Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Многочлены

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Типовой план алгебраического исследования **8**

II. Определения **21**

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена 29

II.2. Степень многочлена 49

II.3. Равенство многочленов 52

II.4. Критерий равенства многочленов 59

II.5. Операции алгебры многочленов 69

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов 74

II.7. Линейное пространство многочленов 80

II.8. Кольцо многочленов 84

III. Делимость многочленов **90**

III.1. Алгоритм Евклида 100
III.2. Теорема о делении с остатком 111
III.3. Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов 132
III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления . . 133

IV. Корни многочленов **153**
IV.1. Теорема Безу 160
IV.2. Кратность корня 168
IV.3. Теорема Виета 170
IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной 172
IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней 189
IV.6. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены 194
IV.7. Теорема о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ . . 197

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней 198
IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени 203
IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами 210
IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами 221
IV.10. Схема Горнера 226
IV.11. Результант многочленов 229
IV.12. Теорема о результанте многочленов 237
IV.13. Определение результанта многочленов 238
IV.14. Теорема о представлении результанта 239

V. Многочлены над полем рациональных чисел 241
V.1. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами . 246

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов 250
V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел . . 263
V.2. Критерий Эйзентштейна 269
V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами 285
V.4. Рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами 304
V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом 305
V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом 314
V.5. Алгебраические числа 323
V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах 329

V.5.2. Сопряженные алгебраические числа 356
V.5.3. Теорема об операциях над алгебраическими числами 358
V.5.4. Следствие о поле алгебраических чисел 359

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа 362

VII. Многочлены от нескольких переменных 372
VII.1. Формы (однородные многочлены) 400
VII.2. Симметрические многочлены 407
VII.3. Теорема о разложении симметричного многочлена по основным 427

VIII. Дробно-рациональная функция 428
VIII.1. Определение дробно-рациональной функции . . . 429

VIII.2. Теорема о разложении дробно-рациональной функции 430

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Типовые способы задания: римская и арабская формы записи,

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Типовые способы задания: представление в виде $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется характеристика «число разрядов»

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется характеристика «число разрядов», операция «сложение»

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяются характеристика «число разрядов», операция «сложение» и отношения «меньше», «больше».

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ вводится операция «умножение» (как кратное сложение)

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ вводится операция «умножение» (как кратное сложение) и отношения «делиться нацело», «быть четным числом».

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

I. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ рассматриваются подмножества $\mathbb{N}_2$ — четных чисел, множество простых чисел и др.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Разница здесь в том, что при алгебраическом подходе нас интересует не функция, а *выражение*, ее задающее. В частности, при «алгебраическом» подходе не предполагается, что в этом выражении вместо x надо подставлять число.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Например, можно вместо x, при необходимости, подставлять и квадратную матрицу, и другие математические объекты.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В качестве основного определения мы сейчас примем «алгебраическое» определение. Таким образом, для нас многочлен — это *выражение*, а не функция.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В алгебре нас в большей степени интересуют не свойства многочлена как функции (монотонность, экстремумы и т.п.), а возможности преобразований, алгебраические соотношения для многочленов.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В данном разделе мы будем отождествлять выражения x^0 и 1. В частности, мы будем считать, что $x^0 = 1$ для любого x, в том числе и для $x = 0$.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Таким образом, многочлен — это ***линейная комбинация переменной*** x ***в различных степенях***. Поэтому элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются **коэффициентами многочлена** $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

II. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ являются элементами **поля** K, то говорят, что $f(x)$ — это **многочлен над полем** K.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;

Например, многочлен $2 - 3x^2 + 5x^3$ состоит из одночленов
$2x^0, \quad -3x^2, \quad 5x^3$.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2,

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю,

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю, перед x^2 равен (-3),

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю, перед x^2 равен (-3), перед x^3 — равен 5.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена.

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ являются элементами поля K, то говорят, что $f(x)$ — это **многочлен над полем** K.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени x^0 (т.к. $2 = 2x^0$),

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени $x^0, \quad x^2,$

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени $x^0, \quad x^2, \quad x^3$.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

Таким образом, многочлен — это ***линейная комбинация переменной*** x ***в различных степенях***.

II.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

Перейдем к следующему пункту плана:

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов. Рассматривается множество многочленов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов. Рассматривается множество многочленов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования. *Рассмотрим степень многочлена, равенство многочленов, операции алгебры многочленов.*

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

II.2. Степень многочлена

Определение 1. **Степенью многочлена**

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

называется

- *наибольшее такое число m, что $a_m \neq 0$, если такое m найдется;*
- *если все коэффициенты этого многочлена равны 0, то, согласно некоторым источникам, степень такого многочлена не определяется. Другие авторы определяют степень такого многочлена, как $-\infty$ («минус-бесконечность»).*

II.2. Степень многочлена

Определение 1. **Степенью многочлена**

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

называется

- *наибольшее такое число m, что $a_m \neq 0$, если такое m найдется;*
- *если все коэффициенты этого многочлена равны 0, то, согласно некоторым источникам, степень такого многочлена не определяется. Другие авторы определяют степень такого многочлена, как $-\infty$ («минус-бесконечность»).*

Степень многочлена $f(x)$ обычно обозначается через[1] $\deg(f(x))$ или даже через $\deg(f)$.

[1] От английского слова degree — степень, ранг и т.п.

II.2. Степень многочлена

Определение степени многочлена $0 \cdot x^0$ как $-\infty$ обусловлено желанием обеспечить выполнение свойств

- $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$;
- $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$;

даже для случая, когда один из этих многочленов — нулевой. В ситуации, когда оба эти многочлена — ненулевые, справедливость этих свойств очевидна[2]. Для нулевого многочлена выполнение этих свойств обусловлено тем, что сложение с $-\infty$ естественно определить следующим образом: $n + (-\infty) = (-\infty) + n = -\infty$ и $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, кроме того, естественно считать, что $-\infty < n$ для любого целого числа n.

[2]Напомним, что слово «очевидно» означает «легко могу доказать». Можете?

II.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

II.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Понятно, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны (как *выражения*), то имеет место тождество $f(x) \equiv g(x)$ (то есть равны *функции*, задаваемые этими многочленами).

II.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Верно ли, что если многочлены тождественно равны, (то есть равны, как функции), то они равны, как выражения?

II.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Верно ли, что если многочлены тождественно равны, (то есть равны, как функции), то они равны, как выражения? Для выражений некоторых типов ответ может быть отрицательным.

II.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

II.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

В этом случае для *функций* имеет место тождество $\sin^2(\varphi) \equiv 1 - \cos^2(\varphi)$, но эти *выражения* не равны.

II.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

В этом случае для *функций* имеет место тождество $\sin^2(\varphi) \equiv 1 - \cos^2(\varphi)$, но эти *выражения* не равны.

Для многочленов это, однако, не так: многочлены совпадают, как функции тогда и только тогда, когда они равны, как выражения.

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов). *Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны тогда и только тогда, когда тождественно равны функции f и g, задаваемые этими многочленами.*

Слишком много слов...

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Вот теперь хорошо!

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Замечание. Отметим, что здесь речь идет не о равенстве **значений** многочленов на некотором элементе x, а о равенстве многочленов «в целом», то есть, при «аналитическом подходе», тождественном равенстве. Иными словами, равенство $f(x) = g(x)$ должно иметь место **для любого** x из K: $\quad f(x) \equiv g(x)$.

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Необходимость в этом критерии очевидна, докажем достаточность.

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Отказавшись от требования, что m, n — степени соответствующих многочленов, можно считать, что $m = n$ (полагая, что все «недостающие» коэффициенты a_i или b_i равны 0). Пусть $f(x) \equiv g(x)$.

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Отказавшись от требования, что m, n — степени соответствующих многочленов, можно считать, что $m = n$ (полагая, что все «недостающие» коэффициенты a_i или b_i равны 0). Пусть $f(x) \equiv g(x)$. Рассмотрим многочлен

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство.

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, то $h(x) = 0$ для любого x.

Поэтому $\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(1) = 0, \\ \ldots \\ h(n) = 0. \end{cases}$

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство.

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(1) = 0, \\ \ldots \\ h(n) = 0, \end{cases}$ откуда имеем, что столбец $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 \\ a_1 - b_1 \\ \ldots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$ есть

решение ОСЛУ $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_0 + y_1 \cdot 1 + \ldots + y_n \cdot 1 = 0, \\ \ldots \\ y_0 + y_1 \cdot n + \ldots + y_n \cdot n^n = 0. \end{cases}$

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Вычисление определителя матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}$ этой системы уравнений сводится к вычислению так называемого **определителя Вандермонда**, который часто встречается в различных областях алгебры.

II.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1 (критерий равенства многочленов).

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Вычисление определителя матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}$ этой системы уравнений сводится к вычислению так называемого **определителя Вандермонда**, который часто встречается в различных областях алгебры. Можно показать, что он отличен от нуля. Значит, эта ОСЛУ имеет единственное решение — нулевое, то есть $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$, что и требовалось доказать.

II.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

II.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

II.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$

II.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$

$$=(\lambda\cdot a_0)+(\lambda\cdot a_1)\cdot x+\ldots+(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n.$$

II.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$

$$=(\lambda\cdot a_0)+(\lambda\cdot a_1)\cdot x+\ldots+(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n.$$

Произведение многочленов :

$$\left(\sum_{s=0}^{n}a_sx^s\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{m}b_tx^t\right)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{s+t=k}a_s\cdot b_t\right)\cdot x^k$$

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;

3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.

4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $-f(x) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;

3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.

4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $-f(x) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;

5. $\lambda\,(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$;

6. $(\lambda + \mu)\, f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$;

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;

3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.

4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $-f(x) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;

5. $\lambda\,(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$;

6. $(\lambda + \mu)\, f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$;

7. $(\lambda\mu)\ f(x) = \lambda\,(\mu f(x))$;

8. $1 \cdot f(x) = f(x)$.

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

2. Операция «·» **коммутативна, ассоциативна**, с единичным элементом.

II.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

2. Операция «·» **коммутативна, ассоциативна**, с единичным элементом.

3. Верен закон дистрибутивности:

$$f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x).$$

II.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K.

II.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

II.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

Очевидно, что для любого неотрицательного целого числа m множество многочленов степени не выше m является подпространством размерности $m+1$ в бесконечномерном линейном пространстве всех многочленов с коэффициентами из K.

II.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

Очевидно, что для любого неотрицательного целого числа m множество многочленов степени не выше m является подпространством размерности $m+1$ в бесконечномерном линейном пространстве всех многочленов с коэффициентами из K. Поэтому все результаты, полученные нами для произвольных линейных пространств, справедливы и для пространства многочленов.

II.8. Кольцо многочленов

Множество всех многочленов $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ от переменной x над **полем** K обозначается через $K[x]$. Наиболее важными в этом курсе являются многочлены над полем действительных чисел и над полем комплексных чисел, то есть многочлены из $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$. Учитывая свойства операций множества многочленов, можно отметить что для любого поля K множество многочленов $K[x]$ является **кольцом** относительно операций *суммирования многочленов* и *умножения многочленов*, точнее *ассоциативным кольцом*.

II.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

II.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0.

II.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

II.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

В левой части равенства стоит многочлен ненулевой степени, а справа — нулевой.

II.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

В левой части равенства стоит многочлен ненулевой степени, а справа – нулевой.

Полученное противоречие показывает, что кольцо многочленов полем **не является**.

III. Делимость многочленов

Многочлен является выражением, представляющим собой сумму некоторых слагаемых. Естественно, что нередко возникает необходимость в представлении многочлена в виде произведения.

III. Делимость многочленов

Многочлен является выражением, представляющим собой сумму некоторых слагаемых. Естественно, что нередко возникает необходимость в представлении многочлена в виде произведения.

Итак, одну из целей дальнейшего исследования можно было бы сформулировать следующим образом.

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом:

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения.

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0.

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы степени каждого из сомножителей были меньше степени произведения.

III. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы степени каждого из сомножителей были меньше степени произведения.

Следовательно, цель 1 можно уточнить, например, следующим образом.

III. Делимость многочленов

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

III.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**.

III.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы.

III.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы. Напомним, что цифра — это буква, символ.

III.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы. Напомним, что цифра — это буква, символ. Каждой цифре «по умолчанию» сопоставляется однозначное число.

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 =$

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 +$

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 +$

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x =$

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x = 10$.

III.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x = 10$.

Эта аналогия между натуральными числами и многочленами позволяет перенести некоторые полезные операции теории чисел в теорию многочленов. В частности, мы перенесем на алгебру многочленов *алгоритм Евклида* деления одного натурального числа на другое.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции:

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

$$3 - 4x = \quad 0 \quad \cdot \left(2 - x - x^2\right) + (3 - 4x)$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

$$\underbrace{3 - 4x}_{f(x)} = \underbrace{0}_{p(x)} \cdot \underbrace{\left(2 - x - x^2\right)}_{g(x)} + \underbrace{(3 - 4x)}_{r(x)}$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

База индукции доказана.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5 - \frac{(-2)}{(-1)} x^{5-2} \left(2 - x - 1x^2\right)$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5 - \frac{(-2)}{(-1)} x^3 \cdot 2 - \frac{(-2)}{(-1)} x^4 - \frac{(-2)}{(-1)}(-1)x^5$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 \qquad - \frac{(-2)}{(-1)} x^3 \cdot 2 - \frac{(-2)}{(-1)} x^4$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.
$h(x) = 2 + x - x^2 + x^3 - 2x^4$ — степень понизилась!

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.
Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Поэтому для $h(x)$ утверждение теоремы верно: $h(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$.

$h(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$. Следовательно,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = h(x)$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,
$h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$.

$h(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$. Следовательно,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = h(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g),$$

$$f(x) = g(x) \cdot \left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right) + r(x),$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) = g(x) \cdot \left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right) + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g).$$

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right)}_{p(x)} + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g).$$

Теорема доказана.

III.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Рассмотреть пример?

III.3. Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов

Продолжая поиск путей достижения цели 2, вернемся к аналогии между многочленами и числами. Одними из основных операций для введения понятия **«рациональное число»** в форме обыкновенных дробей являются операции вычисления **наибольшего общего делителя** (Н.О.Д.) и **наименьшего общего кратного** (Н.О.К.). В данном разделе мы осуществим перенос этих конструкций в теорию многочленов.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Достаточно доказать, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $r(x)$ *и наоборот,*

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Достаточно доказать, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $r(x)$ *и наоборот, всякий общий делитель многочленов* $r(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $f(x)$.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$, откуда

$r(x) = u(x)d(x) - p(x)v(x)d(x) =$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$, откуда

$$r(x) = u(x)d(x) - p(x)v(x)d(x) = \Big(u(x) - p(x)v(x)\Big)\, d(x).$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Значит, если $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $r(x) = \Big(v(x) - p(x)v(x)\Big)\, d(x)$. Это означает, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)g(x) + r(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + r(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + r(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + \beta(x)c(x)$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + \beta(x)c(x) = \Big(p(x)\alpha(x) + \beta(x)\Big)\, c(x).$$

III.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x))$ = **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Итак, если $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$, то

$$f(x) = \Big(p(x)\alpha(x) + \beta(x)\Big)\, c(x).$$

Следовательно, $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

Итак, доказано, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$ и наоборот, всякий общий делитель многочленов $r(x)$ и $g(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

Отсюда следует заключение теоремы.

Рассмотреть пример?

IV. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

IV. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда

IV. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда либо значение переменной равно «самому экстремальному» числу, либо значение многочлена равно «самому экстремальному» числу.

IV. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда либо значение переменной равно «самому экстремальному» числу, либо значение многочлена равно «самому экстремальному» числу.

«Самым экстремальным» числом является, очевидно, 0. Это обстоятельство явилось одной из причин для введения специального понятия — корня многочлена.

IV. Корни многочленов

Определение 3. *Пусть $f(x)$ — многочлен над* ***кольцом*** *K. Элемент a кольца K называется* **корнем** *многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$, где 0 — нулевой элемент кольца K.*

IV. Корни многочленов

Формула для отыскания корней многочлена первой степени была известна в глубокой древности. Корни квадратного уравнения умели находить еще древние греки. Для кубического уравнения соответствующие формулы были получены в 1535 году итальянским математиком Никколо Тартальи[3]. Джеронимо Кардано в 1545 году опубликовал в своей книге «Великое искусство, или О правилах алгебры» формулы для корней многочлена степени 4, полученные учеником Кардано Лудовико Феррари. Казалось, что еще немного — и будет получена формула для корней многочлена любой степени! Но...

[3]Изначально Тарталья — в переводе «заика» — было прозвищем Никколо Фонтана, но потом превратилось в фамилию.

IV. Корни многочленов

Французкий математик Эварист Галуа[4] доказал, что для многочлена степени больше 4 не существует формулы вычисления их корней, использующих арифметические операции и радикалы. Какую проблематику в теории многочленов, связанную с корнями многочленов, можно предложить? Можно рассматривать иные способы поиска корней многочленов, в первую очередь, приближенные вычисления. Этот подход можно рассматривать как результат применения **стратегии построения модели**. Значительные успехи были достигнуты при применении **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов** и **стратегии обогащения модели**. Соответствующие результаты будут приведены ниже.

[4] Годы жизни 1811—1832. Он погиб, когда ему еще не исполнился 21 год!

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Доказательство.

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Доказательство. *Необходимость.* Согласно теореме о делении с остатком $f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x)$, где $\deg(r) < \deg(x - a) = 1$, то есть $r(x) = b$ для некоторого b из K. Следовательно,

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Доказательство. *Необходимость.* Согласно теореме о делении с остатком $f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x)$, где $\deg(r) < \deg(x - a) = 1$, то есть $r(x) = b$ для некоторого b из K. Следовательно,

$$0 = f(a) = (a - a) \cdot p(a) + b = b,$$

то есть $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$, что и требовалось доказать.

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Доказательство. *Достаточность* очевидна: $f(a) = (a - a) \cdot p(a) = 0 \cdot p(a) = 0$, то есть a является корнем многочлена $f(x)$, что и требовалось доказать.

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Следствие 1 (из теоремы Безу). *Если a и b — <u>различные</u> корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Доказательство.

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Следствие 1 (из теоремы Безу). *Если a и b — <u>различные</u> корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Доказательство. По теореме Безу $f(x) = (x - a)\, h(x)$. Так как b — корень многочлена $f(x)$, то $0 = f(b) = \underbrace{(b - a)}_{\neq 0}\, h(b)$.

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Следствие 1 (из теоремы Безу). *Если a и b — <u>различные</u> корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = (x - a)\, h(x)$ и $h(b) = 0$. По теореме Безу $h(x) = (x - b)\, g(x)$, то есть

IV.1. Теорема Безу

Теорема 4 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Следствие 1 (из теоремы Безу). *Если a и b — <u>различные</u> корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = (x - a)\, h(x)$ и $h(b) = 0$. По теореме Безу $h(x) = (x - b)\, g(x)$, то есть
$f(x) = (x - a)(x - b)\, g(x)$, что и требовалось доказать.

IV.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По теореме Безу $f(x) = (x - a)\, g(x)$. Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) = (x - a)^2\, h(x)$. Продолжая этот процесс, получаем в конце концов представление многочлена $f(x)$ в виде $f(x) = (x - a)^k\, p(x)$, где $p(a) \neq 0$ и $p(x)$ — многочлен. Во многих приложениях используется число k, что явилось основанием для введения следующего понятия.

IV.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По теореме Безу $f(x) = (x - a)\, g(x)$. Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) = (x - a)^2\, h(x)$. Продолжая этот процесс, получаем в конце концов представление многочлена $f(x)$ в виде $f(x) = (x - a)^k\, p(x)$, где $p(a) \neq 0$ и $p(x)$ — многочлен. Во многих приложениях используется число k, что явилось основанием для введения следующего понятия.

Определение 4. *Если a — корень многочлена $f(x)$, то* **кратностью корня** *называется такое натуральное число k, что*

$$f(x) = (x - a)^k\, g(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ — такой многочлен, что a не является его корнем.

IV.3. Теорема Виета

Теорема 5 (Виета). [5] *Если многочлен* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*
$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$, *где* $\alpha_i \in K$, *то*

$$\begin{cases} a_0 = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \\ a_1 = (-1)^{n-1}\left(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\right), \\ \ldots \\ a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_{n-1} + \ldots \\ \qquad + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ a_{n-1} = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right), \end{cases} \tag{2}$$

[5] Франсуа Виета — французкий математик, 1540–1608.

IV.3. Теорема Виета

Теорема 5 (Виета). *Если многочлен* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*
$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$,
где $\alpha_i \in K$, *то* $\quad a_j =$

$$= (-1)^{n-j} \sum_{k_1=1}^{n-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+1} \ldots \sum_{k_{j-1}=k_{j-2}+1}^{n-1} \sum_{k_j=k_{j-1}+1}^{n} \left(\prod_{m \in \{1;\ \ldots;\ n\} \setminus \{k_1; \ldots;\ k_j\}} \alpha_m \right).$$

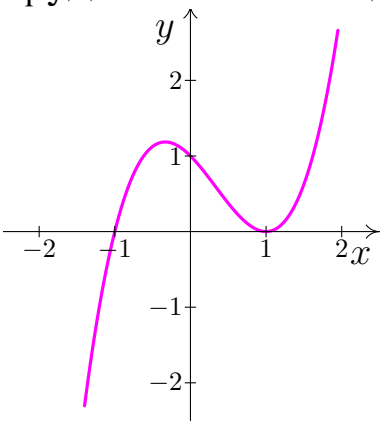
Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

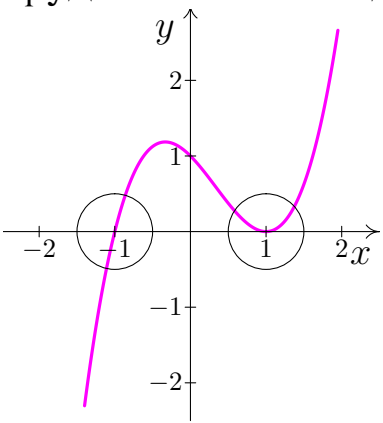


Рассмотрим график функции $f(x) = (x+1)(x-1)^2$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

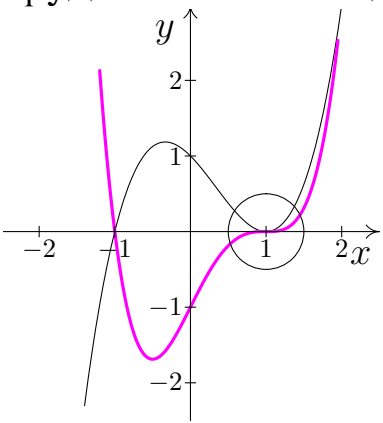


Рассмотрим график функции $f(x) = (x+1)(x-1)^2$. Обратите внимание на значения функции в окрестности точек с координатами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

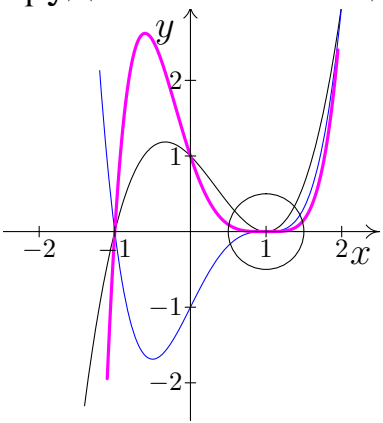


Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x+1)(x-1)^2$,
$f(x) = (x+1)(x-1)^3$ и

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

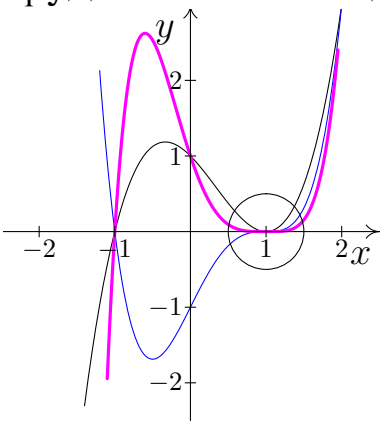


Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x+1)(x-1)^2$,
$f(x) = (x+1)(x-1)^3$ и
$f(x) = (x+1)(x-1)^4$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.



Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x+1)(x-1)^2$,
$f(x) = (x+1)(x-1)^3$ и
$f(x) = (x+1)(x-1)^4$.

Поэтому актуальной является проблема избавления от кратных корней. В этом направлении получен решающий результат, рассмотренный в данном разделе.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Определение 5. Производной многочлена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

назовем многочлен $\quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n\, a_n x^{n-1}$.

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Определение 5. Производной многочлена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

назовем многочлен $\quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n\, a_n x^{n-1}$.

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) =$$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' =$$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

$$= (x-\alpha)^{k-1}\left(k\, q(x) + (x-\alpha) q'(x)\right).$$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

$$= (x-\alpha)^{k-1}\left(k\, q(x) + (x-\alpha) q'(x)\right).$$

При этом $k\underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0} + \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0} q'(\alpha) \neq 0.$

IV.4. Производная многочлена: теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По определению кратности корня

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

$$p'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\left(k\,q(x) + (x-\alpha)q'(x)\right).$$

При этом $k\underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0} + \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0} q'(\alpha) \neq 0$. Следовательно, по определению кратности корня элемент α является корнем многочлена $p'(x)$ кратности $(k-1)$. Теорема доказана.

IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7 (об избавлении от кратных корней). *Если* $p(x)$ *многочлен, то справедливы следующие утверждения:*

1. *Всякий корень многочлена* $p(x)$ *является корнем многочлена* $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$;

2. *Все корни многочлена* $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$ *имеют кратность 1.*

IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k. Тогда по определению кратности корня и теореме о кратных корнях и производной

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k. Тогда по определению кратности корня и теореме о кратных корнях и производной

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)^k q(x); (x-\alpha)^{k-1} r(x))} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{(x-\alpha)^{k-1} \cdot \textbf{Н.О.Д.}\,((x-\alpha) q(x); r(x))} =$$

$$= (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,((x-\alpha) q(x); r(x))}$$

IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k. Тогда по определению кратности корня и теореме о кратных корнях и производной

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)q(x); r(x))}$$

Значит, во-первых, α является корнем многочлена $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, т.е. первое утверждение теоремы об избавлении от кратных корней доказано.

IV.5. Производная многочлена: теорема об избавлении от кратных корней

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k. Тогда по определению кратности корня и теореме о кратных корнях и производной

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)q(x); r(x))}$$

Значит, во-вторых, кратность корня α многочлена $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$ равна 1, т.е. второе утверждение теоремы об избавлении от кратных корней доказано.

Рассмотреть пример?

IV.6. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 6. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **разложимым** *над полем* K *или* **приводимым** *над полем* K*, если существуют такие многочлены* $p(x)$ *и* $q(x)$ *из* $K[x]$*, что,* **во-первых**, $\deg(p) < \deg(f)$ *и* $\deg(q) < \deg(f)$*;* **во-вторых**, $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. *В противном случае многочлен* $f(x)$ *называется* **неразложимым** *или* **неприводимым** *над полем* K.

IV.6. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 6. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **разложимым** *над полем* K *или* **приводимым** *над полем* K*, если существуют такие многочлены* $p(x)$ *и* $q(x)$ *из* $K[x]$*, что,* **во-первых**, $\deg(p) < \deg(f)$ *и* $\deg(q) < \deg(f)$*;* **во-вторых**, $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. *В противном случае многочлен* $f(x)$ *называется* **неразложимым** *или* **неприводимым** *над полем* K.

Иными словами, $f(x)$ неразложим над полем K тогда и только тогда, когда равенство $f(x) = p(x) \cdot q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с коэффициентами из K, выполняется только в случае $\deg(p) = 0$ или $\deg(q) = 0$.

IV.6. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 7. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **вполне приводимым** *над полем* K*, если*

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k)^{\beta_k}, \tag{3}$$

где $\alpha_k \in K, \quad \beta_k \in \mathbb{N}.$

IV.7. Теорема о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Теорема 8 (о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). *Над полем действительных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Над полем комплексных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени. В частности, любой многочлен над полем комплексных чисел* ***вполне приводим***.

Без доказательства.

Из этой теоремы следует, что все корни многочлена с комплексными коэффициентами принадлежат полю комплексных чисел, то есть поле комплексных чисел является **алгебраически замкнутым**.

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Будем вести индукцию по степени многочлена $f(x)$.

База индукции. Если эта степень равна 1, то $f(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)$, то есть этот многочлен имеет единственный корень $-\frac{a_0}{a_1}$. База доказана.

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Будем вести индукцию по степени многочлена $f(x)$.

Шаг индукции. Пусть степень n многочлена $f(x)$ больше 1 и для любого многочлена с комплексными коэффициентами, имеющего меньшую степень, утверждение этого следствия верно. По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

Тогда, по предположению индукции, утверждение следствия верно для этих многочленов, откуда получаем требуемое утверждение, учитывая тот факт, что,

во-первых, если a — корень кратности k в точности одного из многочленов $g(x)$ или $h(x)$, то a является корнем кратности k многочлена $f(x)$;

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

Тогда, по предположению индукции, утверждение следствия верно для этих многочленов, откуда получаем требуемое утверждение, учитывая тот факт, что,

во-вторых, если a является корнем кратности k_1 для многочлена $g(x)$, и корнем кратности k_2 для многочлена $h(x)$, то для многочлена $f(x)$ число a является корнем кратности $k_1 + k_2$. Шаг индукции доказан.

IV.7.1 Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Итак, база индукции и шаг индукции доказаны. Следовательно, согласно принципу математической индукции доказываемое следствие верно для многочлена любой степени, большей 0.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. Будем вести индукцию по $\deg(f(x))$.

База индукции. Если эта степень равна 1, то $f(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)$, то есть этот многочлен имеет вещественный корень $-\frac{a_0}{a_1}$. База доказана.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (о вещественном корне многочлена нечетной степени). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть степень n многочлена $f(x)$ больше 1 (то есть, с учетом ее нечетности, эта степень не меньше 3), и для любого многочлена с вещественными коэффициентами, имеющего меньшую степень, утверждение этого следствия верно.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x)$, $h(x)$ является нечетным числом, так как при умножении многочленов их степени складываются.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x)$, $h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x)$, $h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$. Шаг индукции доказан.

IV.7.2 Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3 (**о вещественном корне многочлена нечетной степени**). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x)$, $h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$. Шаг индукции доказан.

Согласно принципу математической индукции доказываемое следствие верно для многочлена любой нечетной степени.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

Существуют довольно эффективные численные методы поиска корней многочлена. Но как быть, если у многочлена нет действительных корней?

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

Существуют довольно эффективные численные методы поиска корней многочлена. Но как быть, если у многочлена нет действительных корней?

Один из подходов к решению вопроса о разложении многочлена на множители с вещественными коэффициентами основан на следующей теореме.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m \overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n} \overline{a_m \overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m,$$

так как $\overline{a_m} = a_m$ в силу вещественности коэффициентов a_m.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{(\overline{z} - z_0)^k \cdot p(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}.$$

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{n-k} b_m \overline{z}^m\right)} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} \cdot \overline{\overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} z^m = q(z).$$

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $\overline{f(z)} = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Так как $\overline{p(\overline{z})} = q(z)$, то $f(z) = (z - \overline{z_0})^k \cdot q(z)$. Таким образом, доказано, что $\overline{z_0}$ является корнем кратности, не ниже k.

IV.8. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9 (о корнях многочлена с вещественными коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Итак, если z_0 — корень кратности k, то $\overline{z_0}$ является корнем кратности, не ниже k.

Применяя эти рассуждения к корню $\overline{z_0}$, получаем, что кратность корня $\overline{(\overline{z_0})}$, равного z_0, не ниже кратности корня $\overline{z_0}$. Таким образом, $\overline{z_0}$ — корень многочлена $f(z)$ той же кратности, что и z_0. Теорема доказана.

IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство.

IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) =$$

IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - a - bi)(x - a + bi) =$$

IV.9. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + \left(a^2 + b^2\right),$$

то есть все его коэффициенты — вещественные числа.

Рассмотреть пример?

IV.10. Схема Горнера

В полном объеме достичь цели 2 нам не удалось, так как практическое решение вопроса о представлении многочлена в виде произведения упирается, в конечном итоге, в задачу нахождения всех корней многочлена. Но для многочленов степени больше 4 эта задача в общем виде может быть решена только приближенно, так как формулы для вычисления корней с помощью коэффициентов уравнения, использующей только арифметические операции, включая извлечение корней. В связи с этим особый интерес представляют формулы, относящиеся к наиболее важным и часто возникающим ситуациям.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим задачу деления на «наиболее простой» многочлен. В качестве такого многочлена возьмем многочлен $x - \alpha$.

IV.10. Схема Горнера

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$= (x - \alpha)\left(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha & \text{при } x^{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} & \text{при } x^{n-2}, \\ a_{n-3} = b_{n-4} - \alpha b_{n-3} & \text{при } x^{n-3}, \\ \ldots & \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 & \text{при } x, \\ a_0 = \alpha b_0 & \text{при } x^0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = \dfrac{a_0}{\alpha}, \\ b_1 = \dfrac{a_1 - b_0}{\alpha}, \\ \ldots \\ b_{n-3} = \dfrac{a_{n-3} - b_{n-4}}{\alpha}, \\ b_{n-2} = \dfrac{a_{n-2} - b_{n-3}}{\alpha}. \end{array}\right.$$

IV.10. Схема Горнера

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha & \text{при } x^{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} & \text{при } x^{n-2}, \\ a_{n-3} = b_{n-4} - \alpha b_{n-3} & \text{при } x^{n-3}, \\ \dots & \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 & \text{при } x, \\ a_0 = \alpha b_0 & \text{при } x^0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = \dfrac{a_0}{\alpha}, \\ b_1 = \dfrac{a_1 - b_0}{\alpha}, \\ \dots \\ b_{n-2} = \dfrac{a_{n-2} - b_{n-3}}{\alpha}, \\ b_{n-1} = \dfrac{a_{n-1} - b_{n-2}}{\alpha}. \end{array}\right.$$

Вычисление по рекуррентным формулам

$$b_0 = \frac{a_0}{\alpha}, \quad b_k = \frac{a_k - b_{k-1}}{\alpha}, \tag{4}$$

называются вычислениями по **схеме Горнера**.

IV.11. Результант многочленов

Корни многочленов — один из наиболее востребованных инструментов решения задач, в которых используются многочлены. Как доказал Э.Галуа, для многочленов степени 5 и больше ***не существует формулы для нахождения корней***. Особую актуальность приобретают инструменты, с помощью которых удается решать некоторые ***проблемы, связанные с корнями многочленов, не находя эти корни явно.*** Примером такой проблемы является следующая задача.

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Эту задачу можно рассматривать как результат применения **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

IV.11. Результант многочленов

Корни многочленов — один из наиболее востребованных инструментов решения задач, в которых используются многочлены. Как доказал Э.Галуа, для многочленов степени 5 и больше ***не существует формулы для нахождения корней***. Особую актуальность приобретают инструменты, с помощью которых удается решать некоторые ***проблемы, связанные с корнями многочленов, не находя эти корни явно.*** Примером такой проблемы является следующая задача.

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Мы решим эту задачу в ситуации, когда оба многочлена над данным полем разложимы в произведение многочленов первой степени.

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы ввести функцию от этих многочленов, которая обращается в ноль тогда и только тогда, когда у многочленов имеется хотя бы один общий корень. При этом функцию определим через корни многочленов, и получим выражение для ее задания через коэффициенты многочленов.

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы ввести функцию от этих многочленов, которая обращается в ноль тогда и только тогда, когда у многочленов имеется хотя бы один общий корень. При этом функцию определим через корни многочленов, и получим выражение для ее задания через коэффициенты многочленов.

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов.

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x-2)$ такое произведение имеет вид:

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-2)(-2-4)(-2-2)$$

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x-2)$ такое произведение имеет вид:

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-2)(-2-4)(-2-2)$$

Выражение $(-2-4)(-2-2)$ в этом произведении повторилось дважды, поскольку -2 является корнем кратности 2. В данном случае исходные многочлены не имеют общих корней, поэтому рассматриваемое произведение всех разностей между корнями первого и корнями второго уравнений отлично от нуля.

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Иная ситуация возникает, например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x+2)$, для которых

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-(-2))(-2-4)(-2-(-2))=0.$$

IV.11. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Иная ситуация возникает, например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x+2)$, для которых

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-(-2))(-2-4)(-2-(-2))=0.$$

Оказалось, что для выражения этого произведения через коэффициенты многочленов удобнее это выражение «подправить» множителем, как это сделано в приведенной ниже формуле (5).

IV.12. Теорема о результанте многочленов

Теорема 10 (о результанте многочленов). *Если многочлены* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *и* $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *разложимы над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), \\ b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = b_m(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n) = b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, *то выражение*

$$R(f(x), g(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j) \tag{5}$$

равно 0 тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют хотя бы один общий корень.*

Доказательство. Очевидно.

IV.13. Определение результанта многочленов

Определение 8. *Выражение (5)*

$$R(f(x), g(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) \tag{5}$$

называется **результантом** *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$.

IV.14. Теорема о представлении результанта

Теорема 11 (о представлении результанта). *Если многочлены* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *и* $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), \\ b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = b_m(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n) = b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, *то результант* $R(f(x), g(x))$ *равен*

$$\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_{m-n} & b_{m-n-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_{m-n+1} & b_{m-n} & \ldots & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & \ldots & b_{n-m} & b_{n-m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

IV.14. Теорема о представлении результанта

Рассмотреть примеры?

V. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

V. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

V. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

V. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

— получение информации о производной многочлена с **рациональными** коэффициентами;

V. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

— получение информации о производной многочлена с **рациональными** коэффициентами;

— сведение к более простым ситуациям, например, к многочленам с целыми коэффициентами и др.

V.1. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

V.1. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

V.1. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

Какие проблемы о многочленах с целыми коэффициентами можно отнести к первоочередным для нас?

V.1. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

Какие проблемы о примитивных многочленах можно отнести к первоочередным для нас?

— Какие операции сохраняют примитивность многочленов?

— Какие проблемы о многочленах с целыми коэффициентами можно свести к примитивным многочленам?

— Как проверить примитивность многочлена без утомительного вычисления **наибольшего общего делителя** его коэффициентов?

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$. Последнее утверждение на «языке равенств» можно представить в виде формул .

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$. Последнее утверждение на «языке равенств» можно представить в виде формул $c_j = p \cdot d_j$.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $\quad p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$
$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \ldots$$

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \dots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \dots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

Но это означает, что $p \cdot d_{\alpha+\beta}$ не делится на p, что противоречие.

V.1.1. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12 (Гаусса о произведении примит. мн-нов). *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

Но это означает, что $p \cdot d_{\alpha+\beta}$ не делится на p, что противоречие. Теорема доказана.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \quad h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$$

являются **рациональными** числами: $b_i = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad c_j = \dfrac{\gamma_j}{\delta_j}$.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \quad h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$$

являются **рациональными** числами: $b_i = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad c_j = \dfrac{\gamma_j}{\delta_j}$.

Очевидно, что существуют такие несократимые дроби $\dfrac{u}{v}$ и $\dfrac{s}{t}$, что многочлены $\dfrac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\dfrac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где многочлены $\frac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\frac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**. По **теореме Гаусса о произведении примитивных многочленов** многочлен $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} \cdot f(x) = \left(\frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right)$ является **примитивным**.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где многочлены $\frac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\frac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**. По **теореме Гаусса о произведении примитивных многочленов** многочлен $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} \cdot f(x) = \left(\frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right)$ является **примитивным**.

Значит, $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} = \frac{1}{\mu}$, где $\mu = \text{Н.О.Д.}\,\{a_0, \ldots, a_n\}$.

V.1.2. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13 (о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$). *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Таким образом,

$$f(x) = \left(\mu \cdot \frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right),$$

теорема доказана.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Применим метод доказательства «от противного».

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ разложим: $f(x) =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ разложим: $f(x) =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} a_0 = b_0c_0, \\ a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \\ a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0, \\ \ldots \\ a_{n-1} = b_{k-1}a_m + b_ka_{m-1}, \\ a_n = b_ka_m. \end{cases}$$

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} a_0 = b_0c_0, \\ a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \\ a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0, \\ \ldots \\ a_{n-1} = b_{k-1}a_m + b_ka_{m-1}, \\ a_n = b_ka_m. \end{cases}$$

По условию для $i \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$ имеем $a_i = \alpha_ip$.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0c_0, \\ \alpha_1 p = b_0c_1 + b_1c_0, \\ \alpha_2 p = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ \alpha_3 p = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1}a_m + b_ka_{m-1}, \\ a_n = b_ka_m. \end{cases}$$

По условию для $i \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$ имеем $a_i = \alpha_i p$.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0c_0, \\ \alpha_1 p = b_0c_1 + b_1c_0, \\ \alpha_2 p = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ \alpha_3 p = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1}a_m + b_ka_{m-1}, \\ a_n = b_ka_m. \end{cases}$$

Коэффициент a_0 не делится на p^2, где p — простое число. Значит, один из коэффициентов b_0 или c_0 не делится на p.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0c_0, \\ \alpha_1 p = b_0c_1 + b_1c_0, \\ \alpha_2 p = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ \alpha_3 p = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1}a_m + b_ka_{m-1}, \\ a_n = b_ka_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0p$.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0 p$.

Из второго уравнения $b_0 c_1 = p\left(\alpha_1 - b_1 d_0\right)$. Значит,

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0 p$.

Из второго уравнения $b_0 c_1 = p\left(\alpha_1 - b_1 d_0\right)$. Значит, $c_1 = d_1 p$.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Имеем b_0 не делится на p, $c_0 = d_0 p, \quad c_1 = d_1 p$.

Используя метод индукции получаем, что все c_i делятся на p.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Имеем b_0 не делится на p, $c_0 = d_0 p, \quad c_1 = d_1 p$.

Используя метод индукции получаем, что все c_i делятся на p. Следовательно, a_n делится нацело на p.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p,

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p, что противоречит условию теоремы.

V.2. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14 (критерий Эйзенштейна). *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Как показал Галуа, не существует алгебраической формулы для вычисление корней многочлена степени, большей 4.

Поэтому

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Как показал Галуа, не существует алгебраической формулы для вычисление корней многочлена степени, большей 4.

Поэтому актуальной является задача отыскания корней многочлена для частных случаев.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

Эта задача равносильна задаче отыскания целочисленных корней многочлена $\mu \cdot f(x)$ с целыми коэффициентами, где μ — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $f(x)$.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

Эта задача равносильна задаче отыскания целочисленных корней многочлена $\mu \cdot f(x)$ с целыми коэффициентами, где μ — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $f(x)$.

Более того, таким образом задача сводится к поиску корней **примитивного** многочлена.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Пусть α — корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. По **теореме Безу**

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** или доказательство **теоремы о делении с остатком**, получаем, что $b_i \in \mathbb{Q}$.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Пусть α — корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. По **теореме Безу**

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** или доказательство **теоремы о делении с остатком**, получаем, что $b_i \in \mathbb{Q}$.

В силу **теоремы о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$** коэффициенты b_i являются целыми числами.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

Этот результат позволяет ограничить перебор возможных «кандидатов» на «роль корня» многочлена.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

Этот результат позволяет ограничить перебор возможных «кандидатов» на «роль корня» многочлена.

Но в случае, когда a_0 имеет большое число делителей, такой перебор может оказаться чрезмерно утомительным. Поэтому продолжим анализ.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Внимание к a_0 обусловлено тем, что это значение исходного многочлена при $x = 0$. Помимо 0 в качестве «экстремального» значения аргумента естественно взять

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Внимание к a_0 обусловлено тем, что это значение исходного многочлена при $x = 0$. Помимо 0 в качестве «экстремального» значения аргумента естественно взять $x = 1$ и $x = -1$.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right)$, где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) =$$

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right)$, где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) =$$

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) = (1-\alpha)\left(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}\right),$$

V.3. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) = (1-\alpha)\left(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha - 1)$.

V.4. Рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами

Сведение задачи отыскания рациональных корней многочлена с рациональными коэффициентами к поиску целых корней многочлена с целыми коэффициентами осуществляется с помощью **теоремы о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом** и **теоремы о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом**.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда $a_0 v^n + a_1 u v^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}v + u^n = 0.$

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда $a_0 v^n + a_1 u v^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}v + u^n = 0$.

Следовательно, $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$). *Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$).
Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$).
Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует. Следовательно, $v = 1$, т.е. $\alpha = \dfrac{u}{1} = u$.

V.4.1. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15 (о корнях из $\mathbb{Q}$ многочлена с $a_n = 1$).
Если число $\alpha \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является целым числом.

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует. Следовательно, $v = 1$, т.е. $\alpha = \dfrac{u}{1} = u$.

Теорема доказана.

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство.

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = a_0 + a_1\frac{y}{a_n} + \ldots + a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \frac{y^n}{a_n^{n-1}} =$$

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = a_0 + a_1\frac{y}{a_n} + \ldots + a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \frac{y^n}{a_n^{n-1}} =$$

$$= \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}}.$$

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) =$

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) = f\left(\dfrac{(\alpha a_n)}{a_n}\right) =$

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) = f\left(\dfrac{(\alpha a_n)}{a_n}\right) = \dfrac{1}{a_n^{n-1}}g\left(\alpha a_n\right)$.

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Итак, $\dfrac{1}{a_n^{n-1}}g\left(\alpha a_n\right) = 0$, т.е. (αa_n) является корнем многочлена $g(y)$.

V.4.2. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16 (о сведении к корням многочлена с $a_n = 1$). *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Итак, $\dfrac{1}{a_n^{n-1}}g\left(\alpha a_n\right) = 0$, т.е. (αa_n) является корнем многочлена $g(y)$.

Теорема доказана.

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \end{cases}$

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и $P \not\subset \mathbb{R}$.

V.5. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и $P \not\subset \mathbb{R}$.

Определение 10. *Комплексное число α называется* **алгебраическим**, *если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. В противном случае число α называется* **трансцендентным**.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются **рациональными числами**. По **теореме о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$** можно считать, что коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) =$

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$,

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$, откуда следует, что α является корнем многочлена $g(x)$ или $h(x)$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$, откуда следует, что α является корнем многочлена $g(x)$ или $h(x)$. Но степень каждого из них меньше степени многочлена $f(x)$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

Если β — **наибольший общий делитель** всех коэффициентов многочлена $f(x)$, то $f(x) = \beta \cdot s(x) = (-\beta) \cdot (-s(x))$, где $s(x)$ — **примитивный многочлен**, и α — его корень.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

Значит, можно считать, что $f(x)$ — **примитивный многочлен** и что коэффициент при старшей степени положителен.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Осталось показать, что многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Пусть α является корнем примитивных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ минимальной степени с целыми коэффициентами и положительным коэффициентом при старшей степени.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По **теореме о делении с остатком** $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Из доказательства **теоремы о делении с остатком** следует, что все коэффициенты многочленов $p(x)$ и $r(x)$ являются **рациональными числами**.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$\beta f(\alpha) = \beta p(\alpha)g(\alpha) + \beta r(\alpha)$$

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$\beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha)$$

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$0 = \beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha)$$

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$0 = \beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha) \;\Rightarrow\; \beta r(\alpha) = 0.$$

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда $\beta r(\alpha) = 0$. Таким образом α является корнем многочлена $\beta r(x)$ с целыми коэффициентами.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда $\beta r(\alpha) = 0$. Таким образом α является корнем многочлена $\beta r(x)$ с целыми коэффициентами. Но его степень меньше степени многочлена $f(x)$, противоречие.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

Следовательно, $f(x) = g(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**.

V.5.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

Следовательно, $f(x) = g(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**. Теорема доказана.

V.5.2. Сопряженные алгебраические числа

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Определение 11. *Алгебраические числа α и β называются* **сопряженными**, *если для числа α и числа β совпадают многочлены, определенные в* ***теореме 17 о сопряженных алгебраических числах***. *Если $f(x)$ — этот многочлен из теоремы 17, то алгебраические числа α и β называются* **сопряженными через многочлен** $f(x)$.

V.5.2. Сопряженные алгебраические числа

Теорема 17 (о сопряженных алгебраических числах). *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Определение 11. *Алгебраические числа α и β называются* **сопряженными**, *если для числа α и числа β совпадают многочлены, определенные в* ***теореме 17 о сопряженных алгебраических числах***. *Если $f(x)$ — этот многочлен из теоремы 17, то алгебраические числа α и β называются* **сопряженными через многочлен** $f(x)$.

Не следует путать сопряженность алгебраических чисел и сопряженность комплексных чисел!

V.5.3. Теорема об операциях над алгебраическими числами

Теорема 18 (об операциях над алгебраическими числами). *Сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел являются алгебраическими числами.*

V.5.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4 (о поле алгебраических чисел). *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство.

V.5.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4 (о поле алгебраических чисел). *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство. По **теореме об операциях над алгебраическими числами** множество алгебраических чисел замкнуто относительно сложения и умножения. Значит, остается только проверить выполнение **аксиом поля** в алгебре алгебраических чисел.

V.5.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4 (о поле алгебраических чисел). *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство. По **теореме об операциях над алгебраическими числами** множество алгебраических чисел замкнуто относительно сложения и умножения. Значит, остается только проверить выполнение **аксиом поля** в алгебре алгебраических чисел.

Но эти аксиомы выполняются для любых комплексных чисел, и, поскольку 0 и 1 являются алгебраическими числами, то эти аксиомы выполняются и для подмножества комплексных чисел — для алгебраических чисел. Следствие доказано.

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

Естественно выбрать функцию «попроще». Самой «простой» функцией для решения этой задачи является, видимо, многочлен.

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

Естественно выбрать функцию «попроще». Самой «простой» функцией для решения этой задачи является, видимо, многочлен.

Решение поставленной задачи обеспечивает **следующая теорема**.

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство.

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Имеем $\quad f(x_p) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \cdot \dfrac{\prod\limits_{m \neq k} (x_p - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)},$

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Имеем $f(x_p) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \cdot \dfrac{\prod\limits_{m \neq k} (x_p - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)}$, причем

$$\frac{\prod\limits_{m \neq k} (x_p - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \delta_{k,p} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq p, \\ 1, & \text{если } k = p \end{cases}$$ — δ-символ Кронекера.

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

$$= y_1 \cdot 0 + \ldots + y_{k-1} \cdot 0 + y_k \cdot 1 + y_{k+1} \cdot 0 + \ldots + y_n \cdot 0 =$$

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

$$= y_1 \cdot 0 + \ldots + y_{p-1} \cdot 0 + y_p \cdot 1 + y_{p+1} \cdot 0 + \ldots + y_n \cdot 0 = y_p.$$

VI. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 19 (об интерполяционном многочлене Лагранжа). *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому $f(x_p) = y_p$.

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

VII. Многочлены от нескольких переменных

Одним из естественных направлений исследований является направление, обусловленное применением **стратегии обогащения модели**. В данном случае мы применим ее следующим образом: рассмотрим многочлены от нескольких переменных.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

VII. Многочлены от нескольких переменных

Одним из естественных направлений исследований является направление, обусловленное применением **стратегии обогащения модели**. В данном случае мы применим ее следующим образом: рассмотрим многочлены от нескольких переменных.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Примерами многочленов являются выражения

$$5x_1x_3 - 4x_1^3x_2 + \frac{2}{3}x_2^4x_3^2, \quad 2xyz^3 - yz^2 - \sqrt{5}y^2z + 0,2xz.$$

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— **одночлены** вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— **степени одночленов**;

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов;

— **переменные** x_i, входящие в состав одночленов;

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов;

— переменные x_i, входящие в состав одночленов;

— **степени каждой переменной** x_i.

VII. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочленов от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов *(??? Как определить ???)*;

— переменные x_i, входящие в состав одночленов;

— степени каждой переменной x_i.

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(5x_1x_3 - 4x_1^3x_2 + \tfrac{2}{3}x_2^4x_3^2\right) =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(5\,\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\,\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \tfrac{2}{3}\,\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\Big) =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(5\,\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\,\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \tfrac{2}{3}\,\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\Big) = \max\{2;\ 4;\ 6\} =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(5\,\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\,\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \tfrac{2}{3}\,\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\Big) = \max\{2;\ 4;\ 6\} = 6.$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(2xyz^3 - yz^2 - \sqrt{5}y^2z + 0,2xz\right) =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(2x^1y^1z^3 - y^1z^2 - \sqrt{5}y^2z^1 + 0,2x^1z^1\right) =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\,\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\,\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\,\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\,\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\,\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\,\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) = \max\{5;\ 3;\ 3;\ 2\} =$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 13. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\,\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\,\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\,\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) = \max\{5;\ 3;\ 3;\ 2\} = 5.$$

VII. Многочлены от нескольких переменных

Определив основные элементы многочлена от нескольких переменных, переходим ко второму пункту типового плана алгебраического исследования.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— **принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны** 0**,** $-\infty$**),**

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— **принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны** 0**,** $-\infty$**)**,

но такие многочлены вырождаются, являются «практически числом». Такие случаи нам мало интересны.

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

например, равенство всех степеней одночленов. Это направление требует дальнейшего исследования.

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— принятие характеристиками элементов объекта равных значений,

— **неизменность формы объекта при изменении его содержания** и т.д.

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— принятие характеристиками элементов объекта равных значений,

— **неизменность формы объекта при изменении его содержания** и т.д.

Например, можно рассмотреть случай, когда при перестановке переменных x_i и x_k мы получаем тот же самый многочлен.

VII. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

— неизменность формы объекта при изменении его содержания и т.д.

Итак, остановимся на первом выделенном направлении исследования.

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k*.*

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k*.*

Например, формой степени 3 являются многочлены
$3x^3 - 2x^2y + 7y^3$,

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k*.*

Например, формой степени 3 являются многочлены
$3x^3 - 2x^2y + 7y^3, \quad -x^2y + xyz - 4xzt + y^2t,$

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k*.*

Например, формой степени 3 являются многочлены
$3x^3 - 2x^2y + 7y^3, \quad -x^2y + xyz - 4xzt + y^2t, \quad 5x^3 - 2y^3 + 7z^3 - t^3.$

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k*.*

Формой степени 5 являются многочлены
$7x^3yz - 2x^2y^3$,

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 14. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Формой степени 5 являются многочлены
$7x^3yz - 2x^2y^3, \quad -x^5 + 5y^5 - 4z^5.$

VII.1. Формы (однородные многочлены)

Итак, экстремальная ситуация принятия характеристиками элементов объекта равных значений, позволила получить понятие *однородного многочлена*.

Обратимся ко второй экстремальной ситуации

— **неизменности формы объекта при изменении его содержания.**

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Например, симметрическими являются многочлены
$2x^2y + 2xy^2$,

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Например, симметрическими являются многочлены
$2x^2y + 2xy^2, \quad 4x^3 + 4y^3 + 4z^3,$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Например, симметрическими являются многочлены
$2x^2y + 2xy^2, \quad 4x^3 + 4y^3 + 4z^3,$
$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3.$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Появление нового объекта порождает новое исследование по типовой схеме. Это означает, что в первую очередь нас будет интересовать структура симметрических многочленов. А точнее, ответ на вопрос: *Из каких элементов состоит симметрический многочлен?*

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Примеры:

$$\begin{gathered} x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 = \\ = \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}. \end{gathered}$$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$

$$+ yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$
$$+ yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

VII.2. Симметрические многочлены

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$

$$+ yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

Видно, что в состав симметрическиого многочлена входят

VII.2. Симметрические многочлены

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$
$$+ yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

Видно, что в состав симметрическиого многочлена входят *многочлены, состоящие из одночленов с одинаковыми степенями,* то есть *однородные многочлены*.

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Теорема 20 (о разложении в сумму симметрических форм). *Любой симметрический полином может быть представлен в виде суммы симметрических форм, т.е. однородных многочленов*[6].

[6] Все одночлены в которых имеют одну и ту же степень.

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Итак, мы выяснили, из каких элементов состоит симметрический многочлен: из однородных многочленов.

Следующий пункт исследования связан с *характеристиками* симметрического многочлена. В первую очередь, характеристики возникают при изучении *экстремальных ситуаций*.

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Итак, мы выяснили, из каких элементов состоит симметрический многочлен: из однородных многочленов.

Следующий пункт исследования связан с *характеристиками* симметрического многочлена. В первую очередь, характеристики возникают при изучении *экстремальных ситуаций*.

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

Пусть однородные многочлены, входящие в состав симметрического многочлена, состоят из переменных только в первой степени.

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{8}$$

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

Пусть однородные многочлены, входящие в состав симметрического многочлена, состоят из переменных только в первой степени.

Получаемые таким образом многочлены мы назовем **основными симметрическими многочленами.**

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (9)$$

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (9)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (9)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (9)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

VII.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (9)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$.

VII.3. Теорема о разложении симметричного многочлена по основным

Теорема 21 (**о разложении симметричного многочлена по основным**). *Любой симметрический полином может быть представлен в виде полинома от основных симметрических полиномов. Коэффициенты в таком представлении представляются целочисленными линейными комбинациями коэфициентов исходного полинома.*

Рассмотреть примеры?

VIII. Дробно-рациональная функция

Несмотря на название «функция» мы рассмотрим один важный с практической точки зрения класс выражений. Это обусловлено тем, что основное применение представленный ниже результат находит в математическом анализе, в котором алгебраические выражения рассматриваются исключительно как способ задания функции.

VIII.1. Определение дробно-рациональной функции

Определение 17. *Функция, задаваемая выражением вида* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, *где* $p(x)$ *и* $q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами, называется* **дробно-рациональной функцией**. *Дробно-рациональная функция* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *называется* **правильной**, *если* $\deg(p) < \deg(q)$, *в противном случае она называется* **неправильной**.. *Дробно-рациональные функции вида* $\dfrac{a}{(x-b)^n}$ *и* $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$, *где* $n \in \mathbb{N}$ *и многочлен* x^2+cx+d *не имеет вещественных корней, называются* **простейшими дробно-рациональными функциями**.

VIII.2. Теорема о разложении дробно-рациональной функции

Теорема 22 (о разложении дробно-рациональной функции). *Всякая дробно рациональная функция*

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-n_n)^{\alpha_n}\cdot s_1(x)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $s_1(x),\ldots,s_m(x)$ *— неразложимые над* $\mathbb{R}$ *многочлены второй степени, представима в виде*

$$q(x)+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{s_1(x)}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{s_1(x)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $q(x)$ *— многочлен*[7].

[7] Многочлен $q(x)$ называется **целой частью** этой дробно-рациональной функции.

Рассмотреть пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?