Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Отношения и предикаты

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 (к определению отношения) 4

Пример 2 (отношение эквивалентности) 11

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности) 24

Связь между предикатами и отношениями 60

Задача I.1 61

Бинарные отношения 61

Задача II.2 62

Задача II.3 63

Отношение эквивалентности 63

Задача III.4 64

Задача III.5 65

Ответы и решения 66

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение.

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение. Для того, чтобы было легче проверять условие $f(-1) \geq g(1)$, составим следующую таблицу:

$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$
$x-1$	-2	0
$x+1$	0	2
x^2-1	0	0
$(x-1)^2$	4	0

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение. Для того, чтобы было легче проверять условие $f(-1) \geq g(1)$, составим следующую таблицу:

$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$
$x-1$	-2	0
$x+1$	0	2
x^2-1	0	0
$(x-1)^2$	4	0

Нетрудно увидеть, что $(x-1, x-1) \notin B$, так как для $f(x) = g(x) = x-1$ имеем $f(-1) = -2 < 0 = f(1)$.

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение. Для того, чтобы было легче проверять условие $f(-1) \geq g(1)$, составим следующую таблицу:

$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$
$x-1$	-2	0
$x+1$	0	2
x^2-1	0	0
$(x-1)^2$	4	0

Далее, $(x+1)B(x-1)$, так как $(x+1)|_{x=-1} = 0 \geq 0 = (x-1)|_{x=1}$.

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение. Для того, чтобы было легче проверять условие $f(-1) \geq g(1)$, составим следующую таблицу:

$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$
$x-1$	-2	0
$x+1$	0	2
x^2-1	0	0
$(x-1)^2$	4	0

Продолжая перебор по всему множеству Ω, получаем

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение.

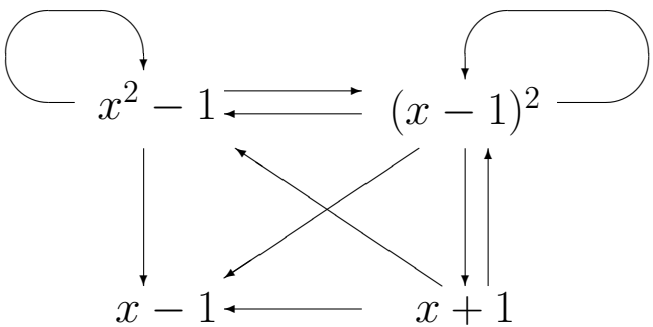
$$B = \Big\{ \big(x+1, x-1\big),\ \big(x^2-1, x-1\big),\ \big((x-1)^2, x-1\big) \Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{ \big(x+1, x^2-1\big),\ \big(x+1, (x-1)^2\big) \Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{ \big(x^2-1, x^2-1\big),\ \big(x^2-1, (x-1)^2\big),\ \big((x-1)^2, (x-1)^2\big) \Big\}.$$

Пример 1 (к определению отношения). *На множестве* $\Omega = \{x-1, x+1, x^2-1, (x-1)^2\}$ *отношение* B*, заданное правилом:* $f(x)Bg(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(-1) \geq g(1)$*. Найти множество* B *и построить граф* $\Gamma(B)$*.*

Решение. Граф выглядит так (с точностью до расположения вершин на плоскости):



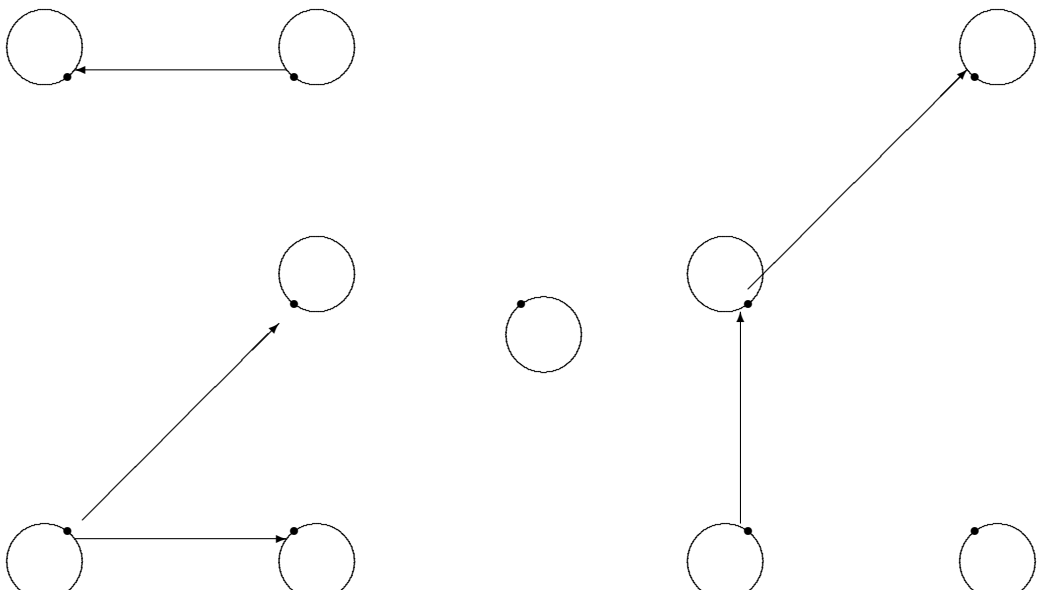
Вернуться к лекции?

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*

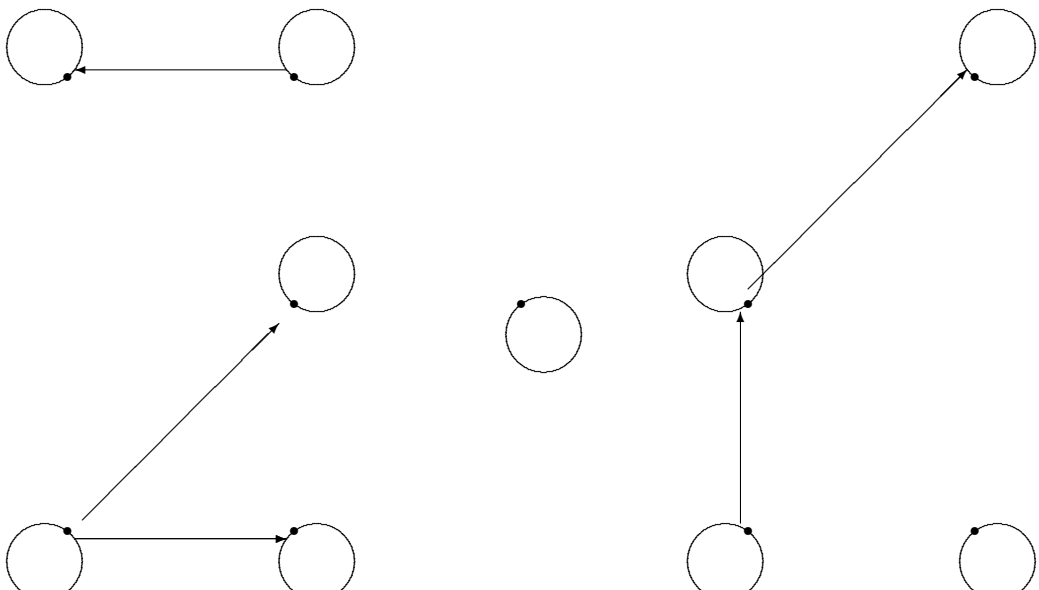
В силу рефлексивности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



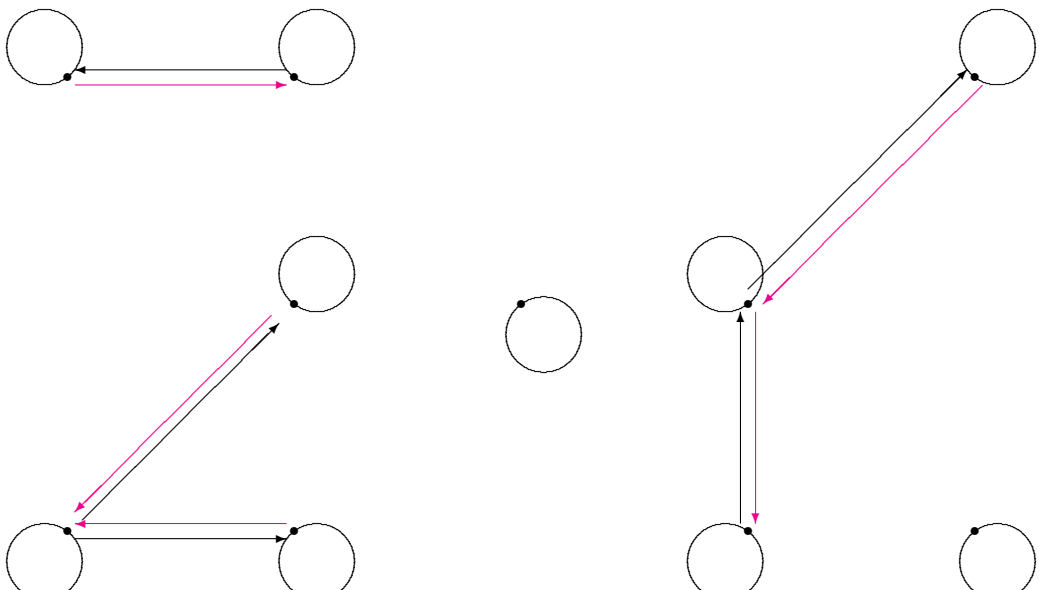
В силу рефлексивности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



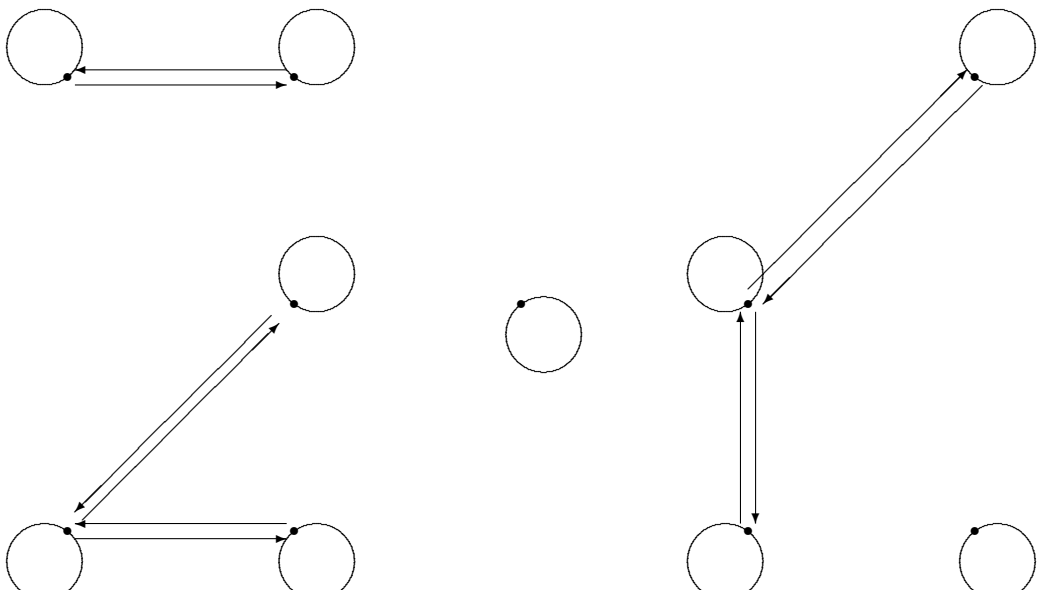
По симметричности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



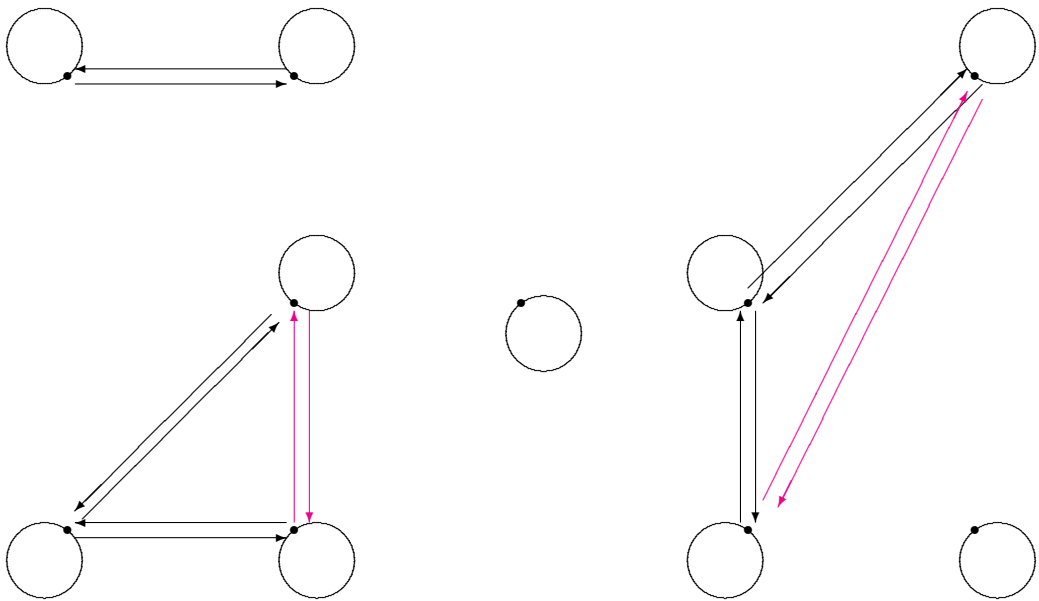
По симметричности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



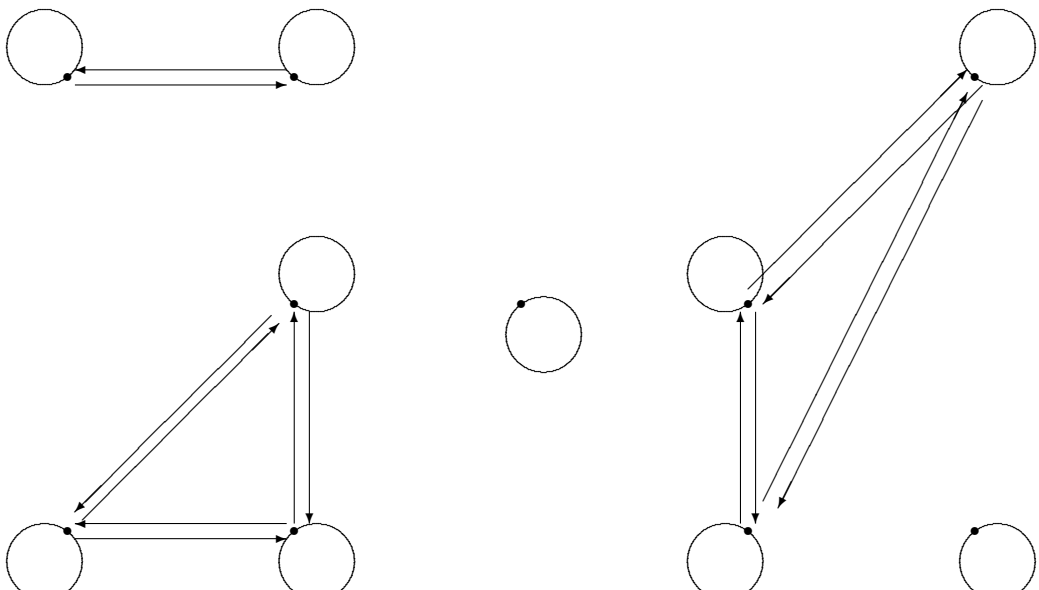
По транзитивности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



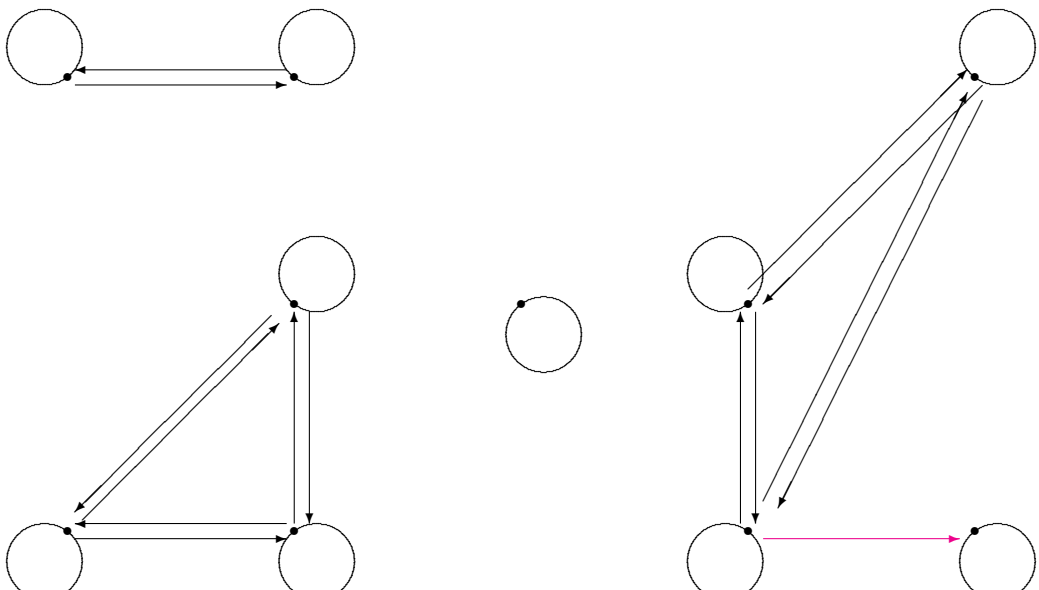
Получили объединение полных подграфов!

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



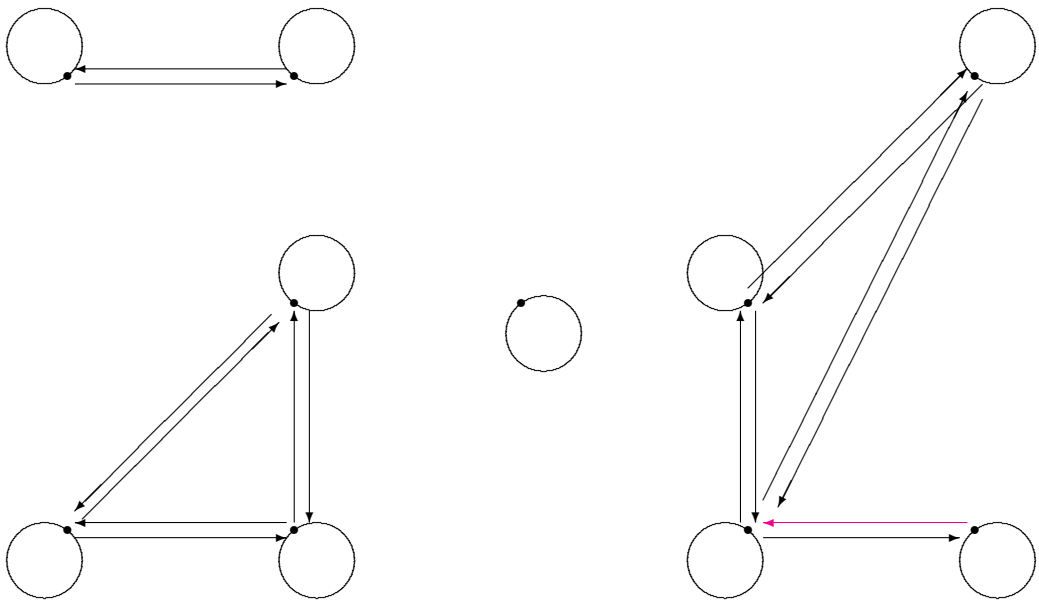
А если добавить дугу?

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



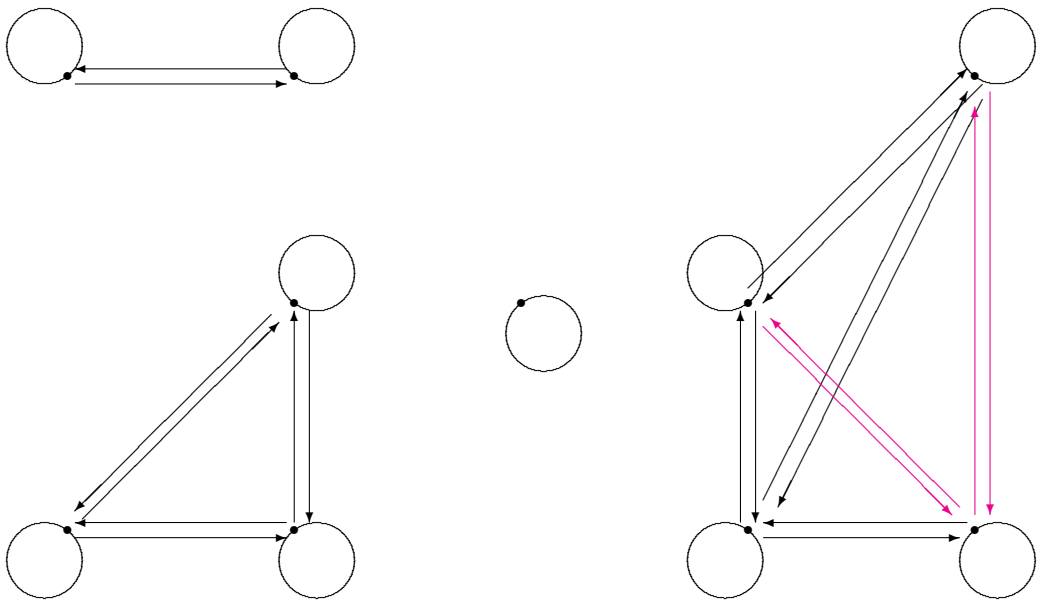
А если добавить дугу?

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



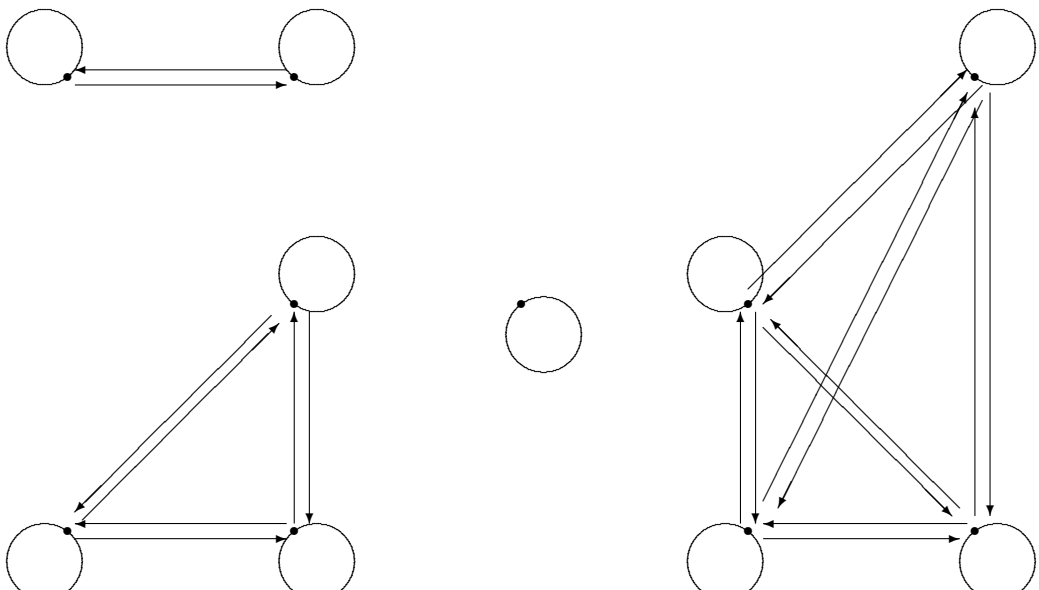
По симметричности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



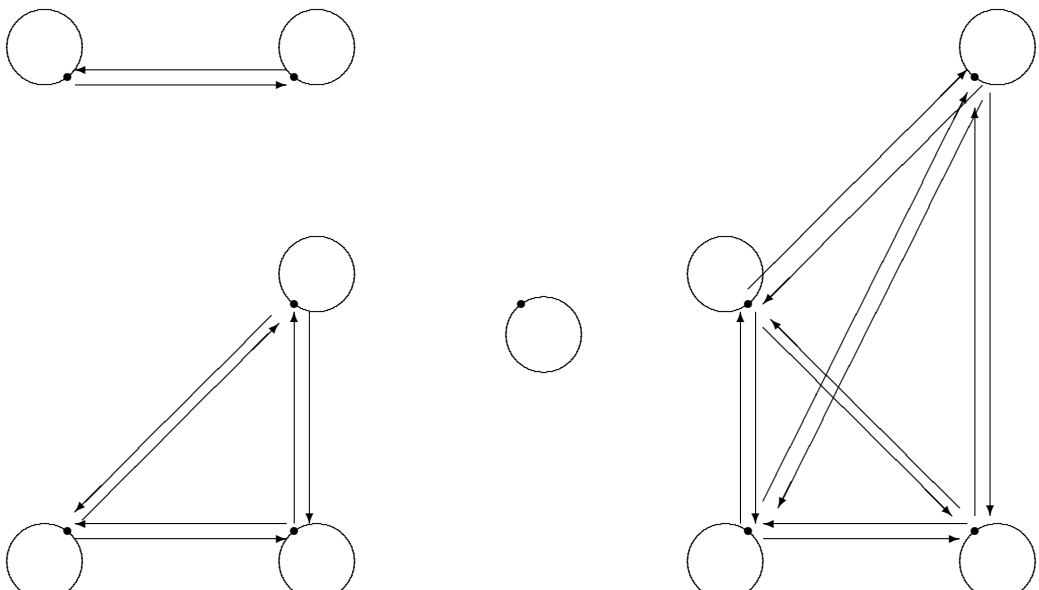
По транзитивности...

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



Опять граф распался в объединение полных подграфов!

Пример 2. *Пусть отношению P соответствует граф, изображенный ниже. Найти минимальное такое отношение эквивалентности Q, что $P \subseteq Q$.*



Вернуться к лекции?

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение.

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$P = \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$P = \ \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$P = \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{4\}\Big);$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$P = \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{1;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{4\}\Big);$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$P = \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{1;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{4\}\Big);$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Перебором всех вариантов получаем

$$\begin{aligned} P = \ \Big\{ & \Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{4\}\Big); \\ & \Big(\{1;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{4\}\Big); \\ & \Big(\{4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{4\}\Big); \\ & \Big(\{2;5\};\{2;5\}\Big);\ \Big(\{2;5\};\{5;6\}\Big);\ \Big(\{5;6\};\{2;5\}\Big);\ \Big(\{5;6\};\{5;6\}\Big)\Big\} \end{aligned}$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность выполняется:

$$P = \Big\{\Big(\{1;3;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;3;4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{1;4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{1;4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{4\};\{1;3;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{1;4\}\Big);\ \Big(\{4\};\{4\}\Big);$$
$$\Big(\{2;5\};\{2;5\}\Big);\ \Big(\{2;5\};\{5;6\}\Big);\ \Big(\{5;6\};\{2;5\}\Big);\ \Big(\{5;6\};\{5;6\}\Big)\Big\}$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Симметричность очевидна:

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Симметричность очевидна:

$$(X;\ Y) \in P\ \Rightarrow$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Симметричность очевидна:

$$(X;\ Y) \in P \ \Rightarrow\ X \cap Y \neq \emptyset \ \Rightarrow$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Симметричность очевидна:

$$(X;\ Y) \in P \ \Rightarrow\ X \cap Y \neq \emptyset \ \Rightarrow\ Y \cap X \neq \emptyset \ \Rightarrow$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Рефлексивность можно было доказать аналитически:

$$X \cap X = X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (X;\ X) \in P.$$

Симметричность очевидна:

$$(X;\ Y) \in P \ \Rightarrow\ X \cap Y \neq \emptyset \ \Rightarrow\ Y \cap X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ (Y;\ X) \in P.$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Транзитивность можно было бы доказать перебором всех вариантов, но это слишком хлопотно.

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\left\{\begin{array}{l} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{array}\right.$ Если $4 \in X \cap Y$, то

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(Y;\ Z) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in Y \cap Z, \\ 5 \in Y \cap Z, \end{array}\right. \quad \text{причем} \quad 5 \notin Y$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $4 \in X \cap Y$, то
$4 \in Y \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(Y;\ Z) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in Y \cap Z, \\ 5 \in Y \cap Z. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $4 \in X \cap Y$, то
$4 \in Y \ \Rightarrow\ 4 \in Y \cap Z \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $4 \in X \cap Y$, то
$4 \in Y \ \Rightarrow\ 4 \in Y \cap Z \ \Rightarrow\ 4 \in X \cap Z \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $4 \in X \cap Y$, то
$4 \in Y \ \Rightarrow\ 4 \in Y \cap Z \ \Rightarrow\ 4 \in X \cap Z \ \Rightarrow\ (X;Z) \in P.$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\left\{\begin{array}{l} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{array}\right.$ Если $5 \in X \cap Y$, то

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $5 \in X \cap Y$, то
$5 \in Y \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $5 \in X \cap Y$, то
$5 \in Y \ \Rightarrow\ 5 \in Y \cap Z \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $5 \in X \cap Y$, то
$5 \in Y \ \Rightarrow\ 5 \in Y \cap Z \ \Rightarrow\ 5 \in X \cap Z \ \Rightarrow$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказать аналитически транзитивность нетрудно, если заметить, что

$$(X;\ Y) \in P \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 4 \in X \cap Y, \\ 5 \in X \cap Y. \end{array}\right.$$

Пусть $\begin{cases} (X;Y) \in P, \\ (Y;Z) \in P. \end{cases}$ Если $5 \in X \cap Y$, то
$5 \in Y \ \Rightarrow\ 5 \in Y \cap Z \ \Rightarrow\ 5 \in X \cap Z \ \Rightarrow\ (X;Z) \in P.$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) =$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} =$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) =$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) = C(\{4\}),$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) = C(\{4\}),$$

$$C(\{2;5\}) =$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) = C(\{4\}),$$

$$C(\{2;5\}) = \Big\{\{2;5\};\ \{5;\ 6\}\Big\} =$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) = C(\{4\}),$$

$$C(\{2;5\}) = \Big\{\{2;5\};\ \{5;\ 6\}\Big\} = C(\{5;6\}).$$

Пример 3 (к определению отношения эквивалентности). *На множестве*
$\Omega = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{2;5\};\ \{4\};\ \{5;\ 6\}\Big\}$
отношение P, задано правилом: $(X;Y) \in P$ тогда и только тогда, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Задать отношение P списком элементов и построить граф $\Gamma(P)$. Является ли P отношениям эквивалентности? Если да, то найти классы эквивалентных элементов.

Решение. Доказано, что P есть отношение эквивалентности. Найдем классы эквивалентных элементов. Согласно **соответствующей формуле**

$$C(\{1;3;4\}) = \Big\{\{1;3;4\};\ \{1;4\};\ \{4\}\Big\} = C(\{1;4\}) = C(\{4\}),$$

$$C(\{2;5\}) = \Big\{\{2;5\};\ \{5;\ 6\}\Big\} = C(\{5;6\}).$$

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.68.) Что определяет фраза «натуральное число n является нечетным»? Варианты ответа: а) отношение; б) предикат-высказывание; в) предикат-функцию. Запишите остальные представления этого предиката (отношения).

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.72.) На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.81.) Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \big\{a;\ \emptyset\big\};\ \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается

а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.86.) Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1; 3\}$, $\{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.91.) На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Что определяет фраза «натуральное число n является нечетным»? Варианты ответа: а) отношение; б) предикат-высказывание; в) предикат-функцию. Запишите остальные представления этого предиката (отношения).

Задача 1. Что определяет фраза «натуральное число n является нечетным»? Варианты ответа: а) отношение; б) предикат-высказывание; в) предикат-функцию. Запишите остальные представления этого предиката (отношения).

Ответ. Исходная фраза определяет предикат-высказывание $P(n)$. Соответствующая функция (предикат-функция) с помощью **известной формулы** может представлена в виде

$$\varphi_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число;} \\ 1, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число.} \end{cases}$$

Задача 1. Что определяет фраза «натуральное число n является нечетным»? Варианты ответа: а) отношение; б) предикат-высказывание; в) предикат-функцию. Запишите остальные представления этого предиката (отношения).

Ответ. Исходная фраза определяет предикат-высказывание $P(n)$. Соответствующая функция (предикат-функция) с помощью **известной формулы** может представлена в виде

$$\varphi_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число;} \\ 1, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число.} \end{cases}$$

Можно представить эту функцию следующей эвристической формулой: если $[x]$ — целая часть числа x, то есть наиболее целое число, не превосходящее x, то

$$\varphi_P(n) = n - 2 \cdot \left[\frac{x}{2}\right].$$

Задача 1. Что определяет фраза «натуральное число n является нечетным»? Варианты ответа: а) отношение; б) предикат-высказывание; в) предикат-функцию. Запишите остальные представления этого предиката (отношения).

Ответ. Соответствующее отношение можно с помощью **известной формулы** представить в виде

$$\Phi_P = \left\{ n \,\middle|\, n \text{ нечетное натуральное число} \right\} = \{1;\, 3;\, 5;\, \ldots;\, 2k+1;\, \ldots\} =$$

$$= \left\{ 2k+1 \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решение задачи 2.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Используя **формулу преобразования предиката-высказывания в отношение** получаем, что предикат $P_T\,(x; y)$ логически эквивалентен высказыванию $(x; y) \in T$.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Используя **формулу преобразования предиката-высказывания в отношение** получаем, что предикат $P_T\,(x; y)$ логически эквивалентен высказыванию $(x; y) \in T$. Предикат-функцию можно, с одной стороны, задать с помощью **формулы преобразования отношения в предикат-функцию**,

$$\varphi_{((x;y)\in T)}(\alpha; \beta) = \begin{cases} 0, \text{ если } (\alpha; \beta) \notin T; \\ 1, \text{ если } (\alpha; \beta) \in T. \end{cases}$$

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Используя **формулу преобразования предиката-высказывания в отношение** получаем, что предикат $P_T\,(x; y)$ логически эквивалентен высказыванию $(x; y) \in T$. Предикат-функцию можно, с одной стороны, задать с помощью **формулы преобразования отношения в предикат-функцию**,

$$\varphi_{((x;y)\in T)}(\alpha; \beta) = \begin{cases} 0, \text{ если } (\alpha; \beta) \notin T; \\ 1, \text{ если } (\alpha; \beta) \in T. \end{cases}$$

Однако, функцию можно задать иначе, более удобным образом. Например, учитывая, что область определения функции $\varphi_{((x;y)\in T)}$ конечна, ее удобно задать таблицей:

$x \backslash y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	0	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	0

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Одно из представлений ориентированного графа для отношения T, предложено на рис. 5.

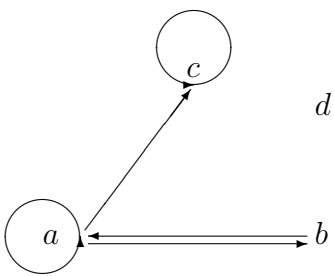


Рис.5.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Одно из представлений ориентированного графа для отношения T, предложено на рис. 5.

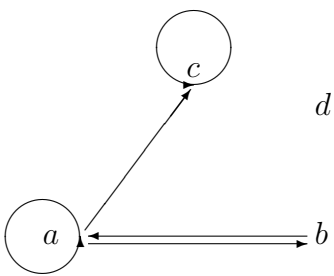


Рис.5.

Отношение T не является рефлексивным, так как $(b; b) \notin T$.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Одно из представлений ориентированного графа для отношения T, предложено на рис. 5.

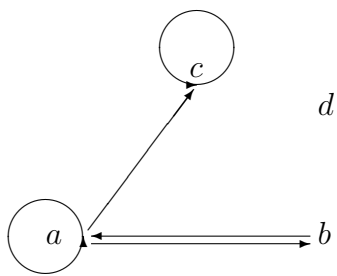


Рис.5.

Отношение T не является рефлексивным, так как $(b; b) \notin T$. Оно не является симметричным, так как $(a; c) \in T$, но $(c; a) \notin T$.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Одно из представлений ориентированного графа для отношения T, предложено на рис. 5.

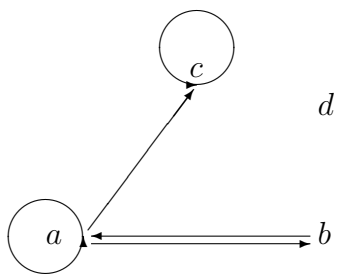


Рис.5.

Отношение T не является рефлексивным, так как $(b; b) \notin T$. Оно не является симметричным, так как $(a; c) \in T$, но $(c; a) \notin T$. Отношение T не является антисимметричным, поскольку $(a; b) \in T$ и $(a; b) \in T$, но $a \neq b$.

Задача 2. На множестве $\{a; b; c; d\}$ определено отношение $T = \{(a; a);\ (a; b);\ (a; c);\ (c; c);\ (b; a)\}$. Задайте это отношение предикатом-высказыванием P_T и предикатом-функцией φ_T, ориентированным графом. Выясните, какими из **свойств бинарных отношений** (рефлексивность, симметричность и др.), обладает отношение T.

Ответ. Одно из представлений ориентированного графа для отношения T, предложено на рис. 5.

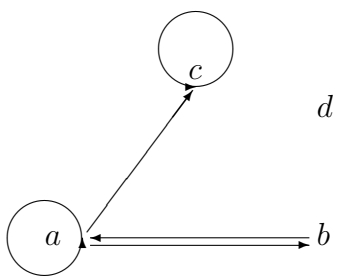


Рис.5.

Отношение T не является рефлексивным, так как $(b; b) \notin T$. Оно не является симметричным, так как $(a; c) \in T$, но $(c; a) \notin T$. Отношение T не является антисимметричным, поскольку $(a; b) \in T$ и $(a; b) \in T$, но $a \neq b$. Наконец, отношение T не является транзитивным, поскольку $(b; a) \in T$ и $(a; c) \in T$, но $(b; c) \notin T$.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \Big\{a;\ \emptyset\Big\};\ \Big\{a;\ \{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \emptyset\Big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Задача 3. Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \big\{a;\ \emptyset\big\};\ \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Ответ. а) Если под $<$ понимается $\subset$, то формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ не выполняется, поскольку имеется интерпретация, для которой ее условие $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases}$ истинно, а заключение $\left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ неверно.

Задача 3. Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \Big\{a;\ \emptyset\Big\};\ \Big\{a;\ \{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \emptyset\Big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Ответ. а) Если под $<$ понимается $\subset$, то формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y; \\ y < x \end{array}\right.$ не выполняется, поскольку имеется интерпретация, для которой ее условие $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases}$ истинно, а заключение $\left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ неверно. В самом деле, это возможно при $x = \{a\}$, $y = \Big\{\{a\}\Big\}$, $z = \Big\{a;\ \{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \emptyset\Big\}$. В самом деле, условие в этом случае выпоняется, но $\{a\} \not\subset \Big\{\{a\}\Big\}$ и $\Big\{\{a\}\Big\} \not\subset \{a\}$, то есть заключение исходной формулы не выполняется.

Задача 3. Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \Big\{a;\ \emptyset\Big\};\ \Big\{a;\ \{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \emptyset\Big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Ответ. б) если $<$ — это отношение $\subseteq$, то формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ не выполняется, так как контрпример, приведенный для случая а) является контрпримером и к рассматриваемой формуле $\begin{cases} x \subseteq z, \\ y \subseteq z \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \subseteq y, \\ y \subseteq x. \end{array}\right.$ Действительно, последняя формула не выполняется при $x = \{a\}$, $y = \Big\{\{a\}\Big\}$, $z = \Big\{a;\ \{a\};\ \Big\{\{a\}\Big\};\ \emptyset\Big\}$, так как $\{a\} \not\subseteq \Big\{\{a\}\Big\}$ и $\Big\{\{a\}\Big\} \not\subseteq \{a\}$.

Задача 3. Пусть $A = \Big\{\{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \big\{a;\ \emptyset\big\};\ \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}\Big\}$. Верна ли формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ для случая, когда под $<$ понимается а) отношение $\subset$; б) отношение $\subseteq$; в) отношение $\in$?

Ответ. в) Если под $<$ понимается $\in$, то формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases}$ допускает только две интерпретации: $\begin{cases} \{a\} \in \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}; \\ \big\{\{a\}\big\} \in \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\} \end{cases}$ и $\begin{cases} \big\{\{a\}\big\} \in \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}; \\ \{a\} \in \big\{a;\ \{a\};\ \big\{\{a\}\big\};\ \emptyset\big\}. \end{cases}$ В каждом из этих случаев формула $\begin{cases} x < z, \\ y < z, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < y, \\ y < x \end{array}\right.$ верна, так как $\{a\} \in \big\{\{a\}\big\}$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1;3\}$, $\{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Задача 4. Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1;3\}$, $\{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Ответ.

$$S = \{(1;1);\ (1;3);\ (3;1);\ (2;2);\ (3;3)\}\,,$$

Задача 4. Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1;3\}, \quad \{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Ответ.

$$S = \{(1;1);\ (1;3);\ (3;1);\ (2;2);\ (3;3)\},$$

Предикат-высказывание $P_S(x;y)$ логически эквивалентно высказыванию $(x;y) \in S$. В данном случае можно предложить эвристическую формулировку:

Задача 4. Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1;3\}, \quad \{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Ответ.

$$S = \{(1;1);\ (1;3);\ (3;1);\ (2;2);\ (3;3)\},$$

Предикат-высказывание $P_S(x;y)$ логически эквивалентно высказыванию $(x;y) \in S$. В данном случае можно предложить эвристическую формулировку: сумма чисел x и y есть число четное. Предикат-функцию можно задать конкретизацией **формулы для преобразования отношения в предикат-функцию**:

Задача 4. Отношение S является отношением эквивалентности, классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1;3\}$, $\{2\}$. Задать это отношение списком элементов, предикатами, ориентированным графом.

Ответ.

$$S = \{(1;1);\ (1;3);\ (3;1);\ (2;2);\ (3;3)\},$$

Предикат-высказывание $P_S(x;y)$ логически эквивалентно высказыванию $(x;y) \in S$. В данном случае можно предложить эвристическую формулировку: сумма чисел x и y есть число четное. Предикат-функцию можно задать конкретизацией **формулы для преобразования отношения в предикат-функцию**:

$$\varphi_{((x;y)\in S)} = \begin{cases} 0, \text{ если } (x;y) \notin S; \\ 1, \text{ если } (x;y) \in S, \end{cases}$$

но более естественным является в данном случае ее задание таблицей значений

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	0	1
2	0	1	0
3	1	0	1

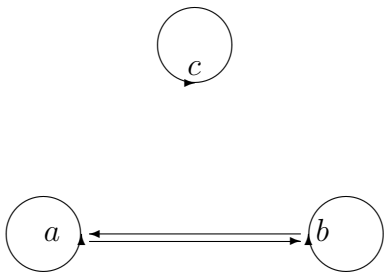


Рис.6. К задаче III.4.

Одно из представлений ориентированного графа для отношения S, предложено на рис. 6.

Решение задачи 5.

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответ. Сначала переведем условие на язык равенств: $n = 4a + r, \quad m = 4b + r$, где a, b — неотрицательное целое число, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Избавившись от переменной r получаем $n - m = 4c$, где c — неотрицательное целое число.

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответ. Сначала переведем условие на язык равенств: $n = 4a + r, \quad m = 4b + r$, где a, b — неотрицательное целое число, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Избавившись от переменной r получаем $n - m = 4c$, где c — неотрицательное целое число.

Рефлексивность следует из того, что $n - n = 4 \cdot 0$.

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответ. Сначала переведем условие на язык равенств: $n = 4a + r, \quad m = 4b + r$, где a, b — неотрицательное целое число, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Избавившись от переменной r получаем $n - m = 4c$, где c — неотрицательное целое число.

Рефлексивность следует из того, что $n - n = 4 \cdot 0$.

Симметричность следует из того, что если $n - m = 4c$, то $m - n = 4 \cdot (-c)$.

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответ. Сначала переведем условие на язык равенств: $n = 4a + r, \quad m = 4b + r$, где a, b — неотрицательное целое число, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Избавившись от переменной r получаем $n - m = 4c$, где c — неотрицательное целое число.

Рефлексивность следует из того, что $n - n = 4 \cdot 0$.

Симметричность следует из того, что если $n - m = 4c$, то $m - n = 4 \cdot (-c)$.

Транзитивность вытекает из того факта, что если $n - m = 4c$ и $k - n = 4d$, то $k - m = (k - n) + (n - m) = 4c + 4d = 4(c + d)$.

Задача 5. На множестве натуральных чисел рассмотрим отношение G, заданное предикатом «у чисел m и n одинаковый остаток от деления на 4». Проверьте, что G есть отношение эквивалентности, найдите классы эквивалентных элементов (называемые ***классами вычетов по модулю 4***).

Ответ. Сначала переведем условие на язык равенств: $n = 4a + r, \quad m = 4b + r$, где a, b — неотрицательное целое число, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Избавившись от переменной r получаем $n - m = 4c$, где c — неотрицательное целое число.

Рефлексивность следует из того, что $n - n = 4 \cdot 0$.

Симметричность следует из того, что если $n - m = 4c$, то $m - n = 4 \cdot (-c)$.

Транзитивность вытекает из того факта, что если $n - m = 4c$ и $k - n = 4d$, то $k - m = (k - n) + (n - m) = 4c + 4d = 4(c + d)$.

Значит, G — отношение эквивалентности. Классы эквивалентных элементов имеют вид: $\{1; 5; 9; 13; \ldots; (4k + 1); \ldots\}$, $\{2; 6; 10; 14; \ldots; (4k + 2); \ldots\}$, $\{3; 7; 11; 15; \ldots; (4k + 3); \ldots\}$, $\{4; 8; 12; 16; \ldots; (4k + 4); \ldots\}$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?