Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Задачи по теории групп

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 построения таблицы Кэли для группы диедра D_6 6

Пример 2 группы перестановок 38

Пример 3 таблицы Кэли группы подстановок Σ_3 51

Пример 4 циклической группы 85

Пример 5 конечной циклической группы 114

Пример 6 поиска подгрупп 121

Пример 7 произведений подгрупп 134

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕ-

НИЯ 145

Определение группы 145

Задача II.1 146

Задача II.2 147

Подгруппы 147

Задача III.3 148

Задача III.4 149

Задача III.5 150

Задача III.6 151

Задача III.7 152

Задача III.8 153

Фактор-группа 153

Задача IV.9 154

Алгебра подгрупп 154

Задача V.10 155

Представления групп 155

Пример 8 регулярного представления по подгруппе 156

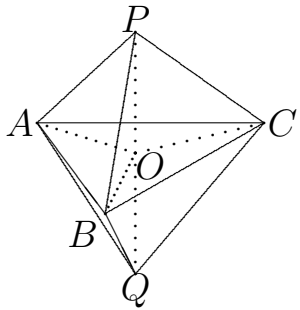
Задача VI.11 157

Задача VI.12 158

Задача VI.13 159

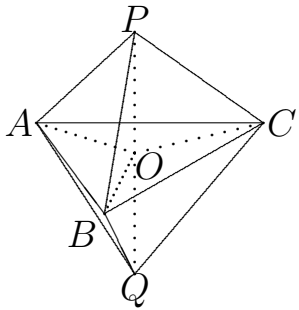
Ответы и решения 160

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



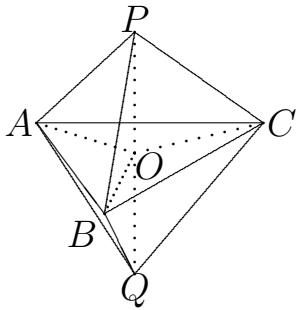
Решение.

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



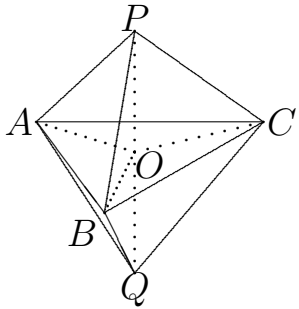
Решение. Как задать симметрию?

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение. Каждую симметрию a, b, c, p, q, r зададим, указывая образы вершин диедра.

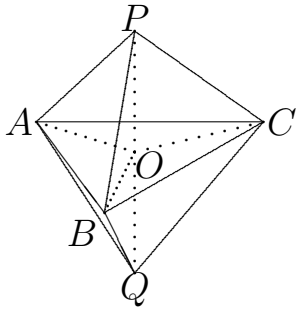
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q

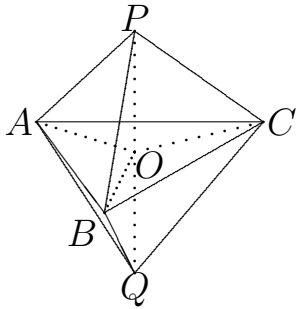
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q

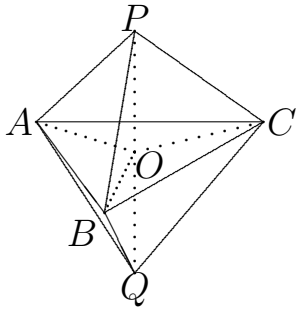
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q

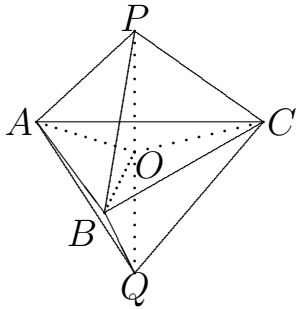
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P

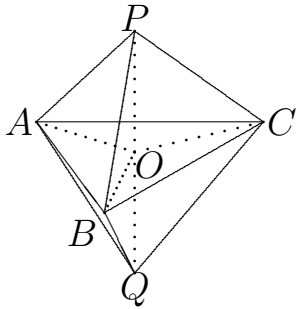
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P

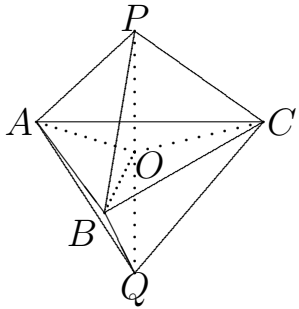
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



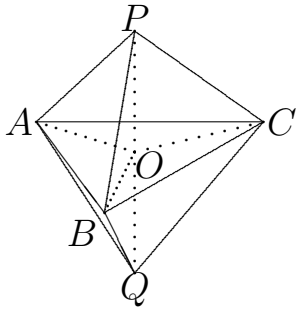
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	**A**	B	C	P	Q
$b(x)$	**B**	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



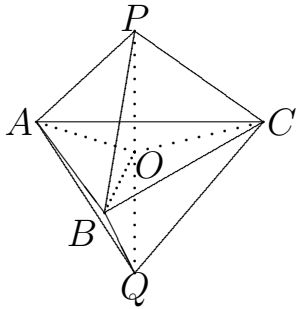
Решение.

	A	**B**	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	**A**	B	C	P	Q
$b(x)$	**B**	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



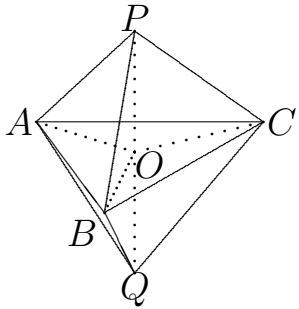
Решение.

	A	**B**	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	**C**	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	**A**	B	C	P	Q
$b(x)$	**B**	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



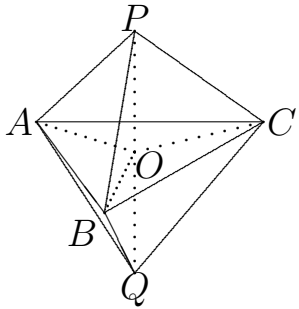
Решение.

	A	**B**	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	**C**	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	**A**	B	C	P	Q
$b(x)$	**B**	C	A	P	Q
$b(b(x))$	**C**				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



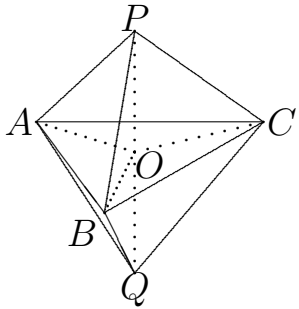
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	**B**	C	P	Q
$b(x)$	B	**C**	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



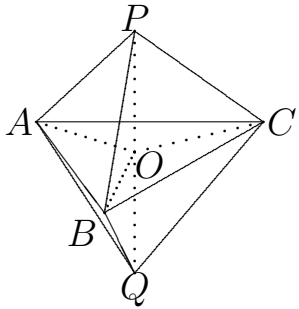
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



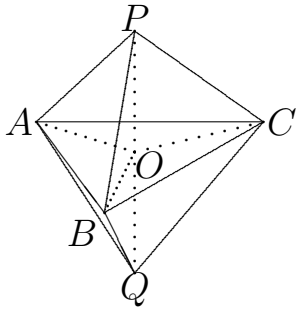
Решение.

	A	B	**C**	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	**A**	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	**B**	C	P	Q
$b(x)$	B	**C**	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



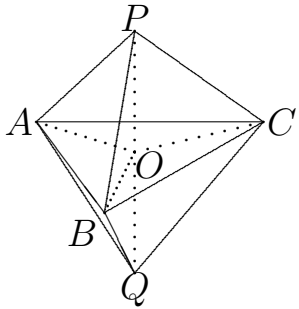
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



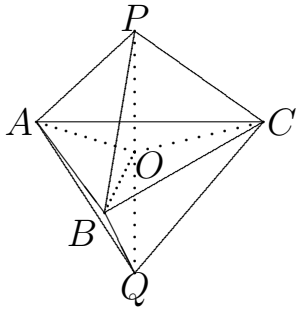
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	**C**	P	Q
$b(x)$	B	C	**A**	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



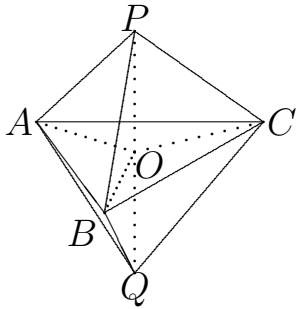
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	**C**	P	Q
$b(x)$	B	C	**A**	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



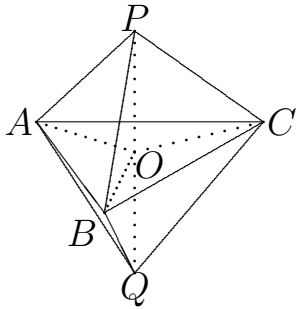
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	**B**	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	**C**	P	Q
$b(x)$	B	C	**A**	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



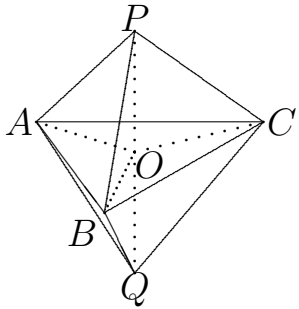
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	**B**	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	**C**	P	Q
$b(x)$	B	C	**A**	P	Q
$b(b(x))$	C	A	**B**		

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

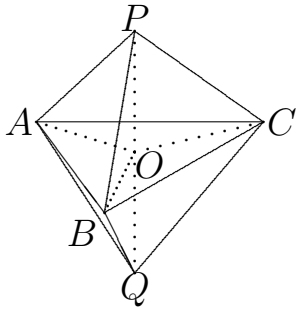
	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	**C**	**A**	**B**	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	**C**	**A**	**B**		

Значит, $b * b =$

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

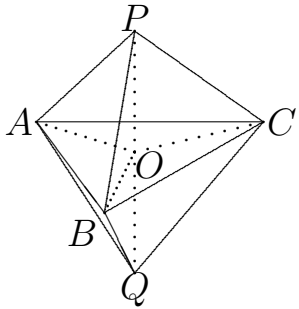
	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	**C**	**A**	**B**	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c				
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	**C**	**A**	**B**		

Значит, $b * b = c$

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

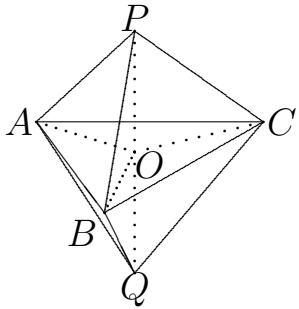


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c				
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

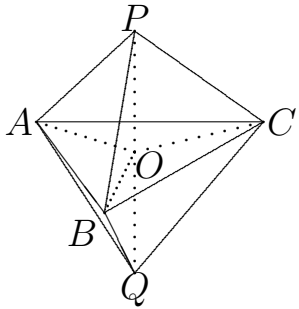


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a			
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

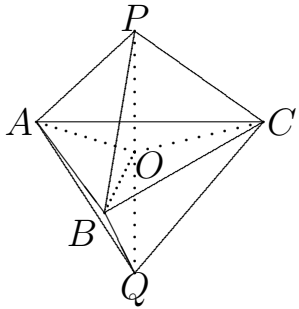


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q		
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

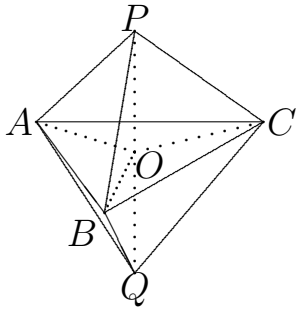


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

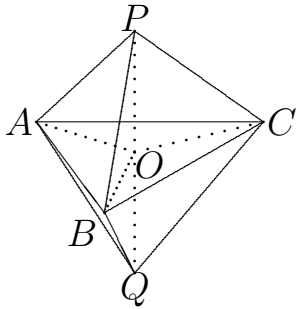


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

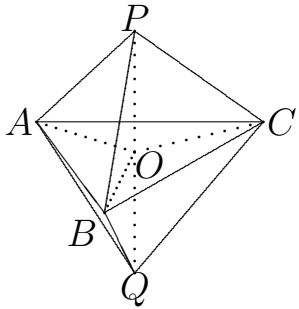


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

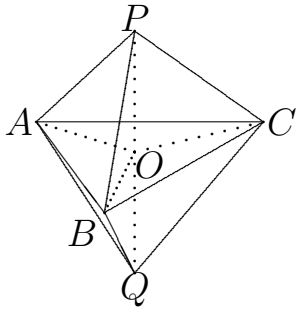


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

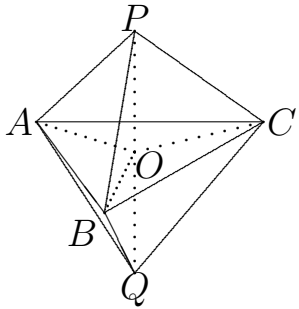


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Вернуться к лекции или **рассмотреть пример группы перестановок**.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций —* ***перестановок элементов*** *— множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции* ***композиции (суперпозиции) функций***.

Решение.

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»:

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\Big(f(x)\Big)\Big) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\Big(f(x)\Big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\Big(f(x)\Big) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\Big(f(x)\Big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\Big(f(x)\Big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x).$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\Big(f(x)\Big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\Big(f(x)\Big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x).$$

Ассоциативность операции $\circ$ доказана.

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. **Нейтральным элементом** является тождественное отображение Ω на себя: $\quad e(k) =$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. **Нейтральным элементом** является тождественное отображение Ω на себя: $\quad e(k) = k$.

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Перестановкой, **обратной** к перестановке f является функция, **обратная** к f.

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Доказано, что Σ_n — группа.

Вернуться к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов**, или **рассмотреть пример группы перестановок**.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Как зададим элементы из Σ_3?

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Из **стандартных способов задания функции** основимся на задании

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Из **стандартных способов задания функции** основимся на задании таблицей значений.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	$f_2\Big(f_1(1)\Big)$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	**2**	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	$f_2\Big(f_1(1)\Big)$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	**2**	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	**1**	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	**1**	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	$f_2\Big(f_1(2)\Big)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	**3**	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	$f_2\Big(f_1(2)\Big)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	**3**	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	**2**
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	**2**
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	$f_2\Big(f_1(3)\Big)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	**1**
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	$f_2\Big(f_1(3)\Big)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	**1**
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	**3**	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	**3**	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		f_0			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\Big(f_1(x)\Big)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		f_0			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

Список элементов группы Σ_3				
x	1	2	3	
$f_0(x)$	1	2	3	единица группы
$f_1(x)$	2	3	1	порядка 3, это q^{-1}
$f_2(x)$	3	1	2	порядка 3, это p^{-1}
$f_3(x)$	2	1	3	инволюция
$f_4(x)$	1	3	2	инволюция
$f_5(x)$	3	2	1	инволюция

Таблица Кэли (Σ_3)						
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Вернуться к определению группы или **рассмотреть циклическую группу**.

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение.

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g * \ldots * g}_{m+n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g * \ldots * g}_{m+n} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{n+m} = (g')^{-(n+m)} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{n+m} = (g')^{-(n+m)} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Итак, мы доказали, что если $\quad g' = g^{-1}, \quad (g')^k = g^{-k}$, то

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^m * g^n = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} = g^{k+m} * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} = g^{k+m} * g^n = \left(g^k * g^m\right) * g^n.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. **Нейтральным элементом** группы H является нейтральный элемент $e = g^0$ группы G.

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической**.

Решение. **Обратным** к элементу g^k является элемент $(g')^k = g^{-k}$.

Вернуться к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов?** Или рассмотреть **пример конечной циклической группы?**

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^{\alpha} = e$. Докажите, что $H = \{e, g, \ldots, g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Этот пример можно рассматривать как уточнение результата **примера 4.**

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^{\alpha} = e$. Докажите, что $H = \left\{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\right\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^{\alpha} = e$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^{\alpha} = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^{\alpha} = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Кроме того, $(g^k)' = g^{-k} = g^{\alpha-k}$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e, g, \ldots, g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Кроме того, $(g^k)' = g^{-k} = g^{\alpha-k}$.

Остается сослаться на **пример 4.**

Вернуться к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов?**

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. **Ясно**, что в этой группе нейтральным элементом является a.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. **Ясно**, что в этой группе нейтральным элементом является a.

Значит, a является элементом любой подгруппы группы D_6.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда $c \in H_1$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда $c \in H_1$.

При этом $c^2 = b \in H_1$ и $cb = bc = a \in H_1$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппу $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппу $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Перебирая элементы, не лежащие в H_1, получаем подгруппы $H_2 = \{a, p\}$, $\quad H_3 = \{a, q\}$, $\quad H_4 = \{a, r\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Значит, собственные подгруппы группы D_6 имеют порядок 2 или 3.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Значит, собственные подгруппы группы D_6 имеют порядок 2 или 3.

Следовательно, других подгрупп в группе D_6 нет.

Вернуться к лекции?

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a * a, a * p, b * a, b * p, c * a, c * p\}$.

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, b * p, c, c * p\}$.

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, c * p\}$.

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} =$

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a * a, a * q, p * a, p * q\}$

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, p * q\}$

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, c\}$

Пример 7. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, c\}$ — не является подгруппой группы D_6.

Вернуться к лекции?

Задания для самостоятельного выполнения

Задача II.1. (Ответ приведен на стр.162.) Найдите все группы порядка 4.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.181.) Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.184.) Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.200.) Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.208.)

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.220.) Пусть G — группа, $A \leq G$, $B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Задача III.7. (Ответ приведен на стр.225.) Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Задача III.8. (Ответ приведен на стр.242.) Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Задача IV.9. (Ответ приведен на стр.252.) Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.261.) Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Пример 8.

Задача VI.11. (Ответ приведен на стр.268.) Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Задача VI.12. (Ответ приведен на стр.296.) Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Задача VI.13. (Ответ приведен на стр.299.) Найти представление **группы диедра** D_6.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?*

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.
Ответ. *Что надо найти?* Группу.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ?

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Рассмотрим «экстремальный» случай. Например, допустим, что имеется элемент порядка 4. Без ограничения общности можно считать, что это b, и что $b^2 = c, \quad b^3 = d$.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Рассмотрим «экстремальный» случай. Например, допустим, что имеется элемент порядка 4. Без ограничения общности можно считать, что это b, и что $b^2 = c, \quad b^3 = d$.

Таблица Кэли в случае существования элемента порядка 4 имеет вид

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Если бы $bc = b$, то

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Если бы $bc = b$, то $c = a$, противоречие.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	
c	c	d	a	
d	d			a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	
d	d	c		a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица VII.0

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ.

Таблица 1

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Таблица 2

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ.

Таблица 1

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Циклическая группа порядка 4

Таблица 2

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Элементарная абелева группа порядка 4

Решение задачи 2.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Ответ. Зададим Q_8 **таблицей Кэли**.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Ответ. Зададим Q_8 **таблицей Кэли**.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Решение задачи 3.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэ-ли 1.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Получили одну из «экстремальных» ситуаций — $H = \{a\}$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Если $b \in H$, то

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Если $b \in H$, то $b^k \in H$, т.е. $c \in H$, $\quad d \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Если $b \in H$, то $b^k \in H$, т.е. $c \in H$, $\quad d \in H$.

Тогда $H = G$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d \in H$

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d = c * d \in H$

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d = c * d = b \in H$, вопреки предположению.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$,

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$, либо $H = \{a\}$,

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$, либо $H = \{a\}$, либо $H = \{a,\ c\}$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$. Попробуйте найти остальные варианты.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$. Сравним результаты?

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.

$H = \{a; b\}$,

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.

$H = \{a; b\}$, или $H = \{a; c\}$,

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.
$H = \{a; b\}$, или $H = \{a; c\}$, или $H = \{a; d\}$.

Решение задачи 5.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Задача 5. Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:

$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\qquad\qquad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\quad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\qquad\qquad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\quad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\qquad\qquad\}$.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:
$\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\ -1,\ \ \}$.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{\alpha\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\ -1,\ -j\}$. Таким образом, все собственные (отличные от единичной и от самой группы) подгруппы группы Q_8 являются **циклическими**.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G$, $B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.
Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.
Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a =$

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \underbrace{a}_{A} * \underbrace{e}_{B} \in$.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \underbrace{a}_{A} * \underbrace{e}_{B} \in A * B$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P, \quad q \in Q$. Тогда

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} =$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q =$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $\quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Итак, доказано, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$, значит,

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Итак, доказано, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$, значит, $P * Q = Q$, задача решена.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p =$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q =$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q = Q$.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q = Q$.

Задача решена.

Решение задачи 9.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbf{N}$.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbf{N}$.

Разделим m на n с остатком: $\quad m = kn + r, \quad r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H}$

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbf{N}$.

Разделим m на n с остатком: $\quad m = kn + r, \quad r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbf{N}$.

Разделим m на n с остатком: $\quad m = kn + r, \quad r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Но $r < n$, а n — наименьшее *положительное* число из H. Значит, $r = 0$, т.е. m делится на n нацело.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbf{N}$.

Разделим m на n с остатком: $\quad m = kn + r, \quad r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Но $r < n$, а n — наименьшее *положительное* число из H. Значит, $r = 0$, т.е. m делится на n нацело.

Следовательно, H состоит из всех чисел, кратных n.

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\left\{ nz \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\} = n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Так как $\mathbb{Z}$ — абелева группа, то $(n \cdot \mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Носитель фактор-группы $\mathbb{Z}/(n \cdot \mathbb{Z})$ состоит из следующих n смежных классов

$$\{0, n, -n, 2n, -2n, \ldots\}, \quad \{1, n+1, 1-n, 2n+1, 1-2n, \ldots\}, \ldots,$$
$$\ldots, \{n-2, 2n-2, -2, 3n-2, \ldots\}, \quad \{n-1, 2n-1, -1, 3n-1, \ldots\}.$$

Задача 9. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\left\{ nz \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\} = n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Так как $\mathbb{Z}$ — абелева группа, то $(n \cdot \mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Носитель фактор-группы $\mathbb{Z}/(n \cdot \mathbb{Z})$ состоит из следующих n смежных классов

$$\{0, n, -n, 2n, -2n, \ldots\}, \quad \{1, n+1, 1-n, 2n+1, 1-2n, \ldots\}, \ldots,$$
$$\ldots, \{n-2, 2n-2, -2, 3n-2, \ldots\}, \quad \{n-1, 2n-1, -1, 3n-1, \ldots\}.$$

Например, группа $\mathbb{Z}/\left(3 \cdot \mathbb{Z}\right)$ состоит из смежных классов

$$\{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\}, \quad \{1, 4, -2, 7, -5, \ldots\}, \quad \{2, 5, -1, 8, -4, \ldots\}.$$

Таблица Кэли групповой операции, индуцированной на этой фактор-группе, имеет вид

	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$
$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$
$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$
$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$

Решение задачи 10.

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

Ясно, что стабилизатор[1] точки 4 в группе Σ_4 — это группа H, изоморфная Σ_3. Стабилизаторы всех четырех точек изоморфны между собой, более того,

$$\mathrm{Stab}_{\Sigma_4}(1) = H^{u_1} = H^{u_5}, \quad \mathrm{Stab}_{\Sigma_4}(2) = H^{u_4} = H^{u_6},$$

$$\mathrm{Stab}_{\Sigma_4}(3) = H^{u_2} = H^{u_3}, \quad \mathrm{Stab}_{\Sigma_4}(4) = H.$$

[1] Подгруппа, состоящая из всех тех перестановок, которые «оставляют неподвижной» точку 4.

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

В группе Σ_4 имеется нормальная подгруппа T порядка 4, состоящая из единичного элемента и трех инволюций f, g, h, приведенных ниже в таблице. В следующей таблице приведены 8 сопряженных между собой элементов[2] порядка 3: $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, t_1, t_2$.

	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3
$g(x)$	3	4	1	2
$h(x)$	4	3	2	1

$$p_1^{u_1} = q_1,\ p_2^{u_1} = q_2,$$
$$q_1^{u_1} = r_1,\ q_2^{u_1} = r_2,$$
$$r_1^{u_1} = t_1,\ r_2^{u_1} = t_2,$$
$$t_1^{u_1} = p_1,\ t_2^{u_1} = p_2,$$
$$p_1^f = q_2,\ p_1^g = r_1,\ p_1^h = t_2,$$

x	1	2	3	4	y	f	g	h
$p_1(x)$	1	3	4	2	y^{p_1}	g	h	f
$p_2(x)$	1	4	2	3	y^{p_2}	h	f	g
$q_1(x)$	3	2	4	1	y^{q_1}	h	f	g
$q_2(x)$	4	2	1	3	y^{q_2}	g	h	f
$r_1(x)$	2	4	3	1	y^{r_1}	g	h	f
$r_2(x)$	4	1	3	2	y^{r_2}	h	f	g
$t_1(x)$	2	3	1	4	y^{t_1}	h	f	g
$t_2(x)$	3	1	2	4	y^{t_2}	g	h	f

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

Как нетрудно заметить, если элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов u_1—u_2, то они действуют (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ неодинаково. Если же элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов f, g или h, то их действие (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ одинаковое.

	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3
$g(x)$	3	4	1	2
$h(x)$	4	3	2	1

$$p_1^{u_1} = q_1,\ p_2^{u_1} = q_2,$$
$$q_1^{u_1} = r_1,\ q_2^{u_1} = r_2,$$
$$r_1^{u_1} = t_1,\ r_2^{u_1} = t_2,$$
$$t_1^{u_1} = p_1,\ t_2^{u_1} = p_2,$$
$$p_1^f = q_2,\ p_1^g = r_1,\ p_1^h = t_2,$$

x	1	2	3	4	y	f	g	h
$p_1(x)$	1	3	4	2	y^{p_1}	g	h	f
$p_2(x)$	1	4	2	3	y^{p_2}	h	f	g
$q_1(x)$	3	2	4	1	y^{q_1}	h	f	g
$q_2(x)$	4	2	1	3	y^{q_2}	g	h	f
$r_1(x)$	2	4	3	1	y^{r_1}	g	h	f
$r_2(x)$	4	1	3	2	y^{r_2}	h	f	g
$t_1(x)$	2	3	1	4	y^{t_1}	h	f	g
$t_2(x)$	3	1	2	4	y^{t_2}	g	h	f

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Как нетрудно заметить, если элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов u_1—u_2, то они действуют (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ неодинаково. Если же элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов f, g или h, то их действие (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ одинаковое. Это совершенно естественно, так как f, g, h коммутируют друг с другом, $u_1, u_2, \ldots, u_6$ с этими элементами не коммутируют:

x	f	g	h
$x^{u_1} = x^{u_2} = \ldots = x^{u_6}$	h	g	f

$$u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = \ldots = u_6^2 = g.$$

В подгруппе T содержатся все такие инволюции из Σ_4, каждая из которых переставляет между собой одновременно *2 пары* элементов из $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

Таким образом, все инволюции из T не оставляют неподвижными ни одного элемента из Ω. Помимо инволюций, содержащихся в T, имеется еще 6 вопряженных между собой инволюций w_1—w_6, каждая из которых переставляет в Ω лишь пару элементов, «не трогая» остальные.

x	1	2	3	4
$w_1(x)$	2	1	3	4
$w_2(x)$	3	2	1	4
$w_3(x)$	4	2	3	1
$w_4(x)$	1	3	2	4
$w_5(x)$	1	4	3	2
$w_6(x)$	1	2	4	3

.

Задача 10. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Фактор-группа Σ_4/T изоморфна группе Σ_3. Один из изоморфизмов φ можно задать, например, следующей таблицей[3]:

y	$\varphi(y)$
$T = \{e', f, g, h\}$	e
$p_1T = \{p_1, q_2, r_1, t_2\}$	q
$p_2T = \{p_2, q_1, r_2, t_1\}$	p
$u_1T = \{u_1, u_2, w_2, w_5\}$	c
$u_3T = \{u_3, u_4, w_3, w_4\}$	b
$u_5T = \{u_5, u_6, w_1, w_6\}$	a

[3]Здесь e' — единичный элемент группы Σ_4, то есть подстановка, заданная таблицей

x	1	2	3	4
$e'(x)$	1	2	3	4

. Напомним также, что здесь $T = \{e', f, g, h\}$.

Решение задачи 11.

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \qquad\qquad , \quad c * \{a,\ p\} =$$

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \{b,\ q\}, \quad c * \{a,\ p\} =$$

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \{b,\ q\}, \quad c * \{a,\ p\} = \{c,\ r\}.$$

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a			
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$a * \{a,\ p\}$	$a * \{b,\ q\}$	$a * \{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$a * \{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$b * \{a,\ p\}$	$b * \{b,\ q\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$b * \{b,\ q\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p			
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q			
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r			

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a		
b		
c		
p		
q		
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b		
c		
p		
q		
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c		
p		
q		
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p		
q		
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q		
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r		

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ —

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.

Ядро гомоморфизма ψ равно

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.
Ядро гомоморфизма ψ равно $\{a,\ b,\ c\}$.

Задача 11. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.

Ядро гомоморфизма ψ равно $\{a,\ b,\ c\}$.

Вернуться к лекции?

Решение задачи 12.

Задача 12. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Задача 12. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Ответ. Для задания требуемого гомоморфизма естественно воспользоваться **соответствующей формулой**:

Задача 12. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Ответ. Для задания требуемого гомоморфизма Естественно воспользоваться **соответствующей формулой**:

x	1	-1	i	$-i$
$\psi(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

x	j	$-j$	k	$-k$
$\psi(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Решение задачи 13.

Задача 13. Найти представление **группы диедра** D_6.

Задача 13. Найти представление **группы диедра** D_6.

Ответ. Пример точного неприводимого представления:

Задача 13. Найти представление **группы диедра** D_6.

Ответ. Пример точного неприводимого представления:

x	a	b	c
$\varphi(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

x	p	q	r
$\varphi(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?