Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Бином Ньютона и «треугольник Паскаля»

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Введение **3**

II. «Треугольник Паскаля» **4**

II.1. Построение «треугольника Паскаля» 5

II.2. Использование «треугольника Паскаля» 35

III. Бином Ньютона **55**

I. Введение

В математических исследованиях нередко возникает необходимость представить выражение $(a+b)^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в виде суммы выражений вида $\alpha_{k,m} a^k b^m$, где $\alpha_{k,m}$ — некоторый коэффициент. Для этого обычно применяется один из двух способов: метод, основанный на «**треугольнике Паскаля**» и использование формулы «**бинома Ньютона**».

II. «Треугольник Паскаля»

Сначала рассмотрим **построение «треугольника Паскаля»**, а потом — его **использование для преобразования** выражения $(a+b)^n$.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

«Треугольник Паскаля» представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону (который мы сейчас опишем) таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник. Например, мы изобразили первые 6 строк «треугольника Паскаля».

Слева от вертикальной черты мы указали номер строки, причем нумерацию строк мы начали с 0.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Рассмотрим процесс построения «треугольника Паскаля».

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0 | 1

Сначала на «вершину» «треугольника Паскаля» поместим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0		1
1	1	

На левой «стороне» «треугольника Паскаля» запишем 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

| | | |

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

| | | |

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			**1**		**1**	
2		1		2		

Следующий элемент строки «треугольника Паскаля» представляет собой сумму элементов предыдущей строки, находящихся над ним слева и справа. Эти элементы предыдущей строки выделены пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

| | | |

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		2		1	
3	1						

Итак, процедура построения очередной строки — «нижней стороны» «треугольника Паскаля» начинается с того, что на место крайнего левого элемента ставим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		**2**		1	
3	1		3				

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		**2**		**1**	
3	1		3		3		

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1

Последний элемент строки равен 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		**1**		3		3		1	
4	1								

Итак, на место крайнего левого элемента ставим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1			
1					1		1		
2				1		2		1	
3			**1**		**3**		3		1
4		1		4					

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		**3**		**3**		1	
4	1		4		6				

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		**3**		**1**	
4	1		4		6		4		

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4	1		4		6		4		1

Крайний правый элемент строки вновь делаем равным 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		4		6		4		1	
5	1										

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		**4**		6		4		1	
5	1		5								

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		**4**		**6**		4		1	
5	1		5		10						

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		**6**		**4**		1	
5	1		5		10		10				

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		**4**		**1**	
5	1		5		10		10		5		

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		**1**		5		10		10		5		1
6	1											

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		**1**		**5**		10		10		5		1
6	1		6									

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		**5**		**10**		10		5		1
6	1		6		15							

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		**10**		**10**		5		1
6	1		6		15		20					

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		**10**		**5**		1	
6	1		6		15		20		15			

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		10		10		**5**		**1**
6	1		6		15		20		15		6	

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3$

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 =$

Сначала заготовим «шаблон», без учета значений числовых коэффициентов.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3 = \_\_a^3 +$

Степень 3 у a^3 совпадает со степенью суммы $(a+b)^3$.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b +$

Если представить первое слагаемое в виде a^3b^0, то можно сказать, что у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 +$

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0		**1**	
1	1		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1					

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1		2		

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		2		1	
3	1						

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		2		1	
3	1						

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		**2**		1	
3	1		3				

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		**2**		1	
3	1		3				

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		**2**		**1**	
3	1		3		3		

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		**2**		**1**	
3	1		3		3		

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1

Получили ответ:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Рассмотреть пример?

III. Бином Ньютона

Традиционно под «биномом Ньютона» понимают формулу

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{(n-3)!3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{n!}{(n-m)!m!}a^{n-m}b^m + \ldots + b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m.$$

Следует учесть, что по определению $0! = 1$.

Рассмотреть пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?