Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Билинейные и квадратичные формы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Билинейные формы на языке линейных пространств **4**

Билинейные формы на языке многочленов **7**

Матричная форма записи билинейной формы **31**

Теорема о вычислении билинейной формы в координатах . 41

Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах . . 44

Симметричная билинейная форма 52

Теорема о матрице симметричной билинейной формы . . . 54

Квадратичные формы **69**

Критерий совпадения порожденных квадратичных форм . . 76

Лемма о матрице квадратичной формы 85

Матрица квадратичной формы 104

Теорема о преобразовании матрицы квадратичной формы . 107
Приведение квадратичной формы к каноническому виду . . 111
Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа 116
Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования 117
Теорема об ортогональном преобразовании квадратичной формы 127
Закон инерции квадратичной формы 131
Ранг квадратичной формы 149
Положительно определенные квадратичные формы 153

I. Билинейные формы на языке линейных пространств

Билинейная форма в теории линейных пространств определяется следующим образом:

I. Билинейные формы на языке линейных пространств

Билинейная форма в теории **линейных пространств** определяется следующим образом:

Определение 1. *Пусть U — линейное пространство. Тогда функция $f : U \times U \mapsto K$ называется* **билинейной формой** *тогда и только тогда, когда она линейна по каждому из аргументов, то есть $f(\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \lambda f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) + \mu f(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ и $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{z}}) = \lambda f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \mu f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$.*

I. Билинейные формы на языке линейных пространств

Билинейная форма в теории **линейных пространств** определяется следующим образом:

Определение 1. *Пусть U — линейное пространство. Тогда функция $f : U \times U \mapsto K$ называется* **билинейной формой** *тогда и только тогда, когда она линейна по каждому из аргументов, то есть $f(\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \lambda f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) + \mu f(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ и $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{z}}) = \lambda f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \mu f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$.*

Алгебра билинейных форм-функций — линейное пространство относительно операций сложения функций и умножения функции на скаляр.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) =$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) =$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right).$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right).$$

Заметим, что массив компонент вида $f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j)$ не зависит от векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, это характеристика **базиса**. Обозначим через $F_{\mathbf{Б}}$ матрицу элементов вида $f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j)$.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right).$$

В результате мы получили равенство

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right).$$

В результате мы получили равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j). \quad (1)$$

Рассмотреть пример?

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j). \quad (1)$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j). \quad (1)$$

Что же мы получили?

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j). \quad (1)$$

Что же мы получили? Как мы сейчас увидим, уравнение (1) открывает довольно неожиданные перспективы.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Пусть f — **билинейная форма на языке линейных пространств**. Как обычно, поставим вопрос о том, что соответствует этой функции «в пространстве **координат**», в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для ответа на этот вопрос, как обычно, выбираем **базис** $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$. Тогда получаем, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j). \quad (1)$$

Сначала заметим, что мы получили задание функции f с помощью *выражения*. Такие выражения можно (и очень полезно) изучать и безо всякой связи с линейными пространствами.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 2. Многочленом *от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *вида*

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}.$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 2. Многочленом *от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *вида*

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}.$$

При этом **степенью** *этого многочлена называется число*

$$\deg\left(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \max_{a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \neq 0} \left(i_1 + i_2 + \ldots + i_n\right).$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 2. Многочленом *от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *вида*

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}.$$

При этом **степенью** *этого многочлена называется число*

$$\deg\left(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \max_{a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \neq 0} \left(i_1 + i_2 + \ldots + i_n\right).$$

Например, $\deg\left(x_1^2 x_2^0 + 2x_1^2 x_2^3 - 3x_1 x_2^3\right)$ равна 5, так как

$$\max_{a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \neq 0} \left(i_1 + i_2 + \ldots + i_n\right) = \max\left\{2+0;\ 2+3;\ 1+3\right\} = 5.$$

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 2. Многочленом *от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *вида*

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}.$$

При этом **степенью** *этого многочлена называется число*

$$\deg\left(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \max_{a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \neq 0} \left(i_1 + i_2 + \ldots + i_n\right).$$

Заметим, что у многочленов из правой части уравнения (1) есть одно важное свойство: *каждое слагаемое имеет степень 2*! Полезно рассмотреть более общее понятие:

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 3. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *называется* **формой степени** m *или* **однородным многочленом степени** m*, если все его слагаемые имеют степень* m.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 3. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *называется* **формой степени** m *или* **однородным многочленом степени** m*, если все его слагаемые имеют степень* m.

На языке многочленов понятие билинейной формы можно сформулировать следующим образом:

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 4. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *называется* **билинейной формой**, *если этот многочлен является формой первой степени как от переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$ *(*y_i *— фиксированы), так и от переменных* $(y_1, \ldots, y_n)$ *(*x_i *фиксированы).*

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 4. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *называется* **билинейной формой**, *если этот многочлен является формой первой степени как от переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$ *(*y_i *— фиксированы), так и от переменных* $(y_1, \ldots, y_n)$ *(*x_i *фиксированы).*

Уравнение (1) устанавливает связь билинейной формы-многочлена с билинейной формой-функцией.

Отметим, что,

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 4. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *называется* **билинейной формой**, *если этот многочлен является формой первой степени как от переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$ *(*y_i *— фиксированы), так и от переменных* $(y_1, \ldots, y_n)$ *(*x_i *фиксированы).*

Уравнение (1) устанавливает связь билинейной формы-многочлена с билинейной формой-функцией.

Отметим, что, во-первых, алгебра билинейных форм-многочленов относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр является линейным пространством.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 4. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *называется* **билинейной формой**, *если этот многочлен является формой первой степени как от переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$ *(*y_i *— фиксированы), так и от переменных* $(y_1, \ldots, y_n)$ *(*x_i *фиксированы).*

Уравнение (1) устанавливает связь билинейной формы-многочлена с билинейной формой-функцией.

Во-вторых, отображение, каждой билинейной форме-функции ставящее в соответствие билинейную форму-многочлен, определяемый уравнением (1), является изоморфизмом линейного пространства билинейных форм-функций на линейное пространство билинейных форм-многочленов.

II. Билинейные формы на языке многочленов

Определение 4. *Многочлен* $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *называется* **билинейной формой**, *если этот многочлен является формой первой степени как от переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$ *(*y_i *— фиксированы), так и от переменных* $(y_1, \ldots, y_n)$ *(*x_i *фиксированы).*

Уравнение (1) устанавливает связь билинейной формы-многочлена с билинейной формой-функцией.

Во-вторых, отображение, каждой билинейной форме-функции ставящее в соответствие билинейную форму-многочлен, определяемый уравнением (1), является изоморфизмом линейного пространства билинейных форм-функций на линейное пространство билинейных форм-многочленов.

Вот как далеко завело нас уравнение (1)! Но это еще не все.

III. Матричная форма записи билинейной формы

Равенство (1) приводит к еще одному важному результату. Дело в том, что многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}$ можно записать в компактном и удобном *матричном виде*:

III. Матричная форма записи билинейной формы

Равенство (1) приводит к еще одному важному результату. Дело в том, что многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}$ можно записать в компактном и удобном *матричном виде*:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

III. Матричная форма записи билинейной формы

Равенство (1) приводит к еще одному важному результату.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

III. Матричная форма записи билинейной формы

Равенство (1) приводит к еще одному важному результату.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Как обычно, отметим, что это равенство на самом деле неверно, так как при подстановке значений переменных в левой части полученного уравнения получаем скаляр, а в правой части — одноэлементную матрицу.

III. Матричная форма записи билинейной формы

Равенство (1) приводит к еще одному важному результату.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Как обычно, отметим, что это равенство на самом деле неверно, так как при подстановке значений переменных в левой части полученного уравнения получаем скаляр, а в правой части — одноэлементную матрицу. Однако, мы будем отождествлять одноэлементную матрицу с ее единственным элементом, так как в рассматриваемых нами выражениях это не будет вызывать недоразумений.

III. Матричная форма записи билинейной формы

Определение 5. *Матрицу* $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$, *где* $f_{ij} = f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right)$, *называют* **матрицей билинейной формы в базисе Б** *(на языке теории* ***линейных пространств****) или* **матрицей коэффициентов билинейной формы** *(на языке теории многочленов).*

III. Матричная форма записи билинейной формы

Определение 5. *Матрицу* $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$ *называют* **матрицей билинейной формы в базисе Б** *(на языке теории* ***линейных пространств****) или* **матрицей коэффициентов билинейной формы** *(на языке теории многочленов)*.

Понятие матрицы билинейной формы обобщает понятие матрицы Грама.

III. Матричная форма записи билинейной формы

Определение 5. *Матрицу* $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ & & \dots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$ *называют* **матрицей билинейной формы в базисе Б** *(на языке теории* ***линейных пространств****) или* **матрицей коэффициентов билинейной формы** *(на языке теории многочленов).*

Понятие матрицы билинейной формы обобщает понятие матрицы Грама.

В соответствии с замечательным равенством (1) получаем, что матрица билинейной формы-функции в **базисе Б** $= \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ имеет вид

III. Матричная форма записи билинейной формы

В соответствии с замечательным равенством (1) получаем, что матрица билинейной формы-функции в **базисе** $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ имеет вид

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \\ f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \\ & & \ldots & \\ f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \end{pmatrix}.$$

III. Матричная форма записи билинейной формы

В соответствии с замечательным равенством (1) получаем, что матрица билинейной формы-функции в **базисе** $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ имеет вид

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \\ f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \\ & & \ldots & \\ f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы с помощью равенства (1) доказали следующую теорему:

III. Теорема о вычислении билинейной формы в координатах

Теорема 1 (о вычислении билинейной формы в координатах). *Если* **Б** — ***базис*** *линейного пространства* U, $F_{\textbf{Б}}$ — *матрица билинейной формы* f *в* ***базисе*** **Б**, *то для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *из* U *имеем*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\textbf{Б}} F_{\textbf{Б}} [y]_{\textbf{Б}}. \tag{2}$$

III. Теорема о вычислении билинейной формы в координатах

Теорема 1 (**о вычислении билинейной формы в координатах**). *Если* **Б** — ***базис*** *линейного пространства* U, $F_{\textbf{Б}}$ — *матрица билинейной формы* f *в* ***базисе*** **Б**, *то для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *из* U *имеем*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\textbf{Б}} F_{\textbf{Б}} [y]_{\textbf{Б}}. \tag{2}$$

Эта формула обобщает формулу из теоремы о вычислении скалярного произведения.

III. Теорема о вычислении билинейной формы в координатах

Теорема 1 (**о вычислении билинейной формы в координатах**). *Если* **Б** — ***базис*** *линейного пространства* U, $F_{\mathbf{Б}}$ — *матрица билинейной формы* f *в* ***базисе*** **Б**, *то для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *из* U *имеем*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]_{\mathbf{Б}}^{t} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}. \tag{2}$$

Эта формула обобщает формулу из теоремы о вычислении скалярного произведения.

Как обычно, в рассматриваемой теории мы отождествляем одноэлементную матрицу с ее единственным элементом.

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению матрицы перехода, ее коэффициенты t_{ij} определяются системой равенств $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$.

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению матрицы перехода, ее коэффициенты t_{ij} определяются системой равенств $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$. Следовательно, для коэффициентов матриц $F_{\text{Б}}$ и $F_{\text{Б}'}$ имеем:

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$f'_{pq} = f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}'_p, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q\right) =$$

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базис‘ах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б**’ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$f'_{pq} = f\left(\overrightarrow{\mathbf{e}}'_p, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ip}\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} t_{jq}\overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) =$$

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$f'_{pq} = f\left(\vec{\mathbf{e}}'_p, \vec{\mathbf{e}}'_q\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ip}\vec{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} t_{jq}\vec{\mathbf{e}}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ip} f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) t_{jq} =$$

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$f'_{pq} = f\left(\vec{\mathbf{e}}\,'_p, \vec{\mathbf{e}}\,'_q\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ip}\vec{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} t_{jq}\vec{\mathbf{e}}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ip} f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) t_{jq} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ip} f_{ij} t_{jq},$$

III. Теорема о матрице билинейной формы в разных базисах

Теорема 2 (**о матрице билинейной формы в разных базисах**). *Если* **Б** *и* **Б'** *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— соответствующая матрица перехода, то матрицы* $F_{\text{Б}}$ *и* $F_{\text{Б}'}$ *этой билинейной формы в этих* ***базисах*** *связаны соотношением:*

$$F_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} F_{\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б}'}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$f'_{pq} = f\left(\vec{\mathbf{e}}\,'_p, \vec{\mathbf{e}}\,'_q\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ip}\vec{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^{n} t_{jq}\vec{\mathbf{e}}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ip} f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) t_{jq} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ip} f_{ij} t_{jq},$$

что при записи в матричном виде дает требуемое равенство.

III. Симметричная билинейная форма

Для следующего раздела нам понадобится еще одно понятие:

III. Симметричная билинейная форма

Для следующего раздела нам понадобится еще одно понятие:

Определение 6. *Билинейная форма f (в терминах теории* ***линейных пространств****) называется* **симметричной билинейной формой** *тогда и только тогда, когда для любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ из U имеет место равенство $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = f(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})$.*

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*
2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*
2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. Достаточно доказать два утверждения:

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*
2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. во-первых, если билинейная форма f является симметричной, то ее матрица является симметричной в любом **базисе**, и,

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*
2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. во-вторых, если существует такой **базис**, в котором матрица билинейной формы f является симметричной, то f — симметричная билинейная форма.

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно:

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *f является симметричной билинейной формой если и только если ее матрица в любом* ***базисе*** *является симметричной.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно:

$$f_{ij} = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \overrightarrow{\mathbf{e}}_j) = f(\overrightarrow{\mathbf{e}}_j, \overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = f_{ji}.$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. Второе утверждение следует из **теоремы о вычислении билинейной формы в координатах**.

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. Второе утверждение следует из **теоремы о вычислении билинейной формы в координатах**. В самом деле, матрица $[x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$ — одноэлементная, поэтому она при транспонировании не меняется.

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство. Следовательно, в силу равенства $F_{\text{Б}}^t = F_{\text{Б}}$, **теоремы о вычислении билинейной формы в координатах** и **свойств операции транспонирования** (точнее, равенства $(AB)^t = B^t A^t$), получаем

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) =$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} =$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = \left([x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right)^t =$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = \left([x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right)^t = [y]^t_{\mathbf{Б}} F^t_{\mathbf{Б}} [x]_{\mathbf{Б}} =$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = \left([x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right)^t = [y]^t_{\mathbf{Б}} F^t_{\mathbf{Б}} [x]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= [y]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [x]_{\mathbf{Б}} =$$

III. Теорема о матрице симметричной билинейной формы

Теорема 3 (о матрице симметричной билинейной формы). *Пусть f — билинейная форма (в смысле теории* ***линейных пространств****). Тогда справедливы следующие утверждения:*

2. *f является симметричной билинейной формой если и только если существует такой* ***базис****, в котором матрица билинейной формы f является симметричной.*

Доказательство.

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = [x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = \left([x]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right)^t = [y]^t_{\mathbf{Б}} F^t_{\mathbf{Б}} [x]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= [y]^t_{\mathbf{Б}} F_{\mathbf{Б}} [x]_{\mathbf{Б}} = f(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}).$$

IV. Квадратичные формы

На языке многочленов **квадратичная форма** — это форма степени 2. На языке теории **линейных пространств** это определение можно сформулировать следующим образом.

IV. Квадратичные формы

На языке многочленов **квадратичная форма** — это форма степени 2. На языке теории **линейных пространств** это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 7. Квадратичной формой *называется такая функция* $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$, *для которой найдется билинейная форма* f *такая, что для любого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *из* U *имеет место равенство* $\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = f(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})$.

IV. Квадратичные формы

Понятно, что различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму.

IV. Квадратичные формы

Понятно, что различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Например, билинейные формы

$$\alpha\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = x_1y_2 + y_1x_2,$$

$$\beta\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = 2x_1y_2,$$

различны, так как $\alpha\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 1, \quad \beta\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 2.$

IV. Квадратичные формы

Понятно, что различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Например, билинейные формы

$$\alpha\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = x_1y_2 + y_1x_2,$$

$$\beta\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = 2x_1y_2,$$

различны, так как $\alpha\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 1, \quad \beta\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 2.$

Но они порождают одну и ту же квадратичную форму:

$$\alpha\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right) = xy + yx = 2xy = \beta\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right).$$

IV. Квадратичные формы

Понятно, что различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Например, билинейные формы

$$\alpha\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = x_1y_2 + y_1x_2,$$

$$\beta\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = 2x_1y_2,$$

различны, так как $\alpha\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 1, \quad \beta\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 2.$

Но они порождают одну и ту же квадратичную форму:

$$\alpha\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right) = xy{+}yx = 2xy = \beta\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right).$$

Какие вопросы вы могли бы поставить перед исследователями в связи с неоднозначностью билинейной формы, порождающей конкретную квадратичную форму?

IV. Квадратичные формы

Понятно, что различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Например, билинейные формы

$$\alpha\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = x_1y_2 + y_1x_2,$$

$$\beta\left(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\right) = 2x_1y_2,$$

различны, так как $\alpha\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 1, \quad \beta\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right) = 2.$

Но они порождают одну и ту же квадратичную форму:

$$\alpha\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right) = xy{+}yx = 2xy = \beta\left(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2,\ x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\right).$$

Мы рассмотрим две задачи: 1) выяснить, как связаны между собой билинейные формы, порождающие одну и ту же квадратичную форму; 2) выбрать наиболее удобную билинейную форму, порождающую данную квадратичную форму.

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{4}$$

Доказательство.

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму. Иными словами

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму. Иными словами
$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

Тогда $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$, откуда

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму. Иными словами
$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

Тогда $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$, откуда

$$\begin{aligned}&f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=\\&=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму. Иными словами $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)= \\ =g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)+g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

По условию $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ и $f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$, поэтому из (5) следует равенство (4).

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть выполняется равенство равенство (4). Полагая в этом равенстве $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, получаем

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть выполняется равенство равенство (4). Полагая в этом равенстве $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, получаем $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

Следовательно, билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму.

IV.1. Критерий совпадения порожденных квадратичных форм

Лемма 1 (Критерий совпадения порожденных квадр. форм). *Билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную формы тогда и только тогда, когда*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть выполняется равенство равенство (4). Полагая в этом равенстве $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, получаем $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}};\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

Следовательно, билинейные формы f и g порождают одну и ту же квадратичную форму.

Теорема доказана.

IV. Квадратичные формы

В силу неоднозначности билинейной формы, порождающей конкретную квадратичную форму, актуальным является выбор наиболее удобной билинейной формы, порождающей данную квадратичную форму. Разумеется, «удобство» определяется соответствующей целью.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы:

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(y,x), \\ g(x,y) = g(y,x) \end{cases} \Rightarrow \left(f(x,x) = g(x,x) \;\Leftrightarrow\; f(x,y) = g(x,y)\right).$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\text{Б}} A [x]_{\text{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(y,x), \\ g(x,y) = g(y,x) \end{cases} \Rightarrow \left(f(x,x) = g(x,x) \;\Leftrightarrow\; f(x,y) = g(x,y)\right).$$

Можно получить требуемое утверждение из критерия совпадения порожденных квадратичных форм, но мы воспроизведем приведенные выше рассуждения для нашего случая.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы. Пусть $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ и $g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ — такие симметричные билинейные формы, что $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы. Пусть $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ и $g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ — такие симметричные билинейные формы, что $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. Используя билинейность и симметричность, получаем

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы. Пусть $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ и $g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ — такие симметричные билинейные формы, что $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. Используя билинейность и симметричность, получаем

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]_{\mathbf{Б}}^t A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы. Пусть $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ и $g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ — такие симметричные билинейные формы, что $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. Используя билинейность и симметричность, получаем

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + g\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right).$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность матрицы A, то есть единственность соответствующей симметричной билинейной формы. Пусть $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ и $g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ — такие симметричные билинейные формы, что $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + 2g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right).$$

Поэтому $f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$. Однозначность доказана.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Осталось доказать существование такой симметричной матрицы A.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Осталось доказать существование такой симметричной матрицы A. Пусть f — билинейная форма, порождающая φ, то есть такая билинейная форма, для которой выполняется тождество $\varphi(x) = f(x, x)$.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство. Осталось доказать существование такой симметричной матрицы A. Пусть f — билинейная форма, порождающая φ, то есть такая билинейная форма, для которой выполняется тождество $\varphi(x) = f(x, x)$. Рассмотрим билинейную форму g, определенную равенством

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Заметим, что, во-первых, g порождает квадратичную форму φ,

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Заметим, что, во-первых, g порождает квадратичную форму φ, и, во-вторых, g — симметричная билинейная форма, то есть для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство $g(x, y) = g(y, x)$.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]_{\mathbf{Б}}^t A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Заметим, что, во-первых, g порождает квадратичную форму φ, и, во-вторых, g — симметричная билинейная форма, то есть для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство $g(x, y) = g(y, x)$. В самом деле, во-первых,

$$g(x, x) = \frac{1}{2}\Big(f(x, x) + f(x, x)\Big) = f(x, x) = \varphi(x).$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x,x), \qquad g(x,y) = \frac{1}{2}\Big(f(x,y) + f(y,x)\Big).$$

Во-вторых,

$$g(y,x) = \frac{1}{2}\Big(f(y,x) + f(x,y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(f(x,y) + f(y,x)\Big) = g(x,y).$$

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (о матрице квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Следовательно, во-первых, g порождает квадратичную форму φ, и, во-вторых, g — симметричная билинейная форма, то есть для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство $g(x, y) = g(y, x)$.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (**о матрице квадратичной формы**). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]_{\text{Б}}^t A [x]_{\text{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Следовательно, во-первых, g порождает квадратичную форму φ, и, во-вторых, g — симметричная билинейная форма, то есть для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство $g(x, y) = g(y, x)$.

Как известно, $g(x, y) = [x]_{\text{Б}}^t A [y]_{\text{Б}}$, где A — матрица билинейной формы g в **базисе** **Б**. При этом, очевидно, матрица A — симметричная, так как $a_{ji} = g(e_j, e_i) = g(e_i, e_j) = a_{ij}$.

IV.2. Лемма о матрице квадратичной формы

Лемма 2 (**о матрице квадратичной формы**). *Для любой квадратичной формы φ и любого* ***базиса*** **Б** *линейного пространства U найдется, причем единственная, такая симметричная матрица A, что $\varphi(x) = [x]_{\mathbf{Б}}^t A [x]_{\mathbf{Б}}$.*

Доказательство.

$$\varphi(x) = f(x, x), \qquad g(x, y) = \frac{1}{2}\Big(f(x, y) + f(y, x)\Big).$$

Следовательно, во-первых, g порождает квадратичную форму φ, и, во-вторых, g — симметричная билинейная форма, то есть для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство $g(x, y) = g(y, x)$.

Как известно, $g(x, y) = [x]_{\mathbf{Б}}^t A [y]_{\mathbf{Б}}$, где A — матрица билинейной формы g в **базисе** **Б**. Поэтому $\varphi(x) = g(x, x) = [x]_{\mathbf{Б}}^t A [x]_{\mathbf{Б}}$ для симметричной матрицы A, что и требовалось доказать.

IV.3. Матрица квадратичной формы

Определение 8. *Матрица A, существование которой обусловлено лемммой 2 о матрице квадратичной формы, называется* **матрицей квадратичной формы**.

IV.3. Матрица квадратичной формы

Определение 8. *Матрица A, существование которой обусловлено лемммой 2 о матрице квадратичной формы, называется* **матрицей квадратичной формы**.

Заметим, что теорема о матрице квадратичной формы сводит вычисление значения квадратичной формы на векторе $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ к вычислению значения многочлена от коэффициентов разложения вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ по **базису** **Б**.

IV.3. Матрица квадратичной формы

Теорема 4 (о квадратичной форме на языке многочленов). *Многочлен* $[x]_{\mathbf{Б}}^t A[x]_{\mathbf{Б}}$, *где* A *— матрица из леммы 2 о матрице квадратичной формы, является однородным многочленом степени 2, то есть формой степени 2.*

Доказательство предоставляется читателям в качестве упражнения.

IV.4. Теорема о преобразовании матрицы квадратичной формы

Теорема 5 (о преобразовании матрицы квадратичной формы). *Если A и A' — матрицы квадратичной формы φ в* ***базисах*** **Б** *и* **Б'** *соответственно, и $T = T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — матрица перехода, то имеет место равенство: $A' = T^t A T$.*

Доказательство.

IV.4. Теорема о преобразовании матрицы квадратичной формы

Теорема 5 (о преобразовании матрицы квадратичной формы). *Если A и A' — матрицы квадратичной формы φ в* ***базисах*** **Б** *и* **Б**’ *соответственно, и $T = T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — матрица перехода, то имеет место равенство: $A' = T^t A T$.*

Доказательство. Если T — матрица перехода из **базиса** **Б** в базис **Б**$'$, то, согласно теореме о координатах вектора в разных базисах, $[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}} = T[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}$. Поэтому

IV.4. Теорема о преобразовании матрицы квадратичной формы

Теорема 5 (о преобразовании матрицы квадратичной формы). *Если A и A' — матрицы квадратичной формы φ в* ***базисах*** **Б** *и* **Б**’ *соответственно, и $T = T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — матрица перехода, то имеет место равенство: $A' = T^t A T$.*

Доказательство. Если T — матрица перехода из **базиса** **Б** в базис **Б**$'$, то, согласно теореме о координатах вектора в разных базисах, $[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}} = T[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}$. Поэтому

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}}^t A [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}} = \left(T[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}\right)^t A T [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'} = [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}^t T^t A T [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'},$$

IV.4. Теорема о преобразовании матрицы квадратичной формы

Теорема 5 (о преобразовании матрицы квадратичной формы). *Если A и A' — матрицы квадратичной формы φ в* ***базисах*** **Б** *и* **Б'** *соответственно, и $T = T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — матрица перехода, то имеет место равенство: $A' = T^t A T$.*

Доказательство. Если T — матрица перехода из **базиса** **Б** в базис **Б'**, то, согласно теореме о координатах вектора в разных базисах, $[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}} = T[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}$. Поэтому

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}}^t A [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}} = \left(T[\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}\right)^t A T [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'} = [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'}^t T^t A T [\overrightarrow{\mathbf{x}}]_{\text{Б}'},$$

и, из доказанного ранее утверждения о единственности такой симметричной матрицы, получаем $A' = T^t A T$. Теорема о матрице квадратичной формы доказана.

IV.5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Одной и той же квадратичной форме в смысле теории **линейных пространств** обычно соответствует много квадратичных форм-многочленов: при переходе в другой **базис**, как правило, получаем другую квадратичную форму-многочлен. В то же время, в соответствии с принципом стандартизации, хотелось бы в этом «море вариантов» иметь «стабильные островки», стандартные типы квадратичных форм. Это позволит, в частности, осуществить полезную для многих приложений классификацию квадратичных форм. Существует несколько таких «стандартов», в связи с тем, что в разных приложениях возникают разные требования к допустимым преобразованиям **базисов**.

IV.5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Заметим, что необходимость в такой стандартизации возникает не только в теории квадратичных форм, сформулированной в терминах **линейных пространств**, но и в теории квадратичных форм-многочленов. В последнем случае вместо перехода из **базиса** в базис рассматриваются *преобразования переменных*. При этом наработанная ранее в теории **линейных пространств** система понятий эффективно работает и в этой, «чужой» области применения. В частности, можно говорить о *линейных* и об *ортогональных преобразованиях переменных*.

IV.5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Определение 9. *Говорят, что квадратичная форма* $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ *имеет в* ***базисе*** **Б канонический вид**, *если и только если* $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$. *Иными словами, матрица* $F_{\mathbf{Б}}$ *— диагональная.*

IV.5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Определение 9. *Говорят, что квадратичная форма* $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ *имеет в* ***базисе*** **Б** **канонический вид**, *если и только если* $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$. *Иными словами, матрица* $F_{\mathbf{Б}}$ *— диагональная.*

Итак, квадратичная форма имеет в **базисе** **Б** канонический вид тогда и только тогда, когда в ее выражении через координаты все коэффициенты перед «смешанными» слагаемыми[1] равны 0. Например, $x^2 + 2y^2 - 5z^2$ — квадратичная форма канонического вида, а $x^2 - 2y^2 + 2xz$ имеет не канонический вид, так как коэффициент перед xz не равен 0.

[1] Слагаемыми вида $x_i x_j$, где $i \neq j$.

IV.5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Теорема 6 (о приведении квадратичной формы к каноническому виду). *Если $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ — квадратичная форма, то существует такой* ***базис****, в котором матрица квадратичной формы диагональна, то есть в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.*

Доказательство мы приводить не будем, ограничимся примером.

IV.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Существует два способа приведения квадратичной формы к каноническому виду: метод Лагранжа и метод ортогонального преобразования.

Перейти к примеру?

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

В рассмотренных выше теоремах мы, в основном, применяли матричную алгебру для доказательства утверждений об операторах. Но, разумеется, с успехом осуществляется и «обратный процесс»: с помощью алгебры операторов доказываются утверждения для алгебры матриц. Одно из таких утверждений мы сейчас рассмотрим. Сначала отметим, что оказывается удобным перенести «операторную» терминологию на язык матриц, и ввести понятие нормальной, ортогональной и унитарной матрицы:

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

Используя тот факт, что матрица Грама ортонормированного **базиса** — единичная, можно дать чисто матричную характеризацию этих матриц: матрица A — *нормальная* тогда и только тогда, когда $A^tA = AA^t$; матрица *оргональная* (унитарная, эрмитова) тогда и только тогда, когда $A^t = A^{-1}$.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

С **базисом** **Б** линейного пространства U можно естественным образом связать скалярное произведение таким образом, что **Б** будет ОНБ получившегося евклидова пространства.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

С **базисом Б** линейного пространства U можно естественным образом связать скалярное произведение таким образом, что **Б** будет ОНБ получившегося евклидова пространства.

Можно, например, положить $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i.$

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

С вещественной квадратичной формой $\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ свяжем линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в ОНБ **Б** матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

С вещественной квадратичной формой $\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ свяжем линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в ОНБ **Б** матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. При этом, так как матрица оператора $\hat{A}$ в ОНБ **Б** симметрична, то $\hat{A}$ — самосопряженный.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

Следовательно, существует ОНБ из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. В **базисе** из собственных векторов матрица оператора диагональна.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

Следовательно, существует ОНБ из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. В **базисе** из собственных векторов матрица оператора диагональна. В этом **базисе** матрица квадратичной формы будет диагональна, так как закон преобразования матрицы квадратичной формы в данной ситуации совпадает с законом преобразования матрицы линейного оператора: $T^{-1}AT = T^tAT$.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

В самом деле, оператор $\hat{T}$ с матрицей T в **базисе Б** переводит исходный ОНБ в ОНБ (из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$), следовательно, он ортогональный. Именно поэтому $T^{-1} = T^t$.

IV.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Определение 10. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) тогда и только тогда, когда она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном* ***базисе***.

В самом деле, оператор $\hat{T}$ с матрицей T в **базисе Б** переводит исходный ОНБ в ОНБ (из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$), следовательно, он ортогональный. Именно поэтому $T^{-1} = T^t$.

Таким образом, заменяем задачу нахождения **базиса**, в котором матрица квадратичной формы диагональна на задачу нахождения **базиса**, в котором матрица линейного оператора диагональна.

IV.8. Теорема об ортогональном преобразовании квадратичной формы

Теорема 7 (об ортогональном преобразовании квадратичной формы). *Пусть φ — квадратичная форма, имеющая в* ***базисе*** **Б** *матрицу A. Тогда существует такой базис* **Б**$'$*, что, во-первых, матрица квадратичной формы в нем диагональна (то есть в базисе* **Б**$'$ *квадратичная форма φ имеет канонический вид), во-вторых на диагонали стоят в точности все* ***собственные значения*** *матрицы A (с учетом кратности), и, в третьих, матрица перехода из* **Б** *в* **Б**$'$ *ортогональна.*

Доказательство.

IV.8. Теорема об ортогональном преобразовании квадратичной формы

Теорема 7 (об ортогональном преобразовании квадратичной формы). *Пусть φ — квадратичная форма, имеющая в* ***базисе*** **Б** *матрицу A. Тогда существует такой базис* **Б**$'$*, что, во-первых, матрица квадратичной формы в нем диагональна (то есть в базисе* **Б**$'$ *квадратичная форма φ имеет канонический вид), во-вторых на диагонали стоят в точности все* ***собственные значения*** *матрицы A (с учетом кратности), и, в третьих, матрица перехода из* **Б** *в* **Б**$'$ *ортогональна.*

Доказательство. Матрица A квадратичной формы — симметричная, в частности, во-первых, она нормальная, и, во-вторых, все ее **собственные значения** вещественны.

IV.8. Теорема об ортогональном преобразовании квадратичной формы

Теорема 7 (**об ортогональном преобразовании квадратичной формы**). *Пусть* φ *— квадратичная форма, имеющая в* ***базисе*** **Б** *матрицу* A. *Тогда существует такой базис* **Б**$'$, *что, во-первых, матрица квадратичной формы в нем диагональна (то есть в базисе* **Б**$'$ *квадратичная форма* φ *имеет канонический вид), во-вторых на диагонали стоят в точности все* ***собственные значения*** *матрицы* A *(с учетом кратности), и, в третьих, матрица перехода из* **Б** *в* **Б**$'$ *ортогональна.*

Доказательство. Согласно **теореме об ортогональном преобразовании нормальной матрицы** существует такая ортогональная матрица T, что $D = T^{-1}AT$ — диагональная матрица. Так как T — ортогональная матрица, то $T^{-1} = T^t$, следовательно, $D = T^tAT$.

IV.8. Теорема об ортогональном преобразовании квадратичной формы

Теорема 7 (**об ортогональном преобразовании квадратичной формы**). *Пусть* φ *— квадратичная форма, имеющая в* ***базисе*** **Б** *матрицу* A. *Тогда существует такой базис* $\mathbf{Б}'$, *что, во-первых, матрица квадратичной формы в нем диагональна (то есть в базисе* $\mathbf{Б}'$ *квадратичная форма* φ *имеет канонический вид), во-вторых на диагонали стоят в точности все* ***собственные значения*** *матрицы* A *(с учетом кратности), и, в третьих, матрица перехода из* **Б** *в* $\mathbf{Б}'$ *ортогональна.*

Доказательство. $D = T^t A T$, где D — диагональная матрица. Значит, **базис**, в который матрица T переводит базис **Б**, является искомым. Теорема доказана.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Если рассматривать билинейную и квадратичную форму в смысле теории **линейных пространств**, то соответствующие многочлены являются одной из *форм представления* этих функций. При этом возникает естественный вопрос: какие особенности соответствующего многочлена являются следствием выбора конкретного **базиса**, а какие особенности не зависят от базиса, то есть являются свойствами *самой функции* (квадратичной или билинейной формы), а не ее представления. Аналогичная ситуация в теории линейных операторов привела к понятию **инварианта** линейного оператора.

Мы начнем с изучения особенностей многочленов, представляющих одну и ту же квадратичную форму в таких различных базисах, в которых эта форма имеет *канонический вид*.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Теорема 8 (закон инерции). *Если квадратичная форма* $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ *имеет в* ***базисах*** $\mathbf{Б} = \left\{ \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n \right\}$ *и, соответственно,* $\mathbf{Б}' = \left\{ \vec{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}'_n \right\}$ *канонический вид*

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{\mathbf{e}}_k\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2, \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x'_k \vec{\mathbf{e}}'_k\right) = \sum_{i=1}^{n} b'_i x_i'^2,$$

то в алгебраических выражениях $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i x_i'^2$ *количество положительных коэффициентов одинаково, то есть в списке коэффициентов* $b_1, \ldots, b_n$ *число положительных элементов совпадет с числом положительных элементов в списке* $b'_1, \ldots, b'_n$. *Одинаково и количество отрицательных коэффициентов. В обоих выражениях совпадает также количество нулевых коэффициентов.*

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' {x_i'}^2$. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i {x'_i}^2$. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b'_1 \geq b'_2 \geq \ldots \geq b'_q > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b'_n. \end{cases}$$

В самом деле, расположить соответствующие коэффициенты в порядке убывания можно, переставив местами векторы в соответствующем **базисе**. Перестановка векторов в базисе не изменит числа положительных, числа отрицательных и числа нулевых коэффициентов в соответствующих выражениях.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

По предположению $p < q$. Но тогда

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1', \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_q' \right\rangle \neq \left\{ \overrightarrow{\mathbf{0}} \right\},$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

По предположению $p < q$. Но тогда

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle \neq \left\{ \overrightarrow{\mathbf{0}} \right\},$$

то есть в этом пересечении найдется *ненулевой* вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_{n} \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q} \right\rangle.$$

С одной стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) =$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \varphi\left(0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_p + x_{p+1}\overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1} + \ldots + x_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right) =$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \varphi\left(0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_p + x_{p+1}\overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1} + \ldots + x_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right) =$$

$$= \underbrace{b_{p+1}}_{\leq 0} \underbrace{x_{p+1}^2}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{b_n}_{\leq 0} \underbrace{x_n^2}_{\geq 0} \leq 0.$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_{n} \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q} \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_{n} \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q} \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) =$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i {x'_i}^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b'_1 \geq b'_2 \geq \ldots \geq b'_q > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b'_n. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \varphi\left({x'}_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1 + \ldots + {x'}_q \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q+1} + \ldots + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_n\right) =$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i {x'_i}^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b'_1 \geq b'_2 \geq \ldots \geq b'_q > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b'_n. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \varphi\left({x'}_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1 + \ldots + {x'}_q \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q+1} + \ldots + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}'_n\right) =$$

$$= b'_1 {x'_1}^2 + \ldots + b'_q {x'_n}^2 \quad .$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i {x'_i}^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b'_1 \geq b'_2 \geq \ldots \geq b'_q > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b'_n. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны,

$$\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \varphi\left({x'}_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1 + \ldots + {x'}_q \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q+1} + \ldots + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_n\right) =$$

$$= b'_1 {x'_1}^2 + \ldots + b'_q {x'_n}^2 > 0.$$

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' {x_i'}^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_{n} \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{q} \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) > 0$.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Будем рассуждать «от противного»: пусть в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ число положительных коэффициентов меньше, чем в выражении $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i' x_i'^2$.

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p > 0 \geq b_{p+1} \geq \ldots \geq b_n \\ b_1' \geq b_2' \geq \ldots \geq b_q' > 0 \geq b_{q+1} \geq \ldots \geq b_n'. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\rangle \cap \left\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_q \right\rangle.$$

С одной стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$.

С другой стороны, $\varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) > 0$.

Таким образом, $0 < \varphi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \leq 0$, противоречие.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Доказательство. Утверждения в равенстве числа отрицательных коэффициентов в каждом из выражений $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} b'_j {x'_j}^2$ доказывается аналогично. Из этих двух доказанных утверждений следует совпадение количества нулевых коэффициентов в каждом из этих выражений.

Теорема доказана.

IV.9. Закон инерции квадратичной формы

Итак, мы обнаружили интересную особенность представления квадратичной формы в *каноническом виде*: в любом из таких представлений число слагаемых с положительными коэффициентами одно и то же. Теперь, разумеется, следует перейти к изучению общего случая, т.е. рассмотреть, какими особенностями обладает представление квадратичной формы в виде многочлена не обязательно канонического вида.

IV.10. Ранг квадратичной формы

Более многообещающим выглядит **ранг матрицы**.

IV.10. Ранг квадратичной формы

Более многообещающим выглядит **ранг матрицы**. Дело в том, что, согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах**, и **теореме об инвариантности рангов матрицы**, ранг матрицы квадратичной формы при переходе в другой **базис** не меняется. Поэтому

IV.10. Ранг квадратичной формы

Более многообещающим выглядит **ранг матрицы**. Дело в том, что, согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах**, и **теореме об инвариантности рангов матрицы**, ранг матрицы квадратичной формы при переходе в другой **базис** не меняется. Поэтому ранг матрицы квадратичной формы называется **рангом квадратичной формы**.

IV.10. Ранг квадратичной формы

Более многообещающим выглядит *ранг* матрицы. Дело в том, что, согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах**, и **теореме об инвариантности рангов матрицы**, ранг матрицы квадратичной формы при переходе в другой **базис** не меняется. Поэтому ранг матрицы квадратичной формы называется **рангом квадратичной формы**.

Теорема 9 (о ранге квадратичной формы). *Ранг квадратичной формы равен количеству ненулевых коэффициентов (перед неизвестными) в каноническом виде этой квадратичной формы.*

Доказательство следует из того факта, что матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной и, следовательно, ее ранг равен числу ненулевых коэффициентов.

IV.11. Положительно определенные квадратичные формы

Определение 11. *Квадратичная форма* $f : U \mapsto \mathbb{R}$ *называется* **положительно определенной** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in U$*, отличного от нулевого, имеет место неравенство* $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) > 0$.

IV.11. Положительно определенные квадратичные формы

Определение 11. *Квадратичная форма* $f : U \mapsto \mathbb{R}$ *называется* **положительно определенной** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in U$*, отличного от нулевого, имеет место неравенство* $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) > 0$.

Если в этом определении последнее неравенство заменить на $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) < 0$, то получим определение **отрицательно определенной формы**. Вопрос о том, когда квадратичная форма является положительно (или отрицательно) определенной, актуален в математическом анализе (достаточные признаки экстремума) и алгебре (скалярное произведение в евклидовом пространстве является положительно определенной квадратичной формой).

IV.11. Положительно определенные квадратичные формы

Определение 11. *Квадратичная форма* $f : U \mapsto \mathbb{R}$ *называется* **положительно определенной** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in U$*, отличного от нулевого, имеет место неравенство* $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) > 0$.

Определение 12. Главными минорами *квадратной матрицы* A *называются миноры, построенные на первых* k *строках и столбцах матрицы* A*, где* $1 \leq k \leq n$.

IV.11. Положительно определенные квадратичные формы

Теорема 10 (**критерий Сильвестра**). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Квадратичная форма* $\mathcal{H}(u_1, \ldots, u_n)$ *является положительно-определенной тогда и только тогда, когда в любом* ***базисе*** *все главные миноры матрицы* $H_{\text{Б}}$ *этой квадратичной формы положительны.*

2. *Квадратичная форма* $\mathcal{H}(u_1, \ldots, u_n)$ *является положительно-определенной тогда и только тогда, когда в некотором* ***базисе*** *все главные миноры матрицы* $H_{\text{Б}}$ *этой квадратичной формы положительны.*

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?