Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Линейные операторы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 (геометрические операторы) **6**

Пример 2 (запись матрицы оператора) **38**

Пример 3 (матрица оператора) **86**

Пример 4 (координаты образа вектора) **99**

Пример 5 (ядро оператора) **124**

Пример 6 (собственные векторы) **140**

Пример 7 (сопряженный оператор) **156**

Геометрическое решение 158

Координатное решение 170

Согласование результатов 203

Применение теоремы о координатах образа вектора **232**

Задача I.1 **232**

Задача I.2 **233**

Алгебра операторов **234**

Задача II.3 **234**

Задача II.4 **235**

Собственные векторы и собственные значения **236**

Задача III.5 **236**

Задача III.6 237

Диагонализация матрицы оператора 238

Задача IV.7 238

Задача IV.8 239

Сопряженный оператор 240

Задача V.9 240

Задача V.10 241

Нормальный оператор 242

Задача VI.11 242

Пример 1. *Задать формулой операторы*

1. $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования на ось вектора $\vec{\mathbf{a}}$ (рис.1**а)**).
2. $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{a}}$ (рис.2**а)**).
3. $\hat{P}_3$ проецирования пространства на ось вектора $\vec{\mathbf{a}}$ параллельно плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\mathbf{b}}$ (см. рис.1**б)**).
4. $\hat{P}_4$ проецирования параллельно $\vec{\mathbf{b}}$ на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{a}}$ (рис.2**б)**).
5. $\hat{P}_5$, сопоставляющий каждому вектору $\vec{\mathbf{x}}$ вектор $\vec{\mathbf{y}}$, симметричный относительно оси с направляющим вектором $\vec{\mathbf{a}}$.
6. $\hat{P}_6$, сопоставляющий каждому вектору $\vec{\mathbf{x}}$ вектор $\vec{\mathbf{y}}$, симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\mathbf{a}}$.

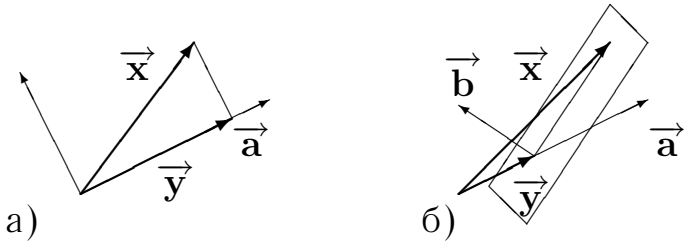

Рис. 1. а) $\vec{y}$ — ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на ось вектора $\vec{a}$;
б) $\vec{y}$ — проекция вектора $\vec{x}$ на ось вектора $\vec{a}$ параллельно плоскости с нормальным вектором $\vec{b}$.

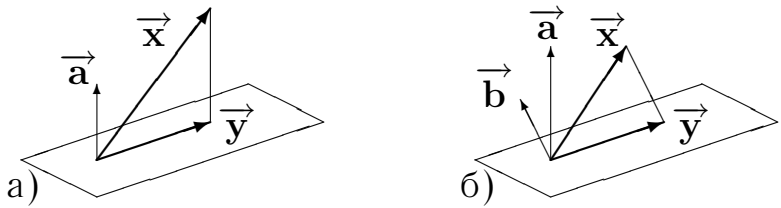

Рис. 2. а) $\vec{y}$ — ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость с нормальным вектором $\vec{a}$;
б) $\vec{y}$ — проекция вектора $\vec{x}$ параллельно вектору $\vec{b}$ на плоскость с нормальным вектором $\vec{a}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. Мы, разумеется, воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(см. рис.1***а***)).*

Решение. «Что надо найти»:

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(см. рис.1***a***)).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(см. рис.1***а***)).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»:

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций[1], определенных на множестве векторов, а также обозначения исходного вектора и $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

[1] например, скалярное произведение и модуль вектора.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\vec{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» —

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» — обозначим образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Остальные переменные, как обычно, будем вводить по мере необходимости. Тот факт, что $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ является проекцией вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ коллинеарны, то есть, по критерию коллинеарности, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Следовательно, осталось найти значение λ.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» — обозначим образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, переменную λ ведем равенством $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«Составить уравнения».

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» — обозначим образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, переменную λ ведем равенством $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«Составить уравнения». Тот факт, что $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ является *ортогональной* проекцией вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» — обозначим образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, переменную λ ведем равенством $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«Составить уравнения». Критерий ортогональности позволяет вычислить двояким образом скалярное произведение: с одной стороны, с помощью линейности скалярного произведения и, с другой стороны, по критерию ортогональности оно равно 0: $\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = 0.$

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_1$ ортогонального проецирования пространства на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.1 **а)***).*

Решение. «Что надо найти»: надо вычислить проекцию вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«В каком виде представим ответ»: выражением, использующим обозначения операций и функций.

«Сведем к нахождению значений величин и ввести переменные» — обозначим образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, переменную λ ведем равенством $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

«Составить уравнения». Итак, получили систему уравнений $\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = 0 \end{cases}$. Отсюда получаем ответ: $\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору* $\vec{\mathbf{a}}$ *(см. рис.2***a***)).*

Решение.

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Решение. Линейность докажите самостоятельно. Теперь найдем нужную формулу. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Решение. Линейность докажите самостоятельно. Теперь найдем нужную формулу. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Первый и второй этапы повторяют то, что мы делали для **оператора** $\hat{P}_1$.

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Обозначим через $\vec{\mathbf{y}}$ образ вектора $\vec{\mathbf{x}}$. Сначала попытаемся свести нахождение вектора $\vec{\mathbf{y}}$ к нахождению значения параметра.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2$\mathbf{a}$*)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Осталось составить уравнение.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2$\mathbf{a}$*)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Тот факт, что проекция лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярны.

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Тот факт, что проекция лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярны. Это позволяет двояким образом вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2$\mathbf{a}$*)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Тот факт, что проекция лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярны. Это позволяет двояким образом вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Окончательно получаем систему уравнений $\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \end{cases}$

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Тот факт, что проекция лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярны. Это позволяет двояким образом вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Окончательно получаем систему уравнений $\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = 0. \end{cases}$

Пример 1.

*Задать формулой оператор $\hat{P}_2$ ортогонального проецирования пространства на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис.2**a**)).*

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ образ вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Тот факт, что проецирование производится параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, означает, что $\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Тот факт, что проекция лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ означает, что вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ перпендикулярны. Это позволяет двояким образом вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Окончательно получаем систему уравнений $\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = 0. \end{cases}$

Следовательно, $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1* **б)***).*

Решение.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1* **б)***).*

Решение. $\hat{P}_3\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_4$ *проецирования параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(см. рис.2* **б)***)*

Решение.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_4$ *проецирования параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(см. рис.2* **б)***)*

Решение. $\hat{P}_4\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{b}}.$

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_5$, сопоставляющий каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, симметричный относительно оси с направляющим вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Решение.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_5$, сопоставляющий каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, симметричный относительно оси с направляющим вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Решение. $\hat{P}_5\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 2\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{x}}.$

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_6$*, сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$*, симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*.*

Решение.

Пример 1.

Задать формулой оператор $\hat{P}_6$, сопоставляющий каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Решение. $\hat{P}_6\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - 2\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$

Вернуться к лекции по линейным операторам?

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) =$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h \quad u \ +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h\ {}_s u\ +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h\ {}_s u_1 +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h\ _s u\ \ +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h\ _s u\ =$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 =$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h \quad u$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h\ _s u$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{\ s}u_t$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L \quad p + L \quad q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L\ _1p + L\ _1q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L\ _1q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L\ _1q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$ $\quad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$ $\qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$ $\qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L\quad p + L\quad q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L\ _2p + L\ _2q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L_{12}p + L_{22}q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L_{12}p + L_{22}q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q\ \ X + q\ \ Y + q\ \ Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{\ 1}X + q_{\ 1}Y + q_{\ 1}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q\quad X + q\quad Y + q\quad Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q\ _2X + q\ _2Y + q\ _2Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q\quad X + q\quad Y + q\quad Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q\ _3X + q\ _3Y + q\ _3Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g \quad L_1 + g \quad L_2 + g \quad L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{\ 1}L_1 + g_{\ 1}L_2 + g_{\ 1}L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g\ _1L_2 + g\ _1L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g\ _1L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = \\ \hat{G}(Z) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & & \\ g_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\boldsymbol{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(Z) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & & \\ g_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\boldsymbol{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(Z) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(Z) = g_{13}L_1 + g_{23}L_2 + g_{33}L_3. \end{cases} \qquad G_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\boldsymbol{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{cases} \hat{G}(X) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(Y) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(Z) = g_{13}L_1 + g_{23}L_2 + g_{33}L_3. \end{cases} \qquad G_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Вернуться к лекции?

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение.

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. Линейность оператора следует из определения: если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены из U и λ, μ — вещественные числа, то, по свойству дифференцирования, $\hat{L}\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) =$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(\lambda f(x) + \mu g(x)) - 2(x+1)\frac{d}{dx}(\lambda f(x) + \mu g(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(\lambda f(x) + \mu g(x)) - 2(x+1)\frac{d}{dx}(\lambda f(x) + \mu g(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

$$= (x+1)^2 (\lambda f''(x) + \mu g''(x)) - 2(x+1)(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= \lambda \left((x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x) \right) +$$

$$+\mu \left((x+1)^2 g''(x) - 2(x+1) g'(x) + 2g(x) \right) =$$

$$= \lambda \hat{L}(f(x)) + \mu \hat{L}(g(x)).$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= \lambda \hat{L}(f(x)) + \mu \hat{L}(g(x)).$$

Линейность оператора $\hat{L}$ доказана. Теперь найдем его матрицу.

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. Удобный базис этого пространства мы уже находили при решении **примера на поиск ортонормированного базиса**: $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы нашли первый столбец матрицы $\hat{L}_{\mathbf{Б}}$. Для второго и третьего базисных векторов получаем

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(x) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}(x)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(x) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}(x)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2 \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2\,(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2 \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2\,(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2 \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вернуться к лекции, или рассмотреть следующий пример?

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$; б) ***матрицу этого линейного оператора****; в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя* ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: \ U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$\hat{A}(x-1) =$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 0 \\ (-1-1) & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 0 \\ (-1-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 0 \\ (-1-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: \ U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 0 \\ (-1-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} \left(1^2-1\right) & (2 \cdot 1) \\ \left((-1)^2-1\right) & (2 \cdot (-1)) \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 0 \\ (-1-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} (1^2-1) & (2\cdot 1) \\ ((-1)^2-1) & (2\cdot(-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Отметим некорректность поставленной задачи: нельзя говорить о матрице оператора, не указывая соответствующие базисы.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V:

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$,

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}, \quad \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$, $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. В соответствии с **определением матрицы линейного оператора** надо найти координаты образов базисных векторов.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Получаем, согласно определению оператора $\hat{A}$,

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Получаем, согласно определению оператора $\hat{A}$,

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому первый столбец матрицы $A_{\mathbf{Б},\mathbf{В}}$ равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Аналогично для второго и третьего столбцов получаем

$$\hat{A}\,(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Аналогично для второго и третьего столбцов получаем

$$\hat{A}\,(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\,(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\left(x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\left(x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A_{\mathbf{Б},\mathbf{В}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \ \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$=$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \ \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \ \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\hat{A}(x-1) =$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Это совпадает с **полученным ранее ответом**.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. Решая пример 3, мы нашли матрицу этого оператора в базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Применим стратегию составления уравнений.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.
В каком виде представим ответ?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные. Всякое множество определяется только своими элементами, поэтому надо сначала взять произвольный элемент $f(x) \in \operatorname{Ker} \hat{L}$. Разложим этот элемент по базису **Б**, и *обозначим координаты буквами*: $f(x) = ax^0 + bx + cx^2$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $\text{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Составим систему уравнений. По определению ядра, образ многочлена $f(x)$ — нулевой. По **теореме о координатах образа вектора** получаем, с одной стороны,

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\textbf{Б}} = L_{\textbf{Б}}\,[f(x)]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Составим систему уравнений. По определению ядра, образ многочлена $f(x)$ — нулевой. **По теореме о координатах образа вектора** получаем, с одной стороны,

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\mathbf{Б}} = L_{\mathbf{Б}}\,[f(x)]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

с другой стороны (второй способ вычисления образа, по определению ядра),

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Таким образом, получили матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе из одного уравнения $a - b + c = 0$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, получили матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе из одного уравнения $a - b + c = 0$.

Фундаментальная система решений этой системы линейных уравнений находится буквально «в уме»: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Одна из фундаментальных систем решений системы линейных уравнений, задающей образ ядра оператора $\hat{L}$, имеет вид: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, **ядро** оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

Для вектора $1 + x$ имеем

$$\hat{L}\,(1 + x) = (x+1)^2 \cdot (1 + x)'' - 2(x+1) \cdot (1 + x)' + 2 \cdot (1 + x) = 0 - 2(x+1) + 2(1-$$

то есть $\hat{L}\,(1 + x) = \mathbf{0}$, откуда следует по определению ядра оператора, что $1 + x$ — вектор из ядра.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

$$\hat{L}\left(x + x^2\right) = (x+1)^2 \cdot \left(x + x^2\right)'' - 2(x+1) \cdot \left(x + x^2\right)' + 2 \cdot \left(x + x^2\right) =$$
$$= 2(x+1)^2 - 2(x+1)(1+2x) + 2(1+x)\left(x + x^2\right) \equiv 0.$$

Таким образом, $\hat{L}\left(x + x^2\right) = \mathbf{0}$, что означает $x + x^2 \in \operatorname{Ker} \hat{L}$.

Вернуться к лекции?

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных значений:

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных значений:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных значений:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Его корни являются собственными значениями этого оператора, поэтому **спектр** оператора $\hat{L}$ равен $\operatorname{spec} \hat{L} = \{0_2, 2_1\}$ (на месте индекса указана кратность соответствующего корня).

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных значений:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Заметим, что

множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению 0 отличается от ядра оператора только на нулевой вектор.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных значений:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Ядро оператора $\hat{L}$ мы нашли, решая пример 5, поэтому всякий **собственный вектор** оператора $\hat{L}$, отвечающий собственному значению 0, является <u>ненулевой</u> линейной комбинацией векторов $1 + x$ и $x + x^2$.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2. Для этого запишем уравнение для нахождения собственного вектора для данного случая:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2. Для этого запишем уравнение для нахождения собственного вектора для данного случая:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Следовательно, **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2, имеют вид Cx^0, где C — произвольное <u>ненулевое</u> вещественное число.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. Кстати, можно было сразу увидеть, что x^0 является собственным вектором, отвечающим собственному значению 2. Действительно, при вычислении матрицы оператора $\hat{L}$ при решении примера 3, мы находили образ вектора x^0, и получили $\hat{L}(x^0) = 2x^0$, то есть x^0 отвечает собственному значению 2.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Задача решена, но мы сейчас сделаем еще кое-что. А именно, найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе из собственных векторов **Б'** $= \left\{1+x,\ x+x^2,\ x^0\right\}$. Для этого надо найти образы базисных векторов. Имеем

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2 \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2 \cdot 2 - (x+1)\,(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 2 \cdot x^0.$$

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2 \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2 \cdot 2 - (x+1)(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 2 \cdot x^0.$$

Следовательно, получили $L_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 6. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2 \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2 \cdot 2 - (x+1)(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 2 \cdot x^0.$$

Следовательно, получили $L_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Обратите внимание на то, что эта матрица — диагональная. Случайно ли это? Мы обсудим это в следующем разделе.

Вернуться к лекции?

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости*[2] U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Решение.

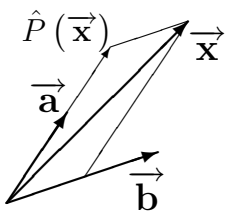

Рис. 3.

[2]т.е. двумерного линейного пространства геометрических векторов.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Решение. Можно предложить, как минимум, два способа решения: во-первых, решение геометрическое и, во-вторых, стандартное решение, с помощью перехода в «пространство координат», в линейное пространство $\mathbb{R}^2$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. Главный недостаток этого решения состоит в том, что оно основано на значительно менее «стандартизованном» математическом аппарате, в частности, не очень понятно даже, *как* «геометрически» задать искомый оператор $\hat{P}^*$ (что вызывает трудности с использованием **стратегии составления уравнений**). Поэтому это решение будет «эвристическим», что выражается, в частности, в обильном использовании фразы «заметим, что».

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. Итак, сначала *заметим, что* оператор $\hat{P}^*$ не нулевой и не тождественный, так как

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \neq 0,$$

то есть $\hat{P}^* \neq \hat{0}$ и

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \neq \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right),$$

откуда $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \neq \overrightarrow{\mathbf{b}}$, то есть $\hat{P}^*$ действует на U не тождественно.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. *Заметим, что* $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поэтому для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогонален к $\hat{P}^*(U)$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. *Заметим, что* $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поэтому для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогонален к $\hat{P}^*(U)$. Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ какой-либо ненулевой вектор из $\hat{P}^*(U)$. Заметим, что $\hat{P}^*(U) = \langle\overrightarrow{\mathbf{c}}\rangle$, то есть $\langle\overrightarrow{\mathbf{c}}\rangle$ является $\hat{P}^*$-инвариантным подпространством. Следовательно,

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

Заметим, что по определению оператора $\hat{P}$ имеем $\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{a}}$. Следовательно, для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right).$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right).$$

Получили равенство

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \tag{3}$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \tag{3}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right) \Leftrightarrow 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Положим в последнем равенстве $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. Получаем, в силу равенства (2), что

$$0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}}\right).$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

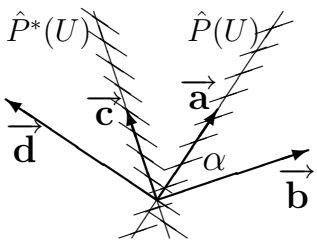

Рис. 4.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \qquad (3)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0, \qquad \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0.$$

$\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, поэтому он не ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (иначе $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогональны к $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, но $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ не коллинеарны, см. **рис.4**).

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

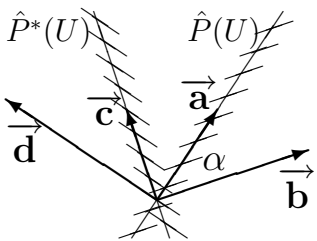

Рис. 4.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \qquad (3)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0, \qquad \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0.$$

$\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, поэтому он не ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (иначе $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогональны к $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, но $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ не коллинеарны, см. **рис.4**).

Значит, $(\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то есть $\lambda = 1$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. Итак, вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}} \in \hat{P}^*(U)$ является собственным для оператора $\hat{P}^*$, отвечающим собственному значению 1. Согласно **критериям вырожденности оператора**, в силу

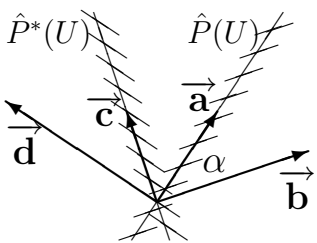

Рис. 4.

$$1 = \dim\left(\hat{P}^*(U)\right) = \mathrm{Rg}\left(\hat{P}^*\right) < \dim(U) = 2,$$

имеем, что **ядро** оператора $\hat{P}^*$ ненулевое. Значит, $\hat{P}^*$ — оператор проецирования на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$. Осталось понять, параллельно какому вектору осуществляется проецирование.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

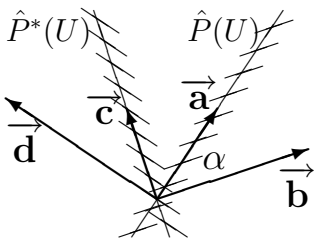

Рис. 4.

И опять «заметим, что». Оказывается, что проецирование осуществляется параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, ортогональному вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. В самом деле, $\hat{P}^*(U) = \langle \overrightarrow{\mathbf{c}} \rangle$, поэтому $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \mu\,\overrightarrow{\mathbf{d}}$. Следовательно,

$$0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right)\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \mu\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right).$$

Поскольку $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) \neq 0$, то $\mu = 0$, то есть $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, что и требовалось доказать.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

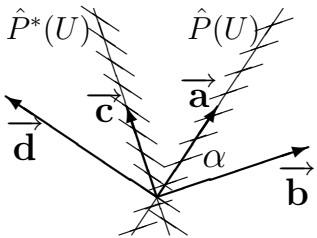

Рис. 4.

Итак, $\hat{P}^*$ — оператор проецирования на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, где $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ?

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ? Укажем **матрицу оператора**[3] в некотором базисе.

[3]Обратите внимание, ответ будет бессмысленным, если мы укажем матрицу *без указания базиса!*

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ? Укажем **матрицу оператора** в некотором базисе.

Введем переменные или найдем матрицу конструктивно.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. *Введем переменные или найдем матрицу конструктивно*. Разумеется, сначала **надо ввести базис**. Например, положим $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} \right\}$. Этот базис плох тем, что он не ортонормированный. С другой стороны, можно рассчитывать на то, что в этом базисе нам будет сравнительно легко находить координаты интересующих нас векторов.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Мы хотим воспользоваться **формулой для матрицы сопряженного оператора**. Для этого надо найти **матрицу оператора** $\hat{P}$ и **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$. Последнее не составляет труда, так как согласно определению **скалярного произведения для геометрических векторов**, имеем

$$\begin{cases} \gamma_{11} = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha, \\ \gamma_{22} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2. \end{cases}$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{cases} \gamma_{11} = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha, \\ \gamma_{22} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2. \end{cases}$$

то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Итак,

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

При транспонировании эта матрица не изменится, поэтому эта матрица является присоединенной к $\Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\vec{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\vec{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\vec{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\vec{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\vec{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\vec{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\vec{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\vec{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения детерминанта матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ можно вычислить диагональные элементы произведения полученной матрицы на $\Gamma_{\mathbf{Б}}$, но здесь это проще сделать «по честному».

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\left|\Gamma_{\mathbf{Б}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) =$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} =$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} =$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь с помощью **соответствующей формулы** находим матрицу сопряженного оператора:

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} =$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^3 \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^3 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Как этот результат согласуется с **геометрическим описанием** действия оператора $\hat{P}^*$?

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и 1, поскольку

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\vec{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\vec{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е. $\hat{P}\left(\vec{\mathbf{b}}\right) = \vec{\mathbf{0}} =$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е. $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и **1**, поскольку $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} =$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и **1**, поскольку $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и 1.

Проверим...

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} = 0.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} = 0.$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} = 0.$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 0:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 0:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha = 0.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0,$$

т.е. **собственный вектор** $\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$, отвечающий собственному значению 0, ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Это согласуется с результатом, полученным **геометрическим способом**.

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix},$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad u\vec{\mathbf{a}} + v\vec{\mathbf{b}} = \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \vec{\mathbf{a}} - \left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \vec{\mathbf{b}}.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 =$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 = 0.$$

Пример 7. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\vec{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\vec{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\vec{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 1 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix} = \left[\left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \vec{\mathbf{a}} - \left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \vec{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\vec{\mathbf{b}};\ \left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \vec{\mathbf{a}} - \left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) = 0,$$

т.е. **собственный вектор** $\left(\left|\vec{\mathbf{b}}\right| \cdot \vec{\mathbf{a}} - \left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \vec{\mathbf{b}}\right)$, отвечающий собственному значению 1, ортогонален вектору $\vec{\mathbf{b}}$. Это согласуется с результатом, полученным **геометрическим способом**.

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.245.) На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.294.) На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.323.) На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.331.) На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.347.) На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.357.) Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Задача IV.7. (Ответ приведен на стр.363.) На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Задача IV.8. (Ответ приведен на стр.385.) Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.392.) Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.415.) На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\quad x + y \leq 0$.

Задача VI.11. (Ответ приведен на стр.424.) Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t, \quad \hat{D}e^{-2t} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\quad \hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\quad \hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\quad \hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} = [1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} = [1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} = [1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = [e^{-2t}]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = [e^{-2t}]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = [e^{-2t}]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = [e^{-2t}]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$=$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} = \mathbf{e}^{\mathbf{t}}$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{e}^{\mathbf{t}}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\mathbf{\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\mathbf{\hat{D}e^{-2t}} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{-2e^{-2t}}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{\mathbf{D}}\left(\mathbf{5e^t - e^{-2t}}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\boldsymbol{\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,
$\boldsymbol{\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)} = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = \boldsymbol{5e^t + 2e^{-2t}}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{\mathbf{D}}\left(\mathbf{e^t + e^{-2t} + t - 2}\right) = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\boldsymbol{\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1}$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,

$\boldsymbol{\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)} = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = \boldsymbol{5e^t - 2e^{-2t} + 1}$,

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t - 2e^{-2t} + 1$,
$\hat{\mathbf{D}}\left(\mathbf{e^t} + \mathbf{t}\right) = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 1. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\boldsymbol{\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1}$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t - 2e^{-2t} + 1$,
$\boldsymbol{\hat{D}\left(e^t + t\right)} = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{e^t + 1}$.

Решение задачи 2.

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. по **определению координат вектора**

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left(\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x\right) = (2-x) = 2\cdot x^0 + (-1)\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = (2-x)^2 = 4\cdot x^0 + (-4)\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)_{\textbf{Б}} = A_{\textbf{Б}} + B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Задача 3. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{\textbf{Б}} = A_{\textbf{Б}}\cdot B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Решение задачи 4.

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 2 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 2 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Аналогично можно найти **матрицу оператора** $\hat{B}$:

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Аналогично можно найти **матрицу оператора** $\hat{B}$:

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A + B)_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A + B)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} + B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\,(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}\,(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A \cdot B)_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}, \hat{B}, \quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right), \quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A \cdot B)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} \cdot B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 5.

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1\cdot x^0 + 0\cdot x - 8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1\cdot x^0 + 0\cdot x - 8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0\cdot x^0 - 13\cdot x + 0\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1\cdot x^0 + 0\cdot x - 8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0\cdot x^0 - 13\cdot x + 0\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^2 - 8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[-16\cdot x^0 + 0\cdot x + 9\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1\cdot x^0 + 0\cdot x - 8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0\cdot x^0 - 13\cdot x + 0\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^2 - 8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[-16\cdot x^0 + 0\cdot x + 9\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-7), имеет вид $\left\{C\left(2+x^2\right) \,\middle|\, C \neq 0\right\}$.

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Теперь найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 17:

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & -16 \\ 0 & -30 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению 17, имеет вид $\left\{D\left(1-x^2\right) \,\middle|\, D \neq 0\right\}$.

Задача 5. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Наконец, найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-13):

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-13), имеет вид $\left\{Fx \,\middle|\, F \neq 0\right\}$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену x^0. Собственному значению (-1) соответствуют векторы, пропорциональные многочлену

Задача 6. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену x^0. Собственному значению (-1) соответствуют векторы, пропорциональные многочлену $(x - x^0)$.

Решение задачи 7.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис:

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти?

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?*

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.*

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?*

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?* Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.
Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?* Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

$$\left[h_{11}\frac{\partial}{\partial x}+h_{21}\frac{\partial}{\partial y}+h_{31}\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow$$

$$h_{11}yz+h_{21}xz+h_{31}xy=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow\ \begin{cases}h_{11}=-5,\\ h_{21}=4,\\ h_{31}=-8.\end{cases}$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

$$\left[h_{11}\frac{\partial}{\partial x}+h_{21}\frac{\partial}{\partial y}+h_{31}\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow$$

$$h_{11}yz+h_{21}xz+h_{31}xy=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow\ \begin{cases} h_{11}=-5,\\ h_{21}=4,\\ h_{31}=-8.\end{cases}$$

Аналогично находим остальные коэффициенты матрицы $H_{\mathbf{Б}}$ (вычисляя двумя способами сначала $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)$ и затем $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)$).

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем характеристический полином:

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 & 2 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ -8 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 2\\ 4 & 1 & -2\\ -8 & -4 & 3\end{pmatrix}$. Характеристический полином $-(\lambda-1)(\lambda+1)^2$.

Находим **собственные векторы** для $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -2\\ -8 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -2\\ -8 & -4 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\ \bullet\\ \bullet\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}}.$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 2\\ 4 & 1 & -2\\ -8 & -4 & 3\end{pmatrix}$.

Находим **собственные векторы** для $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 4 & 2 & -2\\ -8 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 4 & 2 & -2\\ -8 & -4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \bullet & \bullet\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}}\right)$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Проверку проведем только для первого базисного вектора. В координатной форме получаем $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right]_{\mathbf{Б}}=$

$$=\begin{pmatrix}-5&-2&2\\4&1&-2\\-8&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Другой способ проверки: с одной стороны, вычисляя с использованием характеристического свойства оператора $\hat{H}$, получаем $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=$

$$=\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)-\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)+2\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=$$

$$=-8xy+4xz-5yz-(-4xy+xz-2yz)+2(3xy-2xz+2yz)=$$

$$=2xy-xz+yz.$$

Задача 7. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Другой способ проверки: с одной стороны, вычисляя с использованием характеристического свойства оператора $\hat{H}$, получаем $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=2xy-xz+yz$.

С другой стороны,

$$1\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz)=yz-xz+2xy.$$

Очевидно, что из совпадения рассматриваемых операторов на xyz следует их совпадение. Проверка «как бы закончена» (мы не проверили вторым способом правильность нахождения второго и третьего базисных векторов).

Решение задачи 8.

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристический полином равен

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристический полином равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$)

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристический полином равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристический полином равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Собственному значению $\lambda = 9$ соответствуют ненулевые векторы, пропорциональные вектору

Задача 8. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристический полином равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Собственному значению $\lambda = 9$ соответствуют ненулевые векторы, пропорциональные вектору $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 9.

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Мы приведем 2 решения: решение, полностью основанное на алгебре многочленов, и стандартное решение, связанное с переходом «в пространство координат».

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $t = 1 - x$, получим

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $t = 1 - x$, получим

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\, (-1) dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\,(-1)dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

В левой части последнего равенства переменную интегрирования t заменим на x, получим

$$\int\limits_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx,$$

то есть можно положить $\hat{P}^*\left(g(x)\right) = g(1-x)$. Следовательно, $\hat{P}^* = \hat{P}$, то есть оператор $\hat{P}$ — самосопряженный.

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\Big(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\Big) = \Big(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\Big)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\,(-1)dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx,$$

то есть можно положить $\hat{P}^*\left(g(x)\right) = g(1-x)$. Следовательно, $\hat{P}^* = \hat{P}$, то есть оператор $\hat{P}$ — самосопряженный.

Этот метод дал ответ быстро, но это достигнуто за счет некоторой нестандартности решения, его «эвристичности». Далеко не всегда можно за разумное время получить «хорошую» формулу для сопряженного оператора, точнее, для нахождения образа вектора. Поэтому мы продемонстрируем второй, стандартный, способ.

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\Big[\hat{P}\left(x(x-1)\right)\Big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1 \cdot x(x-1) + 0 \cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\Big[\hat{P}\left(x(x-1)\right)\Big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1 \cdot x(x-1) + 0 \cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Big[\hat{P}\left(x^2(x-1)\right)\Big]_{\mathbf{Б}} = \big[(1-x)^2(1-x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1 \cdot x(x-1) - 1 \cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\Big[\hat{P}\,(x(x-1))\Big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1\cdot x(x-1) + 0\cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Big[\hat{P}\,\big(x^2(x-1)\big)\Big]_{\mathbf{Б}} = \big[(1-x)^2(1-x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1\cdot x(x-1) - 1\cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \Big(x(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^2\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \Big(x(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^2\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \Big(x^2(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^3\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60},$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \Big(x(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^2\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \Big(x^2(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^3\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60},$$

$$\gamma_{22} = \Big(x^2(x-1); x^2(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^4\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{105},$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{30}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{60}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{105},$$

то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{1}{105} - \left(\dfrac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{1}{105} - \left(\dfrac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

$$= 30\cdot 15\cdot 7\cdot 8 \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/140 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{1}{105} - \left(\dfrac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathbf{Б}}.$$

Задача 9. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathbf{Б}}.$$

На первый взгляд, сравнение с первым решением не в пользу второго решения. Но бóльшая часть трудностей связана с переходом в «пространство координат» (пространство $\mathbb{R}^2$), зато после этого оператор можно задавать стандартным образом — с помощью матрицы — и вычисление матрицы сопряженного оператора представлет собой рутинную процедуру.

Решение задачи 10.

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$L^* =$

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$L^* = \frac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot 18 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

Задача 10. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$L^* = \frac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot 18 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 13 \\ 14 & -9 & -56 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Значит, **спектр** оператора $\hat{L}$ имеет вид

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Значит, **спектр** оператора $\hat{L}$ имеет вид $\mathrm{Spec}\hat{L} = \{0_1;\ 1_2\}$.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.

Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Для того, чтобы найти вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1), воспользуемся **формулой для вычисления скалярного произведения**.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.

Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Для того, чтобы найти вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1), воспользуемся **формулой для вычисления скалярного произведения**.

Для этого надо найти **матрицу Грама** в базисе **Б** (у нас пока нет другого).

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & ? & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & ? & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти?

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ?

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.
Получим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.
Получим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно, скалярные произведения с векторами $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \\ 1 & \\ 0 & \end{pmatrix} = (0\quad).$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

$$\begin{cases} \beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha + 5\beta + 22\gamma = 0. \end{cases}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

$$\begin{cases} \beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha + 5\beta + 22\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем, что $-2 - 4x + x^2$ — ненулевой вектор из ядра.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе **Б** $= \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе **Б** $= \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\textbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20} \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 14 & -17 & 3 \\ -17 & 21 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 26 \\ 6 & 26 & 116 \end{pmatrix}} =$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Итак матрица сопряженного оператора равна:

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L_{\mathbf{Б}}.$$

Значит,

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Итак матрица сопряженного оператора равна:

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L_{\mathbf{Б}}.$$

Значит, согласно **теореме об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц** $\hat{L}^* = \hat{L}$, т.е. оператор $\hat{L}$ — самосопряженный.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе **Б** $= \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис **В** $= \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе **В** имеет вид .

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$ — единичная. Значит, **матрица оператора** $\hat{L}^*$ равна

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$ — единичная. Значит, **матрица оператора** $\hat{L}^*$ равна
$L^*_{\mathbf{B}} = L^t_{\mathbf{B}} = L_{\mathbf{B}}$.

Задача 11. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Задача решена.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?