Комментарий 1 к теореме о перестановке строк и столбцов в детерминанте

Что делать, если вы не можете доказать это утверждение? Воспользуйтесь рекомендациями для поиска доказательства. В данном случае обычно бывает достаточным рассмотреть пример. Допустим, перестановку 2-й и 4-й строк можно представить в виде следующей цепочки перестановок:

Вернемся к доказательству теоремы о перестановке строк и столбцов в детерминанте?

Комментарий 2 к теореме о перестановке строк и столбцов в детерминанте

Воспользуемся рекомендациями для поиска доказательства. Наиболее уместным в данном случае будет анализ примера. Пусть матрица $\mathbf{B}$ получена из $\mathbf{A}$ размерности 6×6 перестановкой первой и пятой строк. Тогда $b_{1j} = a_{6j}$ и $b_{6j} = a_{1j}$. Тогда, например,

$$(-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} b_{14} b_{25} b_{31} b_{46} b_{53} b_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{54} a_{25} a_{31} a_{46} a_{13} a_{62} = (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(6;5;1;3;4;2)+t} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62}$$

$$(-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} b_{14} b_{25} b_{31} b_{46} b_{53} b_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{54} a_{25} a_{31} a_{46} a_{13} a_{62} = (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(6;5;1;3;4;2)+t} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62}$$

Выясним, чем отличаются множества инверсий перестановок $(4;5;1;6;3;2)$ и $(3;5;1;6;4;2)$. В этом примере $\alpha = 2, \quad \beta = 1$. У первой перестановки имеются следующие инверсии, которых нет у второй перестановки (внизу, под скобкой, указано количество инверсий в соответствии с принятыми в доказательстве обозначениями):

$$\underbrace{(5;3);\ (6;3);}_{\alpha=2} \quad \underbrace{(3;1)}_{\beta=1}; \quad (4;3).$$

$$(-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} b_{14} b_{25} b_{31} b_{46} b_{53} b_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{54} a_{25} a_{31} a_{46} a_{13} a_{62} = (-1)^{\mu(4;5;1;3;6;2)} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62} =$$

$$= (-1)^{\mu(6;5;1;3;4;2)+t} a_{13} a_{25} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62}$$

Выясним, чем отличаются множества инверсий перестановок $(4;5;1;6;3;2)$ и $(3;5;1;6;4;2)$. В этом примере $\alpha = 2, \quad \beta = 1$. У первой перестановки имеются следующие инверсии, которых нет у второй:

$$\underbrace{(5;3);\ (6;3);}_{\alpha=2} \quad \underbrace{(3;1);}_{\beta=1} \quad (4;3).$$

У второй перестановки имеются следующие инверсии, которых нет у первой перестановки:

$$\underbrace{(3;1);}_{k-2-\alpha=5-2-2=1} \qquad \underbrace{(3;1);\ (6;3)}_{k-2-\beta=5-2-1=2}$$

Вернемся к доказательству теоремы о перестановке строк и столбцов в детерминанте.

Комментарий к замечанию

Например, на строках с номерами $1, 4$ и столбцах с номерами $1, 3$ построен минор $\mathbf{Y}$ матрицы $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \cancel{13} & \cancel{14} & \cancel{15} & \cancel{16} \end{pmatrix} \to \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к замечанию?

Комментарий 1 к теореме о разложении детерминанта по строке или столбцу

В самом деле, например, для $i = 2$ имеем

$$(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}) = (a_{21}\ 0\ 0) + (0\ a_{22}\ 0) + (0\ 0\ a_{23}),$$

поэтому по теореме о линейности детерминанта по строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 0 + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + 0 + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вернемся к доказательству теоремы о разложении детерминанта по строке или столбцу.

Комментарий 2 к теореме о разложении детерминанта по строке или столбцу

Воспользуемся рекомендациями для поиска доказательства. Наверное, в данном случае достаточно будет рассмотреть пример, допустим, $n = 4, \quad i = 2, \quad j = 1$. Тогда рассматриваемые перестановки строк и столбцов приводят к цепочке преобразований

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} \end{pmatrix}.$$

Итак, нужная матрица получена в результате $5 = (4-2) + (4-1)$ перестановок строк и столбцов исходной матрицы.

При этом матрица, полученная из последней матрицы вычеркиванием четвертой строки и четвертого столбца, совпадает с матрицей, полученной из исходной матрицы вычеркиванием второй строки и первого столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} \end{pmatrix}.$$

Вернемся к доказательству теоремы о разложении детерминанта по строке или столбцу.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?