \{p_\leq\}, \mu\rangle$, где μ задана таблицей

t	f_+	$f_\bullet$	$p_\leq$
$\mu(t)$	2	2	2

Пример 1. Например, если взять в качестве Ω множество целых чисел и положить $\mathcal{F} = \{+, \cdot\}$ — множество из операций «сложение» и «умножение» (на множестве целых чисел), $\mathrm{P} = \{\leq\}$ — отношение «меньше либо равно» (для целых чисел), то получим **алгебраическую систему**: $\mathbb{Z} = \langle Z, \{+, \cdot\}, \{\leq\}\rangle$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \{f_+, f_\bullet\}, \{p_\leq\}, \mu\rangle$, где μ задана таблицей

t	f_+	$f_\bullet$	$p_\leq$
$\mu(t)$	2	2	2

Тогда алгебраическая система $\mathbb{Z} = \langle Z, \{+, \cdot\}, \{\leq\}\rangle$ может быть представлена в виде $\left\langle Z, \nu^\Sigma\right\rangle$, где интерпретация ν^Σ определяется формулами:

$$\begin{cases} \nu\left(f_+\right)(x, y) = x + y \\ \nu\left(f_\bullet\right)(x, y) = x \cdot y \\ \nu\left(p_\leq\right)(x, y) = «x \leq y» \end{cases}$$

Вернуться к лекции?

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

, и универсальные алгебры $\left\langle \{10, 20, 40\}, \nu_1^{\Sigma} \right\rangle$, $\left\langle \left\{ \emptyset, \{\emptyset\} \right\}, \nu_2^{\Sigma} \right\rangle$, $\left\langle \{0, 1\}, \nu_3^{\Sigma} \right\rangle$, где

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Если в верном высказывании $\max\{\min\{10, 40\}, \max\{10, 20\}\} = 20$ заменить элементы носителя и операции на их образы относительно φ, то вновь получим верное высказывание.

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

$$\max{}^\varphi \left\{ \min{}^\varphi \{10^\varphi, 40^\varphi\},\ \max{}^\varphi \{10^\varphi, 20^\varphi\} \right\} = 20^\varphi \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (\emptyset \cap \{\emptyset\}) \cup (\emptyset \cup \emptyset) = \emptyset,$$

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Если в верном высказывании $\max\{\min\{10, 40\}, \max\{10, 20\}\} = 20$ заменить элементы носителя и операции на их образы относительно ψ, то вновь получим верное высказывание.

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

$$\max{}^\psi \left\{ \min{}^\psi \{10^\psi, 40^\psi\},\ \max{}^\psi \{10^\psi, 20^\psi\} \right\} = 20^\psi \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (\emptyset \cap \{\emptyset\}) \cup (\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \{\emptyset\}.$$

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Можно проверить, что аналогичная ситуация получается с любым высказыванием такого типа (т.е. использующим лишь указанные элементы и операции и, быть может, скобки).

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Можно проверить, что аналогичная ситуация получается с любым высказыванием такого типа. Но отображения φ и ψ не являются взаимно однозначными.

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

А вот функция ζ, являясь взаимно однозначной, тоже сохраняет значения истинности высказывания после замены элементов на их образы относительно ζ.

Пример 2.

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

,

α	$f(x,y)$	$g(x,y)$	h
$\nu_1^\Sigma(\alpha)$	$\min\{x,y\}$	$\max\{x,y\}$	40
$\nu_2^\Sigma(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu_3^\Sigma(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x,y\}$	1

.

Рассмотрим отображения φ, ψ, ζ, заданные таблицами

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

В самом деле, например, истинно высказывание $\Big(\{\emptyset\} \cup \emptyset\Big) \cup \emptyset = \emptyset$, и истинно также высказывание

$$\big(\{\emptyset\}^\zeta \cap^\zeta \emptyset^\zeta\big) \cup^\zeta \emptyset^\zeta = \emptyset^\zeta, \text{ т.е. } \max\{(1 \cdot 0), 0\} = 0.$$

Таким образом, утверждения такого вида об алгебре $\left\langle \left\{ \emptyset, \{\emptyset\} \right\}, \nu_2^{\Sigma} \right\rangle$ являются верными тогда и только тогда, когда их «перевод» в утверждения об алгебре $\langle \{0,1\}, \nu_3^{\Sigma} \rangle$ также являются верными, то есть эти алгебры в этом смысле «как бы одинаковы». Функции φ и ψ обеспечивают лишь «односторонний перевод», то есть с их помощью верные утверждения об алгебре $\langle \{10, 20, 40\}, \nu_1^{\Sigma} \rangle$ «переводятся» в верные утверждения для алгебр $\left\langle \left\{ \emptyset, \{\emptyset\} \right\}, \nu_2^{\Sigma} \right\rangle$ и $\langle \{0,1\}, \nu_3^{\Sigma} \rangle$.

Вернуться к лекции?

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	${}^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} =$

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}$,

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}, \qquad (\neg x)^{\varphi} =$

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}, \qquad (\neg x)^{\varphi} = \overline{x^{\varphi}},$

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}, \qquad (\neg x)^{\varphi} = \overline{x^{\varphi}},$

и, в-третьих, $p(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}, \qquad (\neg x)^{\varphi} = \overline{x^{\varphi}},$

и, в-третьих, $p(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$: $\qquad x < y \ \Leftrightarrow$

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить, во-первых, **взаимную однозначность**, во-вторых, выполнение **формул** $(f(x_1,\ \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$:

$(x \vee y)^{\varphi} = x^{\varphi} \cap y^{\varphi}, \qquad (\neg x)^{\varphi} = \overline{x^{\varphi}},$

и, в-третьих, $p(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}\,(x_1^{\varphi},\ \ldots, x_n^{\varphi})$: $\qquad x < y \ \Leftrightarrow\ x^{\varphi} \subset y^{\varphi}$.

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим, что изоморфизмом является, например, функция φ, заданная таблицей

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Взаимная **однозначность** ограничения φ на $\Omega = \{0,1\}$ очевидна.

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge,\neg\},\ \{<\}\rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,{}^{-}\},\ \{\subset\}\rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим **утверждение «во-вторых»**:

$$\begin{aligned}
&(0\wedge 0)^{\varphi} = 0^{\varphi} = \emptyset = \emptyset\cap\emptyset = 0^{\varphi}\wedge^{\varphi} 0^{\varphi},\\
&(0\wedge 1)^{\varphi} = 0^{\varphi} = \emptyset = \emptyset\cap\{\emptyset\} = 0^{\varphi}\wedge^{\varphi} 1^{\varphi},\\
&(1\wedge 0)^{\varphi} = 0^{\varphi} = \emptyset = \{\emptyset\}\cap\emptyset = 1^{\varphi}\wedge^{\varphi} 0^{\varphi},\\
&(1\wedge 1)^{\varphi} = 1^{\varphi} = \{\emptyset\} = \{\emptyset\}\cap\{\emptyset\} = 1^{\varphi}\wedge^{\varphi} 1^{\varphi},\\
&(\neg 0)^{\varphi} = 1^{\varphi} = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^{\varphi}0^{\varphi},\\
&(\neg 1)^{\varphi} = 0^{\varphi} = \emptyset = \overline{\{\emptyset\}} = \neg^{\varphi}1^{\varphi}.
\end{aligned}$$

Пример 3. *Пусть* (мы воспользуемся **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset\}$. *Показать, что алгебраические системы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверим утверждение «в-третьих» из **определения изоморфизма**. Предикат $x < y$ истинен только при $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases}$ а утверждение $X \subset Y$ истинно в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при $\begin{cases} X = \emptyset = 0^{\varphi} \\ Y = \{\emptyset\} = 1^{\varphi} \end{cases}$. Следовательно, $x < y$ тогда и только тогда, когда $x^{\varphi} <^{\varphi} y^{\varphi}$. Таким образом, φ является изоморфизмом, то есть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны, что и требовалось доказать.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Пусть* (мы воспользовались **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, а ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом***.

Пример 4. *Пусть* (мы воспользовались **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, а ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом***.

Решение. Выполнение *равенств* для функций φ и ψ проверьте самостоятельно.

Пример 4. *Пусть* (мы воспользовались **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, а ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом***.

Решение. Выполнение *равенств* для функций φ и ψ проверьте самостоятельно. Можно это сделать перебором всех значений аргументов, то есть таким же образом, как при **решении примера 3**.

Пример 4. *Пусть* (мы воспользовались **соглашением**)

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, а ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом***.

Решение. Проверим, что φ — сильный гомоморфизм. Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

$$\underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \subseteq \underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \quad \text{и} \quad 0 \leq 0$$
$$\underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \subseteq \underbrace{\{\emptyset\}}_{=1^\varphi} \quad \text{и} \quad 0 \leq 1$$
$$\underbrace{\{\emptyset\}}_{=1^\varphi} \subseteq \underbrace{\{\emptyset\}}_{=2^\varphi} \quad \text{и} \quad 1 \leq 2$$

Осталось заметить, что для любых прообразов x, y элементов, соответственно, $\{\emptyset\}$ и $\emptyset$ неравенство $x \leq y$ не выполняется. Значит, φ является **сильным гомоморфизмом**.

Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

$$0^\psi = \{\emptyset\} \not\subseteq \emptyset = 2^\psi,$$

что и требовалось доказать.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Прежде всего отметим тот очевидный факт, что все эти отношения являются отношениями эквивалентности.

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Разумеется, отношение P является **конгруенцией**, поскольку на самом деле P — это отношение равенства.

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Имеется два класса **эквивалентных** относительно Q элементов: первый — это $\{0\}$ и второй — это $\{1, 2\}$. Попытаемся увидеть, что Q — конгруенция, с помощью специального представления таблиц Кэли для операций этой алгебраической системы. В таблице Кэли самая верхняя компонента столбца представляет собой некоторый элемент x из $\{0, 1, 2\}$.

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Объединим в первый «блок» все те столбцы таблицы Кэли, для которых x принадлежит первому классу **эквивалентных** по Q элементов (этот блок состоит из одного столбца, верхняя компонента которого равна 0), и во второй «блок» — все те столбцы таблицы Кэли, для которых x принадлежит второму классу **эквивалентных** по Q элементов (второй блок состоит из двух столбцов, верхняя компонента которых равна 1 или 2).

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Аналогично поступим со строками: в первый «блок» объединим строки таблицы Кэли, для которых y принадлежит первому классу **эквивалентных** по Q элементов (этот блок состоит из одной строки, самая левая компонента которого равна 0), и во второй «блок» — все те строки таблицы Кэли, для которых y принадлежит второму классу **эквивалентных** по Q элементов (второй блок состоит из двух строк, левая компонента которых равна 1 или 2).

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Кроме того, мы проиндексируем каждый элемент этих таблиц номером класса **эквивалентных** по Q элементов, содержащего этот элемент:

min	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_2	0_1	1_2	1_2
2_2	0_1	1_2	2_2

max	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	1_2	2_2
1_2	1_2	1_2	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

(1)

min	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_2	0_1	1_2	1_2
2_2	0_1	1_2	2_2

max	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	1_2	2_2
1_2	1_2	1_2	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

(1)

Видно, что в каждом «прямоугольном блоке» этой таблицы все элементы принадлежат одному и тому же классу **эквивалентных** элементов, то есть *класс* **эквивалентных** по Q элементов, в который попадает элемент $\min\{x, y\}$ и $\max\{x, y\}$, определяется только тем, *к какому классу* **эквивалентных** элементов принадлежат элементы x и y. Таким образом, Q — это конгруенция.

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Для R имеем: первый класс — это $\{0, 2\}$, второй — это $\{1\}$ (нумерация классов может быть другой)

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	0_1	0_1
2_1	0_1	2_1	1_2
1_2	0_1	1_2	1_2

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	2_1	1_2
2_1	2_1	2_1	2_1
1_2	1_2	2_1	1_2

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	0_1	0_1
2_1	0_1	2_1	1_2
1_2	0_1	1_2	1_2

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	2_1	1_2
2_1	2_1	2_1	2_1
1_2	1_2	2_1	1_2

Таким образом, отношение R, не является **конгруенцией**, поскольку, например,

$$\begin{cases} (0;2) \in R \\ (1;1) \in R \end{cases}, \quad \text{но} \quad \overline{(\min\{0,1\};\ \min\{2,1\}) \in R}.$$

Пример 5. *Для алгебраической системы (мы воспользовались* ***соглашением****)* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруенциями****:*

$$
\begin{aligned}
P &= \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
Q &= \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\} \\
R &= \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\} \\
T &= \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}
\end{aligned}
$$

Решение. Для T имеем: первый класс — это $\{0, 1\}$, второй — это $\{2\}$ (нумерация классов может быть другой)

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Таким образом, T является **конгруенцией**, так как, во-первых, класс **эквивалентных** по T элементов, в который попадает $\min\{x, y\}$, определяется только тем, из какого класса **эквивалентных** по T элементов взяты x, y; во-вторых, аналогичное утверждение верно и для $\max\{x, y\}$.

Обратите внимание на тот факт, что предикат $\leq$ при проверке «на конгруентность» отношения эквивалентности никак не используется!

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример**?

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруенции** для нашего случая:

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруенции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруенции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \Big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1) + p_2(1) = q_1(1) + q_2(1) \Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1) + p_2(1) = q_1(1) + q_2(1) \Rightarrow \Big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\Big) \in P.$$

Для случая, когда f — сумма многочленов, **формула** выполняется.

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1)p_2(1) = q_1(1)q_2(1) \Rightarrow \Big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\Big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{2}$$

является ***конгруенцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1)p_2(1) = q_1(1)q_2(1) \Rightarrow \Big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\Big) \in P.$$

Следовательно, для случая, когда f — произведение многочленов, **формула** также выполняется. Задача решена.

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение.

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\}, \{1, 2\}\Big\}$.

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Предикату $\leq$ соответствует предикат $\leq^{\psi_Q}$, соответствующий отношению

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Предикату $\leq$ соответствует предикат $\leq^{\psi_Q}$, соответствующий отношению

$$\{(\{0\},\{0\}),\ (\{0\},\{1,2\}),\ (\{1,2\},\{1,2\})\}.$$

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Предикату $\leq$ соответствует предикат $\leq^{\psi_Q}$, соответствующий отношению

$$\{(\{0\},\{0\}),\ (\{0\},\{1,2\}),\ (\{1,2\},\{1,2\})\}.$$

Алгебраическая фактор-система полностью описана.

Пример 7. *Для* ***конгруенции*** Q *из* ***примера 5****, найти* ***фактор-систему*** *алгебраической системы из* ***примера 5****.*

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. С помощью **таблиц (1)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Предикату $\leq$ соответствует предикат $\leq^{\psi_Q}$, соответствующий отношению

$$\{(\{0\},\{0\}),\ (\{0\},\{1,2\}),\ (\{1,2\},\{1,2\})\}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Предикату ρ_φ соответствует конгруенция

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Предикату ρ_φ соответствует конгруенция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Предикату ρ_φ соответствует конгруенция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Поэтому фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Пусть m — образ операции $\min$, и M — образ операции $\max$ в фактор-алгебре $\mathcal{A}/\rho_\varphi$. Тогда эти операции можно задать следующими таблицами Кэли:

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Пусть m — образ операции $\min$, и M — образ операции $\max$ в фактор-алгебре $\mathcal{A}/\rho_\varphi$. Тогда эти операции можно задать следующими таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Пусть m — образ операции $\min$, и M — образ операции $\max$ в фактор-алгебре $\mathcal{A}/\rho_\varphi$. Тогда эти операции можно задать следующими таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{\Big(\{0\},\{0\}\Big),\ \Big(\{0\},\{1,2\}\Big),\ \Big(\{1,2\},\{1,2\}\Big)\Big\}.$$

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ имеет следующий носитель: $\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{\Big(\{0\},\{0\}\Big),\ \Big(\{0\},\{1,2\}\Big),\ \Big(\{1,2\},\{1,2\}\Big)\Big\}.$$

Фактор-алгебра $\mathcal{A}=\Big\langle\Big\{\{0\},\{1,2\}\Big\},\{m,M\},\{p\}\Big\rangle$ полностью определена.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, в полном соответствии с **теоремой об описании гомоморфных образов**, отображение α, определенное таблицей

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, в полном соответствии с **теоремой об описании гомоморфных образов**, отображение α, определенное таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_φ	M_φ	p
x^α	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

является взаимно однозначным **сильным гомоморфизмом**.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы****.*

Решение. В силу **критерия изоморфизма** α является изоморфизмом алгебраической **фактор-системы** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Предикату ρ_ψ соответствует *та же самая конгруенция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

что и ρ_φ, то есть эти предикаты совпадают! Значит,

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Предикату ρ_ψ соответствует *та же самая конгруенция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

что и ρ_φ, то есть эти предикаты совпадают! Значит, и фактор-алгебры совпадают.

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Предикату ρ_ψ соответствует *та же самая конгруенция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_φ, то есть эти предикаты совпадают! Однако теперь взаимно однозначный гомоморфизм β, определенный таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_φ	M_φ	p
x^β	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

,

не является **сильным гомоморфизмом**. Таким образом,

Пример 8. *Для гомоморфизмов φ и ψ* ***примера 4****, построить соответствующие* ***фактор-системы***.

Решение. Предикату ρ_ψ соответствует *та же самая конгруенция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_φ, то есть эти предикаты совпадают! Однако теперь взаимно однозначный гомоморфизм β, определенный таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_φ	M_φ	p
x^β	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

,

не является **сильным гомоморфизмом**. Таким образом, алгебраические **фактор-системы** $\mathcal{A}/\rho_\varphi = \mathcal{A}/\rho_\psi$ и $\mathcal{B}$ не изоморфны.

Вернуться к лекции?

Пример 9. *Рассмотрим циклическую* ***группу*** Z_8 *порядка 8:*

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Рассмотрим ***конгруенции***

$$T = \left\{ (x; y) \,\middle|\, |x - y| \in \{0;\ 4\} \right\},$$

$$T'' = \left\{ (x; y) \,\middle|\, |x - y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\} \right\}.$$

Найти ***фактор-системы*** $Z_8/T, \quad Z_8/T'', \quad (Z_8/T)/T'.$

Решение.

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T	
	$\{\quad\}$
$\{\quad\}$	

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T	
	$\{0;\ 4\}$
$\{0;\ 4\}$	

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T		
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{0;\ 4\}$		
$\{1;\ 5\}$		

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T			
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$
$\{0;\ 4\}$			
$\{1;\ 5\}$			
$\{2;\ 6\}$			

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$				
$\{1;\ 5\}$				
$\{2;\ 6\}$				
$\{3;\ 7\}$				

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''	

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''	
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$		
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$		

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\{\qquad\qquad\}$	$\{\qquad\qquad\}$
$\{\qquad\qquad\}$		

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$	
	$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$ $\left\{\quad\right\}$
$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$ $\left\{\quad\right\}$	

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\Big\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\Big\}$	$\Big\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\Big\}$
$\Big\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\Big\}$		
$\Big\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\Big\}$		

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$	$\left\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\right\}$
$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$	$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$	$\left\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\right\}$
$\left\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\right\}$	$\left\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\right\}$	$\left\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\right\}$

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.124.) Найти все группоиды с носителем $\{1; 2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.126.) Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.128.) Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.138.) Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Задача II.5. (Ответ приведен на стр.150.) Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруенции** T.

Задача II.6. (Ответ приведен на стр.153.) Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Задача II.7. (Ответ приведен на стр.163.) Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Задача III.8. (Ответ приведен на стр.176.) Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Задача III.9. (Ответ приведен на стр.191.) Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Задача III.10. (Ответ приведен на стр.202.) Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруенциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если $T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}$,

$$T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Задача IV.11. (Ответ приведен на стр.206.)

$$\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle,$$

где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \leq y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^{φ}	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_{φ} и $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Задача IV.12. (Ответ приведен на стр.218.) Найти **фактор-пространство** двумерного пространства геометрических векторов по **конгруенции** T, определенной правилом: $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,;\; x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T$.

Задача IV.13. (Ответ приведен на стр.221.) Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Задача IV.14. (Ответ приведен на стр.235.) Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Задача V.15. (Ответ приведен на стр.252.) Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Задача V.16. (Ответ приведен на стр.319.) Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Задача V.17. (Ответ приведен на стр.352.) Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найти все группоиды с носителем $\{1; 2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Задача 1. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ.

$x\backslash y$	1	2	1	2
1	1	2	1	2
2	2	1	2	2

Решение задачи 2.

Задача 2. Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Задача 2. Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Единичным элементом является 2. Нетривиальной является только проверка ассоциативности — 27 равенств.

Решение задачи 3.

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x + y)^{\tau} =$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = x^\tau (+)^\tau y^\tau =$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = x^\tau (+)^\tau y^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau =$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -x^\tau$,

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -x^\tau$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau =$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -x^\tau$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -x^\tau$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,
$(\sqrt{x})^\tau =$

Задача 3. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -x^\tau$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,
$(\sqrt{x})^\tau = -x^\tau$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ \end{cases} \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ \qquad\qquad \Rightarrow \\ \end{cases}$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \end{cases} \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow$

Задача 4. Запишите формулы из **определения конгруенции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow \left(\sqrt{x};\ \sqrt{y}\right) \in S.$

Решение задачи 5.

Задача 5. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруенции** T.

Задача 5. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруенции** T.

Ответ. Согласно определению **класса эквивалентных элементов** $C(m) =$

Задача 5. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруенции** T.

Ответ. Согласно определению **класса эквивалентных элементов** $C(m) = \left\{ t \,\middle|\, (m;\ t) \in T \right\}$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$\alpha'(C) =$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\qquad ;\ t) \in T, \\ \\ \end{array} \right. \right\}$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\qquad ;\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\}$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \begin{cases} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{cases} \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) =$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

$$\gamma'(C;\ D;\ E) =$$

Задача 6. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

$$\gamma'(C;\ D;\ E) = \left\{ t \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (\gamma(x;\ y;\ z);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D, \\ z \in E \end{array} \right. \right\}.$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' =$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \qquad\qquad\qquad \middle| \, x \in P \right\}$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ \qquad\qquad\qquad \right\} \middle| x \in P \right\}$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' =$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ \qquad\qquad \right\}; \left\{ \qquad\qquad \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s, y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s, y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' =$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s, y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s, y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \left(\left\{ \qquad\qquad \right\}; \left\{ \qquad\qquad \right\}; \left\{ \qquad\qquad \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Задача 7. Пусть T — конгруенция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s, y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \left(\left\{ u \,\middle|\, (u, x) \in T \right\}; \left\{ v \,\middle|\, (v, y) \in T \right\}; \left\{ w \,\middle|\, (w, z) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Решение задачи 8.

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (\qquad\qquad , \qquad\qquad) \in T, \\ (\qquad\qquad , \qquad\qquad) \in T \end{cases} \Rightarrow (\qquad\qquad + \qquad\qquad , \qquad\qquad + \qquad\qquad) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (\qquad\qquad , \qquad\qquad) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + \qquad\qquad , q_1(x,y) + \qquad\qquad) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ???\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ ???\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x) \ \Rightarrow \qquad \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x) \ \Rightarrow\ \lambda p(x,x) = \lambda q(x,x) \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруенцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x) \ \Rightarrow\ \lambda p(x,x) = \lambda q(x,x) \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача решена.

Решение задачи 9.

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (\quad,\quad) \in S, \\ (\quad,\quad) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (\qquad,\qquad) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, \quad\ ) \in S, \\ (X_2, \quad\ ) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1 X_2, \qquad\ ) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det X_1 = \det Y_1, \\ \det X_2 = \det Y_2 \end{cases} \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 9. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруенцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруенции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det X_1 = \det Y_1, \\ \det X_2 = \det Y_2 \end{cases} \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача решена.

Решение задачи 10.

Задача 10. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруенциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Задача 10. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруенциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем

Задача 10. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруенциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем $\left\{ \begin{array}{l} X \cup Y \neq \emptyset, \\ (X,Y) \in T_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \neq \emptyset, \\ Y \neq \emptyset. \end{array} \right.$

Задача 10. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруенциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем $(X,Y) \in T_1 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} X = Y = \emptyset, \\ \emptyset \notin \{X,Y\}. \end{array} \right.$

Поэтому по **определению конгруенции**, $\left\{ \begin{array}{l} (X_1;\ Y_1) \in T_1, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = Y_1 = \emptyset, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = \emptyset, \\ \emptyset \notin \{X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2\} \end{array} \right. \Rightarrow (X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2) \in T_1, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \{X_1, Y_1\}, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \notin \{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}, \\ \emptyset \notin \{X_1 \cup \underbrace{X_2}_{\emptyset}, Y_1 \cup \underbrace{Y_2}_{\emptyset}\} \end{array} \right. \Rightarrow (X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2) \in T_1. \end{array} \right.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}, \quad Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. В таблицах Кэли операций f и g заменим все элементы их образами относительно действия φ:

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \quad \Rightarrow \quad (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ \\ \\ \end{cases}$$

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \Rightarrow (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \Rightarrow (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \end{cases}$$

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \Rightarrow (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \Rightarrow (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \Rightarrow (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \end{cases}$$

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \Rightarrow (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \Rightarrow (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \Rightarrow (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \\ (1;3) \in P \Rightarrow (1^\varphi;3^\varphi) = (b;b) \in P' \end{cases}$$

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \Rightarrow (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \Rightarrow (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \Rightarrow (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \\ (1;3) \in P \Rightarrow (1^\varphi;3^\varphi) = (b;b) \in P' \end{cases} \Rightarrow P' = Q.$$

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\}\rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. **Конгруенция** T_φ имеет вид

$$T_\varphi = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (2;2),\ (1;1),\ (1;3),\ (3;1),\ (3;3)\}.$$

Классы **эквивалентных** по R_φ элементов таковы $\{0;2\}$, $\{1;3\}$. Алгебраическая фактор-система имеет вид

$$\mathcal{A}/R_\varphi = \langle \{\{0;2\},\ \{1;3\}\},\ \{f',g'\},\ \{P'\}\rangle,$$

где

$f'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{0;2\}$

,

$g'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{0;2\}$
$\{1;3\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$

, $P' = \{\{0;2\},\ \{1;3\}\} \times \{\{0;2\},\ \{1;3\}\}$.

Задача 11. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ x \le y \end{cases}$, $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^{φ}	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруенцию T_{φ} и $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ.

$f'(x';y')$		
$y' \backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{0;2\}$

,

$g'(x';y')$		
$y' \backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{0;2\}$
$\{1;3\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$

, $P' = \{\{0;2\}, \{1;3\}\} \times \{\{0;2\}, \{1;3\}\}$.

Таблицы для f' и g' с точностью до обозначений совпадают с таблицами для u и v, аналогично и для отношений P' и Q. Поэтому функция ε, заданная таблицей

x	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$	f'	g'	P'
x^{ε}	a	b	u	v	Q

является взаимно однозначным гомоморфизмом, более того, изоморфизмом.

Решение задачи 12.

Задача 12. Найти **фактор-пространство** двумерного пространства геометрических векторов по **конгруенции** T, определенной правилом: $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,;\; x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T$.

Задача 12. Найти **фактор-пространство** двумерного пространства геометрических векторов по **конгруенции** T, определенной правилом: $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,;\; x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T$.

Ответ. Каждый класс **эквивалентных** элементов может быть представлен как множество радиусов-векторов точек на прямой, параллельной оси ординат.

Задача 12. Найти **фактор-пространство** двумерного пространства геометрических векторов по **конгруенции** T, определенной правилом: $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\,;\; x\overrightarrow{\mathbf{i}} + z\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T$.

Ответ. Каждый класс **эквивалентных** элементов может быть представлен как множество радиусов-векторов точек на прямой, параллельной оси ординат.
Операция может быть представлена как суммирование чисел — точек пересечения оси абсцисс с прямыми, параллельными оси ординат.

Решение задачи 13.

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{ \qquad\qquad \right\}$,

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I =$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I = m \cdot \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} =$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I = m \cdot \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2mn \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} =$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I = m \cdot \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2mn \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2(mn) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq I.$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**:

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \{I, 3+I\} = \ldots =$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \ldots = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$		$X \odot Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Задача 13. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$		$X \odot Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Эти таблицы с точностью до обозначений совпадают с таблицами для $\boxed{+}$ и $\boxed{\cdot}$, что доказывает изоморфность этих алгебр.

Решение задачи 14.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K$,

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \in K$,

следовательно, $\cdot$ и $+$ действительно являются **операциями** на множестве K.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Выполнение **аксиом кольца** следует из **свойств сложения** и **умножения матриц**.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} =$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \beta\gamma & \alpha\gamma + \beta\gamma \\ \beta\gamma + \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha\gamma \end{pmatrix}$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \beta\gamma & \alpha\gamma + \beta\gamma \\ \beta\gamma + \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha\gamma \end{pmatrix} \in I.$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) =$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I,$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I, \quad (X + I) \cdot (Y + I) =$$

Задача 14. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha; \beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I, \quad (X + I) \cdot (Y + I) = (X \cdot Y) + I.$$

Решение задачи 15.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$. Конгруенция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.
Конгруенция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.
В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим класс, содержащий «особый» элемент, в данном случае — элемент

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.
Конгруенция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.
В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим класс, содержащий «особый» элемент, в данном случае — элемент $e = a^0$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \left\{a^k,\ a^m\right\}$, то $\left(a^k;\ a^m\right) \in T$. Следовательно, по **определению конгруенции**,

$$\begin{cases} \left(a^k;\ a^m\right) \in T, \\ \left(a^{-k};\ a^{-k}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \left\{a^k,\ a^m\right\}$, то $\left(a^k;\ a^m\right) \in T$. Следовательно, по **определению конгруенции**,

$$\begin{cases} \left(a^k;\ a^m\right) \in T, \\ \left(a^{-k};\ a^{-k}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(a^{k-k};\ a^{m-k}\right) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \left\{a^k,\ a^m\right\}$, то $\left(a^k;\ a^m\right) \in T$. Следовательно, по **определению конгруенции**,

$$\begin{cases} \left(a^k;\ a^m\right) \in T, \\ \left(a^{-k};\ a^{-k}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(a^0;\ a^{m-k}\right) \in T. \text{ Поэтому } a^{m-k} \in C_0 = \{a^0\}.$$

Следовательно, $m - k = 0$, т.е. $a^k = a^m$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \left\{a^k,\ a^m\right\}$, то $\left(a^k;\ a^m\right) \in T$. Следовательно, по **определению конгруенции**,

$$\begin{cases} \left(a^k;\ a^m\right) \in T, \\ \left(a^{-k};\ a^{-k}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(a^0;\ a^{m-k}\right) \in T. \text{ Поэтому } a^{m-k} \in C_0 = \{a^0\}.$$

Следовательно, $m - k = 0$, т.е. $a^k = a^m$.

Таким образом, все классы являются одноэлементными.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Следовательно, если $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$, то конгруенция T — это отношение равенства.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow .$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^m;\ a^{2m}) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(a^0 \cdot a^0;\ a^{-km} \cdot a^{km+r}\right) \in T,$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^r) \in T,$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \le r < m$. Тогда, согласно **определению конгруенции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^r) \in T,$ что противоречит минимальности выбора m.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции**

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a^2;\ a^2 \cdot a^2) \in T$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow .$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,$

$\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^2 \cdot a) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3$

$\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^2 \cdot a) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3$

$\begin{cases} (a^0;\ a^4) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^4 \cdot a) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруенции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то По **определению конгруенции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$.

$\begin{cases} (a^0;\ a^4) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^4 \cdot a) \in T.$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$		
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$		
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$. Тогда

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$. Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}$,

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,$

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^0 \cdot a;\ a^3 \cdot a) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,$

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a;\ a^4) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,$

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^0 \cdot a^2;\ a^3 \cdot a^2) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

По **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^2;\ a^5) \in T.$$

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$			
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$		
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$		
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$		

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	

Задача 15. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$$C_i * C_j$$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$

Решение задачи 16.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид:

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»**.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент»

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Действительно, во-первых, в одном классе **эквивалентных** элементов не могут быть элементы a и b, иначе в этот же класс попал бы элемент $\{a, b\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a. Тогда $\emptyset \cap \{b\} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \{\emptyset,\ \{a\}\}$, но

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a. Тогда $\emptyset \cap \{b\} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \{\emptyset,\ \{a\}\}$, но $\{a\} \cap \{b\} = \{a, b\} \notin \{\emptyset,\ \{a\}\}$, противоречие с **определением конгруенции**.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Мы доказали, что если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными, т.е данная конгруенция — это

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Мы доказали, что если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными, т.е данная конгруенция — это отношение равенства.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{b\}, \{a, b\} \cap \{b\}) \in T$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\} \cap \{b\}, \{a, b\} \cap \{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset, \{b\}) \in T.$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\} \cap \{b\}, \{a, b\} \cap \{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset, \{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset, \{b\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\{\emptyset, \{b\}\}$	$\{\emptyset, \{b\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

C	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\overline{C}'$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

C	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\overline{C}'$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$

Аналогично получаем изоморфную построенной системе фактор-систему с носителем $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \{\{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a\}) \in T, \\ (\{a\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\}, \emptyset) \in T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \{\{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Значит, в этом случае конгруенция является **универсальным отношением**.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \emptyset) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \emptyset) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\} \cup \{b\}, \emptyset \cup \{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\{a, b\}, \{b\}) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \emptyset) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cup \{b\}, \emptyset \cup \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a, b\}, \{b\}) \in T \Rightarrow C_0 = \{\{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруенции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруенции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \emptyset) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\} \cup \{b\}, \emptyset \cup \{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\{a, b\}, \{b\}) \in T\ \Rightarrow\ C_0 = \{\{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Значит, в этом случае конгруенция является **универсальным отношением**.

Задача 16. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруенции — отношение равенства.

Второй вариант конгруенции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруенции — универсальное отношение.

Решение задачи 17.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число».

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1. Какое из них «экстремальнее»?

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1. Какое из них «экстремальнее»?
Число 0 «ведет» себя необычно и относительно сложения, и относительно умножения.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.
Ясно, что один из вариантов конгруенции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруенции, отличные от отношения равенства.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.
Ясно, что один из вариантов конгруенции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруенции, отличные от отношения равенства.
Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m,\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.
Ясно, что один из вариантов конгруенции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруенции, отличные от отношения равенства.
Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.
Ясно, что один из вариантов конгруенции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруенции, отличные от отношения равенства.
Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow\ (0, n-m) \in T.$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.
Ясно, что один из вариантов конгруенции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруенции, отличные от отношения равенства.
Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow\ (0, n-m) \in T.$$

Значит, мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases}$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-x, 0) \in T.$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-x, 0) \in T.$$

Поэтому если в классе C_0 содержится ненулевое число, то в этом классе содержится положительное число.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.
Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим $(m+1)$ на $(k+1)$ с остатком:

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $\quad m = pk + r$, где

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $\quad m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T.$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит,

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент. Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T\ \Leftrightarrow\ \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T\ \Leftrightarrow\ \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует **универсальное отношение**, т.к.

Задача 17. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T \Rightarrow (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T \Rightarrow (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (m - kp;\ 0) \in T \Rightarrow (r;\ 0) \in T$, но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T \Leftrightarrow \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует **универсальное отношение**, т.к. для любых целых чисел x, y найдется такое целое число q, что $x < y + kp$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?