Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Обратная матрица

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Определение и критерий существования **3**
I.1. Определение обратной матрицы 7
I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы 8
I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы . 16
I.4. Критерий обратимости матрицы 23

II. Свойства операции обращения матрицы **48**

III. Методы нахождения обратной матрицы **56**

I. Определение и критерий существования

Обычно, когда осуществляется какое-либо действие, рано или поздно возникает потребность в «обратном» действии. Например, мы ввели операцию умножения матриц, которая по известным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ позволяет найти матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. А как быть, если в этом уравнении известны матрицы $\mathbf{C}$ и, например, $\mathbf{B}$, а требуется найти $\mathbf{A}$?

I. Определение и критерий существования

Обычно, когда осуществляется какое-либо действие, рано или поздно возникает потребность в «обратном» действии. Например, мы ввели операцию умножения матриц, которая по известным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ позволяет найти матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. А как быть, если в этом уравнении известны матрицы $\mathbf{C}$ и, например, $\mathbf{B}$, а требуется найти $\mathbf{A}$?

В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций нам следует начать с ситуации, когда матрица $\mathbf{C}$ является «самой простой». Из списка матриц «наиболее простыми» представляются единичная и нулевая матрицы.

Нулевая матрица не представляется перспективной даже с учетом существования делителей нуля в матричной алгебре.

I. Определение и критерий существования

Обычно, когда осуществляется какое-либо действие, рано или поздно возникает потребность в «обратном» действии. Например, мы ввели операцию умножения матриц, которая по известным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ позволяет найти матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. А как быть, если в этом уравнении известны матрицы $\mathbf{C}$ и, например, $\mathbf{B}$, а требуется найти $\mathbf{A}$?

В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций нам следует начать с ситуации, когда матрица $\mathbf{C}$ является «самой простой». Из списка матриц «наиболее простыми» представляются единичная и нулевая матрицы.

Поэтому следует рассмотреть ситуацию, когда матрица $\mathbf{C}$ является единичной, т.е. научиться решать уравнения $\mathbf{BX} = \mathbf{E}$.

I. Определение и критерий существования

Обычно, когда осуществляется какое-либо действие, рано или поздно возникает потребность в «обратном» действии. Например, мы ввели операцию умножения матриц, которая по известным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ позволяет найти матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. А как быть, если в этом уравнении известны матрицы $\mathbf{C}$ и, например, $\mathbf{B}$, а требуется найти $\mathbf{A}$?

Если мы научимся решать уравнения $\mathbf{BX} = \mathbf{E}$, то, умножая обе части уравнения $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ слева на матрицу X, получаем $\mathbf{CX} = (\mathbf{AB})\,\mathbf{X}$. Но, по свойствам умножения матриц и выбору матрицы $\mathbf{X}$, получаем

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{X} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BX}) = \mathbf{AE} = \mathbf{A}.$$

Поэтому $\mathbf{A} = \mathbf{CX}$.

I.1. Определение обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$*, если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство.

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{C}$:

$$= \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right) = \mathbf{C}\mathbf{E} =$$

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{C}$:

$$= \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right) = \mathbf{C}\mathbf{E} = \mathbf{C}.$$

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{C}$:

$$= (\mathbf{C}\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{C}\mathbf{E} = \mathbf{C}.$$

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$, *если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{C}$:

$$= \mathbf{E}\mathbf{B} = (\mathbf{C}\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{C}\mathbf{E} = \mathbf{C}.$$

I.2. Теорема об однозначности обратной матрицы

Определение 1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$*, если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема 1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, то эта* ***обратная матрица*** *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — обратные к матрице $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{B} = (\mathbf{C}\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{C}\mathbf{E} = \mathbf{C}.$$

Значит, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$, что и требовалось доказать.

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство.

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

По определению **обратной матрицы** нам надо доказать равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Первое равенство выполняется по условию, поэтому осталось доказать равенство $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

По определению **обратной матрицы** нам надо доказать равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Первое равенство выполняется по условию, поэтому осталось доказать равенство $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Для этого достаточно левую и правую части имеющегося равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ умножить слева на $\mathbf{A}$ и справа на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} \ \Rightarrow$$

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

По определению **обратной матрицы** нам надо доказать равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Первое равенство выполняется по условию, поэтому осталось доказать равенство $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Для этого достаточно левую и правую части имеющегося равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ умножить слева на $\mathbf{A}$ и справа на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}\,(\mathbf{AB})\,\mathbf{A} = \mathbf{BEA} \;\Rightarrow$$

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Нам надо доказать, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

По определению **обратной матрицы** нам надо доказать равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Первое равенство выполняется по условию, поэтому осталось доказать равенство $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Для этого достаточно левую и правую части имеющегося равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ умножить слева на $\mathbf{A}$ и справа на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}\,(\mathbf{AB})\,\mathbf{A} = \mathbf{BEA} \;\Rightarrow\; \mathbf{E} = \mathbf{BA},$$

что и требовалось доказать.

I.3. Теорема об условии обратимости квадратной матрицы

Теорема 2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Аналогично можно доказать, что равенство $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ влечет $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, т.е. что выполняется еще и равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

В связи с введенным понятием в первую очередь возникают два естественных вопроса: во-первых, всегда ли существует обратная матрица, и, во-вторых, если обратная матрица существует, то как ее найти? Ответ на оба эти вопроса дает следующая неожиданная теорема, дающая критерий существования **обратной матрицы**, причем в ходе ее доказательства получаем способ нахождения **обратной матрицы**. Отметим, что указанный ниже способ называется «метод присоединенной матрицы». В дальнейшем мы рассмотрим также вариант метода Гаусса для нахождения **обратной матрицы**.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть для матрицы $\mathbf{A}$ существует **обратная**. Тогда по теореме о детерминанте произведения матриц имеем

$$= \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) =$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть для матрицы $\mathbf{A}$ существует **обратная**. Тогда по теореме о детерминанте произведения матриц имеем

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) =$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть для матрицы $\mathbf{A}$ существует **обратная**. Тогда по теореме о детерминанте произведения матриц имеем

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}),$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть для матрицы $\mathbf{A}$ существует **обратная**. Тогда по теореме о детерминанте произведения матриц имеем

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}),$$

откуда получаем требуемое неравенство $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Нам надо доказать

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Нам надо доказать существование **обратной матрицы**. Как можно доказать существование какого-то «объекта»?

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Нам надо доказать существование **обратной матрицы**. Как можно доказать существование какого-то «объекта»? Самый лучший способ — «предъявить» этот «объект». В данном случае мы действительно можем явно указать обратную матрицу.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* Обозначим через $\mathbf{P_A}$ так называемую **присоединенную матрицу**, то есть матрицу

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{P_A}$ — матрица, **транспонированная** к матрице из *алгебраических дополнений* к элементам матрицы $\mathbf{A}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A}$. Для этого, согласно определению, надо проверить

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A}$. Для этого, согласно определению, надо проверить выполнение равенств $\mathbf{A} \cdot \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A} = \mathbf{E}$ и $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

$$\mathbf{P_A} = (p_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мы проверим только выполнение равенства $\mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P_A} = \mathbf{E}$, второе проверяется аналогично.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.
Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} =$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.
Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{1}{\det(\mathbf{A})} p_{kj} =$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.
Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} =$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.
Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

При $i = j$ по определению детерминанта получаем
$d_{ii} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\det(\mathbf{A}) = 1.$

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Итак, $d_{ii} = 1$.

При $i \neq j$ по теореме о разложении детерминанта по «чужой» строке, имеем $d_{ij} = 0$. Таким образом, доказано, что $\mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Итак, $d_{ii} = 1$ и при $i \neq j$ имеем $d_{ij} = 0$. Таким образом, доказано, что

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность.* $p_{ij} = A_{ji}$.

Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det(\mathbf{A})}A_{jk} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Итак, $d_{ii} = 1$ и при $i \neq j$ имеем $d_{ij} = 0$. Таким образом, доказано, что $\mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Доказательство. *Достаточность*. Равенство $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ докажите самостоятельно.

I.4. Критерий обратимости матрицы

Теорема 3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица,* ***обратная*** *к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица, и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Определение 2. *Квадратная матрица называется* **невырожденной** *тогда и только тогда, когда ее детерминант отличен от 0.*

В этих терминах получаем, что критерий обратимости матрицы утверждает, что понятия обратимости матрицы и невырожденности матрицы совпадают.

Рассмотреть пример к доказательству критерия обратимости матрицы?

Рассмотреть пример вычисления обратной к матрице 2×2**?**

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

Пока мы можем воспользоваться только определением **обратной матрицы**. Таким образом, надо проверить, что произведение матрицы $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ из правой части доказываемого равенства на матрицу $\mathbf{AB}$ равно $\mathbf{E}$.

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB}) =$$

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} =$$

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} =$$

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} =$$

II. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$;
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Доказательства. Докажем, например, свойство 3.

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Равенство $(\mathbf{AB})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{E}$ проверяется аналогично.

III. Методы нахождения обратной матрицы

Обычно для нахождения **обратной матрицы** применяется один из двух способов: 1) с помощью **присоединенной матрицы**; 2) метод Гаусса.

III. Методы нахождения обратной матрицы

Первый способ: с помощью присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что сначала следует находить матрицу из алгебраических дополнений, а потом — детерминант, так как для вычисления детерминанта можно использовать найденные алгебраические дополнения, что, кстати, позволяет при этом проверить правильность вычисления присоединенной матрицы (надо вычислить детерминант разложениями по всем строкам).

III. Методы нахождения обратной матрицы

Второй способ: метод Гаусса, который мы подробно рассмотрим в разделе, посвященном системам линейных уравнений.

Рассмотреть пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?