Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы тензорной алгебры

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 сведение преобразований массивов к матричной алгебре 7

Пример 2 запись тензорного закона 14

Пример 3 оператор дифференцирования как тензор 37

Пример 4 задание тензора в виде тензор-массива 85

Пример 5 нахождения тензорного произведения 128

Пример 6 нахождения базиса тензорного произведения пространств 140

Пример 7 нахождения взаимного (дуального) базиса 153

Пример 8 о нахождении тензор-вектора по массиву координат 177

Пример 9 о нахождении тензор-вектора для оператора дифференцирования 182

Пример 10 о выполнении тензорного закона для координат тензор-вектора 210

Задачи для самостоятельного решения 221

Тензорный закон 222

Задача I.1 222

Задача I.2 223

Задача I.3 224

Определение тензор-функции 225

Задача II.4 225

Задача II.5 226

Задача II.6 227

Задача II.7 228

Задача II.8 229

Задача II.9 230

Задача II.10 231

Задача II.11 232

Задача II.12 233

Операции тензорной алгебры 234

Задача III.13 234

Задача III.14 235

Задача III.15 236

Задача III.16 237

Задача III.17 238

Определение сопряженного пространства и взаимного

(дуального) базиса 239

Задача IV.18 239

Задача IV.19 240

Определение тензорного произведения линейных пространств 241

Задача V.20 241

Ответы и решения 242

Пример 1. *Пусть заданы некоторые массивы* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$, $\left(c^i_{\bullet j}\right)$, $\left(U^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *где* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Записать с помощью матричного умножения массив* $\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *элементы которого вычисляются по правилу*

$$V^{ij}_{\bullet\bullet k} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}. \tag{1}$$

Решение.

Пример 1. *Пусть заданы некоторые массивы* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$, $\left(c^i_{\bullet j}\right)$, $\left(U^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *где* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Записать с помощью матричного умножения массив* $\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *элементы которого вычисляются по правилу*

$$V^{ij}_{\bullet\bullet k} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}. \tag{1}$$

Решение. Фактически нам надо перевести **равенство (1)** на язык матричных операций.

Пример 1. *Пусть заданы некоторые массивы* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$, $\left(c^i_{\bullet j}\right)$, $\left(U^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *где* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Записать с помощью матричного умножения массив* $\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *элементы которого вычисляются по правилу*

$$V^{ij}_{\bullet\bullet k} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}. \qquad (1)$$

Решение. Алгебраическое выражение в правой части этого равенства представляет собой сумму и произведение чисел, поэтому множители и слагаемые можно менять местами:

Пример 1. *Пусть заданы некоторые массивы* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$, $\left(c^i_{\bullet j}\right)$, $\left(U^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *где* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Записать с помощью матричного умножения массив* $\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *элементы которого вычисляются по правилу*

$$V^{ij}_{\bullet\bullet k} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}. \tag{1}$$

Решение. Алгебраическое выражение в правой части этого равенства представляет собой сумму и произведение чисел, поэтому множители и слагаемые можно менять местами:

$$a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} \cdot c^r_{\bullet k}.$$

Пример 1. *Пусть заданы некоторые массивы* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$, $\left(c^i_{\bullet j}\right)$, $\left(U^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *где* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Записать с помощью матричного умножения массив* $\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$, *элементы которого вычисляются по правилу*

$$V^{ij}_{\bullet\bullet k} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}. \tag{1}$$

Решение.

$$a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} = a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} \cdot c^r_{\bullet k}.$$

Зафиксируем в правой части **равенства (1)** значение индекса p. Тогда массив элементов $b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} = b^j_{\bullet q} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} \cdot c^r_{\bullet k}$ можно представить в виде

$$\left(b^j_{\bullet q} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r} \cdot c^r_{\bullet k}\right) = \left(b^j_{\bullet q}\right)\left(U^{pq}_{\bullet\bullet r}\right)\left(c^r_{\bullet k}\right).$$

Договоримся, что если $W^1, W^2, \ldots, W^n$ — квадратные матрицы, то умножение матрицы $\left(a^i_{\bullet p}\right)$ на массив $\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ \ldots \\ W^n \end{pmatrix}$ проводится по правилу, при котором матрицы W^p воспринимаются «как числа», точнее, просто как элементы матрицы-столбца $\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ \ldots \\ W^n \end{pmatrix}$, то есть, например,

$$\begin{pmatrix} a^i_1 & a^i_2 & \ldots & a^i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ \ldots \\ W^n \end{pmatrix} = \left(a^i_1 W^1 + a^i_2 W^2 + \ldots + a^i_n W^n\right).$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 & 56 \\ 59 & 62 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 117 & 124 \\ 131 & 138 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

С учетом последнего соглашения[1] получаем, что **равенство (1)** в матричной записи имеет вид:

$$\left(V^{ij}_{\bullet\bullet k}\right) = \left(a^i_{\bullet p} \cdot b^j_{\bullet q} \cdot c^r_{\bullet k} \cdot U^{pq}_{\bullet\bullet r}\right) = \left(a^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(b^j_{\bullet q}\right) \left(U^{1q}_{\bullet\bullet r}\right) \left(c^r_{\bullet k}\right) \\ \left(b^j_{\bullet q}\right) \left(U^{2q}_{\bullet\bullet r}\right) \left(c^r_{\bullet k}\right) \\ \dots \\ \left(b^j_{\bullet q}\right) \left(U^{nq}_{\bullet\bullet r}\right) \left(c^r_{\bullet k}\right) \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

[1] полагая $W^p = \left(b^j_{\bullet q}\right) \left(U^{pq}_{\bullet\bullet r}\right) \left(c^r_{\bullet k}\right)$.

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение.

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{\cdots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{\cdots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{i\ldots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{i\ldots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\dots}_{ij\dots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{ij\ldots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\dots}_{ijk\dots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\dots}_{ijk\dots}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{\cdots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v \cdot b^w \cdot T^{x\ldots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v_y \cdot b^w \cdot T^{x\ldots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v_y \cdot b^w \cdot T^{xy\ldots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v_y \cdot b^w_z \cdot T^{xy\ldots}_{ijkm}$

Пример 2. *Запишите* ***тензорный закон*** *для* T^{uvw}_{pqrt}.

Решение. $\acute{T}^{uvw}_{pqrt} = a^i_p \cdot a^j_q \cdot a^k_r \cdot a^m_t \cdot b^u_x \cdot b^v_y \cdot b^w_z \cdot T^{xyz}_{ijkm}$.

Вернуться к лекции?

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. Найдем общее решение этого уравнения.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. Найдем общее решение этого уравнения. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами,

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. Найдем общее решение этого уравнения. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, его характеристический многочлен $k^2 - 4 = 0$ имеет два корня: 2 и -2. Значит, общее решение может быть записано в виде:

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. Найдем общее решение этого уравнения. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, его характеристический многочлен $k^2 - 4 = 0$ имеет два корня: 2 и -2. Значит, общее решение может быть записано в виде: $y = Ce^{2x} + De^{-2x}$. Но в данном случае его можно представить и в виде $y = E\,\mathrm{ch}(2x) + F\,\mathrm{sh}(2x)$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. Найдем общее решение этого уравнения. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, его характеристический многочлен $k^2 - 4 = 0$ имеет два корня: 2 и -2. Значит, общее решение может быть записано в виде: $y = Ce^{2x} + De^{-2x}$. Но в данном случае его можно представить и в виде $y = E\,\mathrm{ch}(2x) + F\,\mathrm{sh}(2x)$. Таким образом, имеем два базиса этого пространства: $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$ и $\mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

$$\left(e^{-2x}\right)' =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = -2 \cdot e^{-2x} =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = -2 \cdot e^{-2x} = 0 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x} =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = -2 \cdot e^{-2x} = 0 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x} = D_2^1 e^{2x} + D_2^2 e^{-2x}.$$

Поэтому **матрица D оператора дифференцирования** в базисе **Б** имеет вид:

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в базисах **Б** и **Б**$'$:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{-2x} = D_1^1 e^{2x} + D_1^2 e^{-2x}.$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = -2 \cdot e^{-2x} = 0 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x} = D_2^1 e^{2x} + D_2^2 e^{-2x}.$$

Поэтому **матрица D оператора дифференцирования** в базисе **Б** имеет вид: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

$$(\mathrm{ch}(2x))' =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

$$(\mathrm{ch}(2x))' = 2\,\mathrm{sh}(2x) = 0\,\mathrm{ch}(2x) + 2\,\mathrm{sh}(2x),$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

$$(\mathrm{ch}(2x))' = 2\,\mathrm{sh}(2x) = 0\,\mathrm{ch}(2x) + 2\,\mathrm{sh}(2x),$$

$$(\mathrm{sh}(2x))' =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

$$(\mathrm{ch}(2x))' = 2\,\mathrm{sh}(2x) = 0\,\mathrm{ch}(2x) + 2\,\mathrm{sh}(2x),$$

$$(\mathrm{sh}(2x))' = 2\,\mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(2x) + 0\,\mathrm{sh}(2x),$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б}'$:

$$(\mathrm{ch}(2x))' = 2\,\mathrm{sh}(2x) = 0\,\mathrm{ch}(2x) + 2\,\mathrm{sh}(2x),$$

$$(\mathrm{sh}(2x))' = 2\,\mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(2x) + 0\,\mathrm{sh}(2x),$$

откуда

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\operatorname{ch}(2x), \operatorname{sh}(2x)\}$,

$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Аналогично получаем **матрицу D' этого линейного оператора** в базисе $\text{Б}'$:

$$(\operatorname{ch}(2x))' = 2\operatorname{sh}(2x) = 0\operatorname{ch}(2x) + 2\operatorname{sh}(2x),$$

$$(\operatorname{sh}(2x))' = 2\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}(2x) + 0\operatorname{sh}(2x),$$

откуда $D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

$$\mathrm{ch}(2x) =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

$$\mathrm{ch}(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}; \quad \mathrm{sh}(2x) =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

$$\mathrm{ch}(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}; \quad \mathrm{sh}(2x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x},$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

$$\mathrm{ch}(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}; \quad \mathrm{sh}(2x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x},$$

откуда получаем

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь выполнение **тензорного закона**. Матрицу перехода найти легко:

$$\mathrm{ch}(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}; \quad \mathrm{sh}(2x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x},$$

откуда получаем $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\textbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \textbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\textbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B = A^{-1} =$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Осталось провести вычисления.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}_1^1 = 0$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}_1^1 = 0$. С другой стороны,

$$\acute{D}_1^1 =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}^1_1 = 0$. С другой стороны,

$$\acute{D}^1_1 = a^i_1 \cdot b^1_j \cdot D^j_i =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}_1^1 = 0$. С другой стороны,

$$\acute{D}_1^1 = a_1^i \cdot b_j^1 \cdot D_i^j = a_1^1 \cdot b_1^1 \cdot D_1^1 + a_1^1 \cdot b_2^1 \cdot D_1^2 + a_1^2 \cdot b_1^1 \cdot D_2^1 + a_1^2 \cdot b_2^1 \cdot D_2^2 =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}_1^1 = 0$. С другой стороны,

$$\acute{D}_1^1 = a_1^i \cdot b_j^1 \cdot D_i^j = a_1^1 \cdot b_1^1 \cdot D_1^1 + a_1^1 \cdot b_2^1 \cdot D_1^2 + a_1^2 \cdot b_1^1 \cdot D_2^1 + a_1^2 \cdot b_2^1 \cdot D_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-2) =$$

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \{e^{2x}, e^{-2x}\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\acute{D}^1_1 = 0$. С другой стороны,

$$\acute{D}^1_1 = a^i_1 \cdot b^1_j \cdot D^j_i = a^1_1 \cdot b^1_1 \cdot D^1_1 + a^1_1 \cdot b^1_2 \cdot D^2_1 + a^2_1 \cdot b^1_1 \cdot D^1_2 + a^2_1 \cdot b^1_2 \cdot D^2_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-2) = 0,$$

оправдывая наши ожидания.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо проверять это соотношение для остальных элементов.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо проверять это соотношение для остальных элементов. Тоска смертная. Как упростить вычисления?

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения* $y'' - 4y = 0$ *задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\textbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \textbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\textbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применим матричное исчисление.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого «расставим точки» в индексах в тензорном законе: $\acute{D}^{i}_{\bullet j} = a^{p}_{\bullet j} \cdot b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} = b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} \cdot a^{p}_{\bullet j}$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого «расставим точки» в индексах в тензорном законе: $\acute{D}^{i}_{\bullet j} = a^{p}_{\bullet j} \cdot b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} = b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} \cdot a^{p}_{\bullet j}$.

Элемент b^{i}_{q} мы поставили первым, ибо индекс i, «за который отвечает» этот элемент, стоит первым в $\acute{D}^{i}_{\bullet j}$, причем и в $b^{i}_{\bullet q}$ он первый, значит транспонировать матрицу B не надо.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\mathbf{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого «расставим точки» в индексах в тензорном законе: $\acute{D}^{i}_{\bullet j} = a^{p}_{\bullet j} \cdot b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} = b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} \cdot a^{p}_{\bullet j}$.

Индекс суммирования q должен быть «внутренним», поэтому вторым множителем будет матрица D.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого «расставим точки» в индексах в тензорном законе: $\acute{D}^{i}_{\bullet j} = a^{p}_{\bullet j} \cdot b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} = b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} \cdot a^{p}_{\bullet j}$.

Индекс j является вторым и в $\acute{D}^{i}_{\bullet j}$, и в $a^{p}_{\bullet j}$, поэтому матрица A в транспонировании также не нуждается.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для этого «расставим точки» в индексах в тензорном законе: $\acute{D}^{i}_{\bullet j} = a^{p}_{\bullet j} \cdot b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} = b^{i}_{\bullet q} \cdot D^{q}_{\bullet p} \cdot a^{p}_{\bullet j}$.

Отметим, что индекс p также оказался «внутренним», что подтверждает правильность вычислений.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \left\{e^{2x}, e^{-2x}\right\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, в матричной форме выражение $a^p_{\bullet j} \cdot b^i_{\bullet q} \cdot D^q_{\bullet p}$, равное $b^i_{\bullet q} \cdot D^q_{\bullet p} \cdot a^p_{\bullet j}$, может быть записано в виде $B \cdot D \cdot A$.

Пример 3. *В пространстве решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$ задан оператор дифференцирования. Проверить выполнение* ***тензорного закона*** *для* ***матрицы этого оператора*** *в двух каких-нибудь базисах.*

Решение. $\text{Б} = \{e^{2x}, e^{-2x}\}$, $\quad \text{Б}' = \{\mathrm{ch}(2x), \mathrm{sh}(2x)\}$,

$$D = D_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D' = D_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $B \cdot D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

что и требовалось доказать.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет единичной.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет единичной. Докажем, что функция, каждому базису ставящая в соответствие **матрицу Грама** этого базиса, является

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет единичной. Докажем, что функция, каждому базису ставящая в соответствие **матрицу Грама** этого базиса, является **дважды ковариантным тензором**.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет единичной. Докажем, что функция, каждому базису ставящая в соответствие **матрицу Грама** этого базиса, является **дважды ковариантным тензором**. Итак, надо получить уравнение, то есть вычислить «нечто» двумя способами.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Скалярное произведение — это билинейная форма. Зададим ее в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Это легко сделать, ибо $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (по условию $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ОНБ). Поэтому матрица билинейной формы (в данном примере это **матрица Грама**), будет единичной. Докажем, что функция, каждому базису ставящая в соответствие **матрицу Грама** этого базиса, является **дважды ковариантным тензором**. При проверке **тензорного закона** надо вычислять компоненты в «другом» базисе.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} = (v_i, v_j) =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} = (v_i, v_j) = \left(a_i^p \cdot u_p, a_j^q \cdot u_q\right) =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} = (v_i, v_j) = \left(a_i^p \cdot u_p, a_j^q \cdot u_q\right) = a_i^p \cdot a_j^q \cdot (u_p, u_q) =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} = (v_i, v_j) = \left(a_i^p \cdot u_p, a_j^q \cdot u_q\right) = a_i^p \cdot a_j^q \cdot (u_p, u_q) = a_i^p \cdot a_j^q \cdot T_{pq},$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Итак, выберем два базиса $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$, причем $v_i = a_i^j \cdot u_j$. Тогда $T_{ij} = (u_i, u_j)$,

$$T'_{ij} = (v_i, v_j) = \left(a_i^p \cdot u_p, a_j^q \cdot u_q\right) = a_i^p \cdot a_j^q \cdot (u_p, u_q) = a_i^p \cdot a_j^q \cdot T_{pq},$$

то есть имеем **тензорный закон** для дважды ковариантного тензора.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Вычислить компоненты этого **тензора** в базисе $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$ можно, как минимум, двумя способами:

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Вычислить компоненты этого **тензора** в базисе $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$ можно, как минимум, двумя способами: **по определению матрицы Грама**, и с помощью **тензорного закона**.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$T_{11} =$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$T_{11} = (e_1', e_1') =$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$$T_{11} = (e_1', e_1') = (e_1 + e_2, e_1 + e_2) =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$$T_{11} = (e_1', e_1') = (e_1 + e_2, e_1 + e_2) = (e_1, e_1) + (e_1, e_2) + (e_2, e_1) + (e_2, e_2) =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$$T_{11} = (e_1', e_1') = (e_1 + e_2, e_1 + e_2) = (e_1, e_1) + (e_1, e_2) + (e_2, e_1) + (e_2, e_2) = 2.$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Сначала вычислим эти компоненты, пользуясь **определением матрицы Грама**. Итак, пусть $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$, $e_3' = e_3$. Сначала найдем компоненты по определению. Имеем:

$$T_{11} = (e_1', e_1') = (e_1 + e_2, e_1 + e_2) = (e_1, e_1) + (e_1, e_2) + (e_2, e_1) + (e_2, e_2) = 2.$$

Что-то уж очень громоздко.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$, $e'_3 = e_3$. Вычислим скалярные произведения, с помощью пользуясь **теоремой о вычислении скалярного произведения**:

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$, $e'_3 = e_3$. Вычислим скалярные произведения, с помощью пользуясь **теоремой о вычислении скалярного произведения**:

$$(T'_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2).$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$, $e'_3 = e_3$. Вычислим скалярные произведения, с помощью пользуясь **теоремой о вычислении скалярного произведения**:

$(T'_{11}) = 2$,

$$(T'_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$, $e'_3 = e_3$. Вычислим скалярные произведения, с помощью пользуясь **теоремой о вычислении скалярного произведения**:

$(T'_{11}) = 2, \quad (T'_{12}) = -3,$

$$(T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно полученные три равенства

$$(T'_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(T'_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно полученные три равенства представить в виде

$$(T'_{11}\ T'_{12}\ T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно полученные три равенства представить в виде

$$(T'_{11}\ T'_{12}\ T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно полученные три равенства представить в виде

$$(T'_{11}\ T'_{12}\ T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно найти вторую $(T'_{21}\ T'_{22}\ T'_{23})$ и третью $(T'_{31}\ T'_{32}\ T'_{33})$ строки искомой матрицы Грама.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно полученные три равенства представить в виде

$$(T'_{11}\ T'_{12}\ T'_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, используя **умножение матриц «на макроуровне»**, можно найти вторую $(T'_{21}\ T'_{22}\ T'_{23})$ и третью $(T'_{31}\ T'_{32}\ T'_{33})$ строки искомой матрицы Грама.

Это позволяет повторным применением **умножения матриц «на макроуровне»** найти искомую матрицу Грама.

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$, $e'_3 = e_3$. Аналогично можно представить матрицы $\begin{pmatrix} T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{pmatrix}$, и $\begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$. Вновь используя **умножение матриц «на макроуровне»**, получаем

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^{p}_{\bullet i} \cdot a^{q}_{\bullet j} \cdot T_{pq} =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^{p}_{\bullet i} \cdot a^{q}_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^{p}_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^{q}_{\bullet j},$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^{p}_{\bullet i} \cdot a^{q}_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^{p}_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^{q}_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^p_{\bullet i} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^p_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^q_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

$$T(\mathbf{Б}') =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^{p}_{\bullet i} \cdot a^{q}_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^{p}_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^{q}_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

$$T(\mathbf{Б}') = T' =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^p_{\bullet i} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^p_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^q_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

$$T(\mathbf{Б}') = T' = A^t \cdot T \cdot A =$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^p_{\bullet i} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^p_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^q_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

$$T(\mathbf{Б}') = T' = A^t \cdot T \cdot A = A^t \cdot T(\mathbf{Б}) \cdot A.$$

Пример 4. *В евклидовом трехмерном пространстве с ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *задать скалярное произведение, как тензор-массив в базисах* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $\{e_1 + e_2, -e_1 - 2e_2, e_3\}$.

Решение. Теперь вычислим массив $T(\mathbf{Б}')$ с помощью **тензорного закона**. Имеем:

$$\acute{T}_{ij} = a^p_{\bullet i} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot T_{pq} = a^p_{\bullet i} \cdot T_{pq} \cdot a^q_{\bullet j},$$

следовательно, матричная запись имеет вид

$$T(\mathbf{Б}') = T' = A^t \cdot T \cdot A = A^t \cdot T(\mathbf{Б}) \cdot A.$$

Стоящую впереди матрицу A пришлось транспонировать, поскольку индекс i должен быть первым. Равенство $T' = A^t \cdot T \cdot A$ совпадает **равенством (2)**, полученным с помощью умножения матриц «на макроуровне». Задача решена.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Найти тензорное произведение пространства U многочленов степени, не выше 1, на пространство V симметричных 2×2-матриц.*

Решение. Имеем

$$U =$$

Пример 5. *Найти тензорное произведение пространства U многочленов степени, не выше 1, на пространство V симметричных 2×2-матриц.*

Решение. Имеем

$$U = \left\{ a \cdot x + b \,\middle|\, \{a, b\} \in \mathbb{R} \right\},$$

Пример 5. *Найти тензорное произведение пространства U многочленов степени, не выше 1, на пространство V симметричных 2×2-матриц.*

Решение. Имеем

$$U = \left\{ a \cdot x + b \,\middle|\, \{a, b\} \in \mathbb{R} \right\}, \quad V =$$

Пример 5. *Найти тензорное произведение пространства U многочленов степени, не выше 1, на пространство V симметричных 2×2-матриц.*

Решение. Имеем

$$U = \left\{ a \cdot x + b \,\middle|\, \{a, b\} \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, \{a, b, c\} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Значит, $U \otimes V$ — множество формальных сумм, слагаемые которых имеют вид $(a \cdot x + b) \otimes \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix}$.

Пример 5. *Найти тензорное произведение пространства U многочленов степени, не выше 1, на пространство V симметричных 2×2-матриц.*

Решение. Имеем

$$U = \left\{ a \cdot x + b \,\middle|\, \{a, b\} \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, \{a, b, c\} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Например, следующие два выражения являются элементами пространства $U \otimes V$:

$$(2x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (x + 2) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$x \otimes \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (2x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \otimes \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot x\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-1\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+x\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+2\cdot 1\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot x\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-1\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+x\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+2\cdot 1\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+2\cdot x\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-1\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+2\cdot x\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-1\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Заметим, что на самом деле эти два выражения определяют один и тот же элемент из W. В самом деле

$$(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(x+2)\otimes\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+(2x-1)\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=x\otimes\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+1\otimes\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, оба элемента равны одному и тому же элементу из W, поэтому они равны между собой.

Вернуться к лекции?

Пример 6. *Найти базис пространства* $U \otimes V$ *из* ***примера 5***.

Решение.

Пример 6. *Найти базис пространства* $U \otimes V$ *из* ***примера 5***.

Решение. Всякий многочлен[2] $ax^0 + b \cdot x$ из U определяется двумя параметрами a и b.

[2]Напомним, что в теории многочленов полагают по определению $x^0 = 1$. Таким образом, это равенство считается верным даже при $x = 0$.

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. Всякий многочлен $ax^0 + b \cdot x$ из U определяется двумя параметрами a и b. «Протащим единичку через параметры», то есть положим сначала $(a, b) = (1, 0)$, потом $(a, b) = (0, 1)$, получим систему векторов

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. Всякий многочлен $ax^0 + b \cdot x$ из U определяется двумя параметрами a и b. «Протащим единичку через параметры», то есть положим сначала $(a, b) = (1, 0)$, потом $(a, b) = (0, 1)$, получим систему векторов $\mathbf{Б}_U = \{x^0, x\}$, которая, очевидно, линейно независима.

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_U = \{x^0, x\}$.

«Протаскивая единичку» через три параметра, определяющие матрицу из V, получим систему векторов

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_U = \{x^0, x\}$.

«Протаскивая единичку» через три параметра, определяющие матрицу из V, получим систему векторов

$\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, являющуюся базисом пространства V.

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_U = \{x^0, x\}, \quad \mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Теперь легко найти базис пространства $U \otimes V$:

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_U = \{x^0, x\}$, $\quad \mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Теперь легко найти базис пространства $U \otimes V$:

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение.

$$\mathbf{Б}_{U\otimes V} = \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Найдем в этом базисе, например, координаты вектора

$$(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение.

$$\text{Б}_{U\otimes V} = \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Найдем в этом базисе, например, координаты вектора

$$(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилами отождествления элементов из $U \otimes V$, получаем, что этот вектор можно представить в виде

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение.

$$\mathbf{Б}_{U\otimes V} = \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Найдем в этом базисе, например, координаты вектора

$$(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилами отождествления элементов из $U \otimes V$, получаем, что этот вектор можно представить в виде

$$x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_{U\otimes V} =$

$$= \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 6. *Найти базис пространства $U \otimes V$ из* ***примера 5***.

Решение. $\mathbf{Б}_{U\otimes V} =$

$$= \left\{ x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x^0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[(x+1) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}_{U\otimes V}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилами отождествления элементов из $U \otimes V$, получаем, что этот вектор можно представить в виде

Вернуться к лекции?

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ и $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.*

Решение.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ и $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.*

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \{f^1, f^2\}$, $\mathbf{Б}'^* = \{g^1, g^2\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = \quad , \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

Проще всего найти координаты функции f в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

Проще всего найти координаты функции f в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Обозначим

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ и $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.*

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \{f^1, f^2\}$, $\mathbf{Б}'^* = \{g^1, g^2\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

Проще всего найти координаты функции f в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Обозначим искомые координаты буквами, например, u_1, u_2.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1,2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot f^1\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 y^2\right) + u_2 \cdot f^2\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot f^1\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 y^2\right) + u_2 \cdot f^2\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) =$$

$$= u_1 \cdot c^1 + u_2 c^2.$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot c^1 + u_2 c^2.$$

С другой стороны, по определению f,

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot c^1 + u_2 c^2.$$

С другой стороны, по определению f,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 y^2\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot c^1 + u_2 c^2.$$

С другой стороны, по определению f,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 y^2\right) = c^1 \cdot 1^2 + c^2 \cdot 2^2 = c^1 + 4 \cdot c^2.$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1,2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. Итак, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$, $\mathbf{Б}'^* = \left\{g^1, g^2\right\}$, где f^i, g^i определяются формулами:

$$f^i\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = c^i, \quad g^i\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = d^i.$$

С одной стороны,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2\right) = u_1 \cdot c^1 + u_2 c^2.$$

С другой стороны, по определению f,

$$f\left(c^1 \cdot x^2 + c^2 y^2\right) = c^1 \cdot 1^2 + c^2 \cdot 2^2 = c^1 + 4 \cdot c^2.$$

Итак, $f = f^1 + 4 \cdot f^2$.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ и $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.*

Решение. Остается найти координаты f в базисе $\mathbf{Б}'^*$. Как мы уже знаем, это можно сделать, как минимум, двумя способами:

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.

Решение. Остается найти координаты f в базисе $\mathbf{Б}'^*$. Как мы уже знаем, это можно сделать, как минимум, двумя способами:
во-первых, так же, как и в предыдущем случае,
во-вторых, с помощью **тензорного закона** (по теореме о ковариантных координатах).

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

$$= v_1 \cdot g^1\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) +$$

$$+ v_2 \cdot g^2\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

$$= v_1 \cdot g^1\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) +$$

$$+ v_2 \cdot g^2\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = v_1 \cdot d^1 + v_2 \cdot d^2.$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = v_1 \cdot d^1 + v_2 \cdot d^2.$$

С другой стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = v_1 \cdot d^1 + v_2 \cdot d^2.$$

С другой стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = 5 \cdot d^1 - 3 \cdot d^2.$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \left\{x^2, y^2\right\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \left\{x^2 + y^2, x^2 - y^2\right\}$.

Решение. С одной стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = v_1 \cdot d^1 + v_2 \cdot d^2.$$

С другой стороны,

$$f\left(d^1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) + d^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)\right) = 5 \cdot d^1 - 3 \cdot d^2.$$

Значит, $f = 5 \cdot g^1 - 3 \cdot g^2$.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1, 2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.

Решение. Следовательно,

$$(\ u_i\ ) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\ v_j\ ) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1,2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.

Решение. Следовательно,

$$(\ u_i\ ) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\ v_i\ ) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Имеем $v_i = a_i^j \cdot u_j$, причем матрица перехода, очевидно, равна $(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 7. *В линейном пространстве квадратичных форм канонического вида от двух переменных x, y функция f задается уравнением $f(F) = F(1,2)$. Найти координаты функции f в базисах, взаимных к базисам* $\mathbf{Б} = \{x^2, y^2\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2\}$.

Решение. Следовательно,

$$(\ u_i\ ) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\ v_i\ ) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Имеем $v_i = a_i^j \cdot u_j$, причем матрица перехода, очевидно, равна $(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $(v_i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, что совпадает с предыдущим результатом.

Вернуться к лекции?

Пример 8. *Найти тензор-вектор, имеющий в базисе* $\mathbf{Б} = \{\sin x, \cos x\}$ *массив координат*[3] $\left(T^{i\bullet k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение.

[3] На самом деле кроме массива координат мы задали структуру **тензора**, то есть задали тензор-массив.

Пример 8. *Найти тензор-вектор, имеющий в базисе* $\mathbf{Б} = \{\sin x, \cos x\}$ *массив координат* $\left(T^{i\bullet k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение. Для краткости введем обозначения: $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$. Взаимный базис состоит из функций, определенных соотношениями:

Пример 8. *Найти тензор-вектор, имеющий в базисе* $\mathbf{Б} = \{\sin x, \cos x\}$ *массив координат* $\left(T^{i\bullet k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение. Для краткости введем обозначения: $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$. Взаимный базис состоит из функций, определенных соотношениями:

$$f^i\left(c^1 e_1 + c^2 e_2\right) = f^i\left(c^1 \sin x + c^2 \cos x\right) = c^i.$$

Поэтому данному тензор-массиву соответствует тензор-вектор

Пример 8. *Найти тензор-вектор, имеющий в базисе* $\mathbf{Б} = \{\sin x, \cos x\}$ *массив координат* $\left(T^{i\bullet k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение. Для краткости введем обозначения: $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$. Взаимный базис состоит из функций, определенных соотношениями:

$$f^i\left(c^1 e_1 + c^2 e_2\right) = f^i\left(c^1 \sin x + c^2 \cos x\right) = c^i.$$

Поэтому данному тензор-массиву соответствует тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{i\bullet k}_{\bullet j} \cdot e_i \otimes f^j \otimes e_k =$$

Пример 8. *Найти тензор-вектор, имеющий в базисе* $\mathbf{Б} = \{\sin x, \cos x\}$ *массив координат* $\left(T^{i\bullet k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение. Для краткости введем обозначения: $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$. Взаимный базис состоит из функций, определенных соотношениями:

$$f^i\left(c^1 e_1 + c^2 e_2\right) = f^i\left(c^1 \sin x + c^2 \cos x\right) = c^i.$$

Поэтому данному тензор-массиву соответствует тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{i\bullet k}_{\bullet j} \cdot e_i \otimes f^j \otimes e_k =$$

$$= \sin x \otimes f^1 \otimes \sin x - \sin x \otimes f^2 \otimes \sin x + 2\cos x \otimes f^1 \otimes \cos x.$$

Еще пример или **вернуться к лекции?**

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение.

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Как мы уже отмечали, с линейным оператором $\hat{L}$ «по умолчанию» связывается тензор, ставящий каждому базису в соответствие матрицу оператора $\hat{L}$ в этом базисе.

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Как мы уже отмечали, с линейным оператором $\hat{L}$ «по умолчанию» связывается тензор, ставящий каждому базису в соответствие матрицу оператора $\hat{L}$ в этом базисе. Поэтому сначала выберем какой-либо базис линейного пространства многочленов степени не выше 1, например, базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$.

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

В данном случае эти функции можно ввести и как-нибудь иначе, например,

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

В данном случае эти функции можно ввести и как-нибудь иначе, например,

$$f^1\left(\mu(x)\right) = \mu(0), \quad f^2\left(\mu(x)\right) = \mu'(0).$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x\right] = \left[x^0\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x\right] = \left[x^0\right] = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x^0\right] = [0] = \left[0 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \left[\frac{d}{dx}x\right] = \left[x^0\right] = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ найдем обычным образом:

$$\left[\hat{L}\left(e_1\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\hat{L}\left(e_2\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как мы уже отмечали, линейному оператору сопоставляется тензор, каждому базису ставящий в соответствие матрицу оператора в этом базисе, причем этот тензор является контра-ковариантным.

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$\overrightarrow{\mathbf{L}} =$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j =$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j = 0 \cdot e_1 \otimes f^1 +$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j = 0 \cdot e_1 \otimes f^1 + 1 \cdot e_1 \otimes f^2 +$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j = 0 \cdot e_1 \otimes f^1 + 1 \cdot e_1 \otimes f^2 + 0 \cdot e_2 \otimes f^1 +$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \{f^1, f^2\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j = 0 \cdot e_1 \otimes f^1 + 1 \cdot e_1 \otimes f^2 + 0 \cdot e_2 \otimes f^1 + 0 \cdot e_2 \otimes f^2 =$$

Пример 9. *Найти тензор-вектор, соответствующий оператору дифференцирования в линейном пространстве многочленов степени не выше 1.*

Решение. Выберем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Векторы сопряженного базиса $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2\right\}$ можно задать **формулами**

$$f^1\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^1, \quad f^2\left(\alpha^1 x^0 + \alpha^2 x\right) = \alpha^2.$$

Получили тензор-массив

$$L_{\mathbf{Б}} = \left(L^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_{\bullet j} e_i \otimes f^j = 0 \cdot e_1 \otimes f^1 + 1 \cdot e_1 \otimes f^2 + 0 \cdot e_2 \otimes f^1 + 0 \cdot e_2 \otimes f^2 = 1 \cdot e_1 \otimes f^2.$$

Еще пример или **вернуться к лекции?**

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение.

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. Тензорный закон — это уравнение. Для того, чтобы получить уравнение, надо

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. Тензорный закон — это уравнение. Для того, чтобы получить уравнение, надо «нечто» вычислить двумя разными способами. При доказательстве выполнения **тензорного закона** обычно двумя способами вычисляют

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. Тензорный закон — это уравнение. Для того, чтобы получить уравнение, надо «нечто» вычислить двумя разными способами. При доказательстве выполнения **тензорного закона** обычно двумя способами вычисляют компоненты **тензора** в «новом» базисе.

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. С одной стороны, вектор в базисе B', соответствующем базису $\mathbf{Б}'$, можно представить в виде

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m}.$$

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. С одной стороны, вектор в базисе B', соответствующем базису $\mathbf{Б}'$, можно представить в виде

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m}.$$

С другой стороны, этот вектор можно разложить и по базису B, соответствующему «старому» базису $\mathbf{Б}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}.$$

Но, по предположению, $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j$.

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. С одной стороны, вектор в базисе B', соответствующем базису $\mathbf{Б}'$, можно представить в виде

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m}.$$

С другой стороны, этот вектор можно разложить и по базису B, соответствующему «старому» базису $\mathbf{Б}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}.$$

Но, по предположению, $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j$. По **теореме об изменении векторов взаимного базиса** имеем $\acute{f}^i = b^i_j f^j$.

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. С одной стороны, вектор в базисе B', соответствующем базису $\mathbf{Б}'$, можно представить в виде

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m}.$$

С другой стороны, этот вектор можно разложить и по базису B, соответствующему «старому» базису $\mathbf{Б}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}.$$

Но, по предположению, $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j$. По **теореме об изменении векторов взаимного базиса** имеем $\acute{f}^i = b^i_j f^j$. Отсюда $e_q = b^j_q e'_j$ и $f^p = a^p_i \cdot \acute{f}^i$.

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j, \quad \acute{f}^i = b^i_j f^j, \quad e_q = b^j_q e'_j, \quad f^p = a^p_i \cdot \acute{f}^i.$

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m} =$$

$$= T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m} =$$

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j, \quad \acute{f}^i = b^i_j f^j, \quad e_q = b^j_q e'_j, \quad f^p = a^p_i \cdot \acute{f}^i.$

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m} =$$

$$= T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m} =$$

$$= T^{q_1 \ldots q_k}_{p_1 \ldots p_m} \cdot b^{j_1}_{q_1} e'_{j_1} \otimes \ldots \otimes b^{j_k}_{q_k} e'_{j_k} \otimes a^{p_1}_{i_1} \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes a^{p_m}_{i_m} \acute{f}^{i_m},$$

откуда получаем тензорный закон для координат вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$:

Пример 10. *Докажите, что для* ***массива координат тензор-вектора*** *выполняется* ***тензорный закон***.

Решение. $e'_i = a^j_{\bullet i} \cdot e_j, \quad \acute{f}^i = b^i_j f^j, \quad e_q = b^j_q e'_j, \quad f^p = a^p_i \cdot \acute{f}^i.$

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e'_{j_1} \otimes e'_{j_2} \otimes \ldots \otimes e'_{j_k} \otimes \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \acute{f}^{i_m} =$$

$$= T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m} =$$

$$= T^{q_1 \ldots q_k}_{p_1 \ldots p_m} \cdot b^{j_1}_{q_1} e'_{j_1} \otimes \ldots \otimes b^{j_k}_{q_k} e'_{j_k} \otimes a^{p_1}_{i_1} \acute{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes a^{p_m}_{i_m} \acute{f}^{i_m},$$

откуда получаем тензорный закон для координат вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$:

$$\acute{T}^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} = T^{q_1 \ldots q_k}_{p_1 \ldots p_m} \cdot b^{j_1}_{q_1} \cdot \ldots \cdot b^{j_k}_{q_k} \cdot a^{p_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot a^{p_m}_{i_m}.$$

Вернуться к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.244.) Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.288.) Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\mathbf{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\mathbf{Б'})$.

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.302.) Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.318.) Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Задача II.5. (Ответ приведен на стр.331.) Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Задача II.6. (Ответ приведен на стр.349.) Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Задача II.7. (Ответ приведен на стр.359.) Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\mathbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Задача II.8. (Ответ приведен на стр.368.) Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \operatorname{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Задача II.9. (Ответ приведен на стр.375.) Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Задача II.10. (Ответ приведен на стр.380.) Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Задача II.11. (Ответ приведен на стр.387.) Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Задача II.12. (Ответ приведен на стр.416.) Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Задача III.13. (Ответ приведен на стр.423.) Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes \left(Q^j\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes \left(T^j\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Задача III.14. (Ответ приведен на стр.440.) Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^s_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^s_{\bullet t})$.

Задача III.15. (Ответ приведен на стр.459.) $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Задача III.16. (Ответ приведен на стр.497.) Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $(r^s p_s^{\bullet jk})$, $(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk})$, $(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk})$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Задача III.17. (Ответ приведен на стр.540.) Выполните транспонирования

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Задача IV.18. (Ответ приведен на стр.561.) На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Задача IV.19. (Ответ приведен на стр.626.) Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача V.20. (Ответ приведен на стр.652.) Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x+1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x+y); \quad w_5 = (4x-1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i \cdot P$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a_j \cdot Q$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha \cdot a_\beta \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha \cdot a_\beta \cdot R^{\cdots}_{\cdots}$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a_\beta \cdot R^i_{\dots}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a_u \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a_u \cdot a_v \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a_u \cdot a_v \cdot S_{\ldots}$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a_v \cdot S_{p\ldots}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p \cdot b^q \cdot T$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q \cdot T^{i\cdots}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot a_j \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot a_j \cdot a_k \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot a_j \cdot a_k \cdot b^p \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot a_j \cdot a_k \cdot b^p \cdot b^q \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a_i \cdot a_j \cdot a_k \cdot b^p \cdot b^q \cdot T^{\cdots}_{\cdots}$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a_j \cdot a_k \cdot b^p \cdot b^q \cdot T^{\cdots}_{u\ldots}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a_k \cdot b^p \cdot b^q \cdot T^{\cdots}_{uv\ldots}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p \cdot b^q \cdot T^{\cdots}_{uvw}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q \cdot T^{s\ldots}_{uvw}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m =$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a_m \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a_m \cdot b^p \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a_m \cdot b^p \cdot b^q \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a_m \cdot b^p \cdot b^q \cdot b^r \cdot$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a_m \cdot b^p \cdot b^q \cdot b^r \cdot T^{\cdots}_{\cdots}$

Задача 1. Запишите **тензорный закон** для тензоров с компонентами а) P^i; б) Q_j; в) R^α_β; г) S_{uv}; д) T^{pq}; е) T^{pq}_{ijk}; ж) T^{pqr}_m.

Ответ. а) $\acute{P}^i = b^i_j \cdot P^j$;

б) $\acute{Q}_j = a^k_j \cdot Q_k$;

в) $\acute{R}^\alpha_\beta = b^\alpha_i \cdot a^j_\beta \cdot R^i_j$;

г) $\acute{S}_{uv} = a^p_u \cdot a^q_v \cdot S_{pq}$;

д) $\acute{T}^{pq} = b^p_i \cdot b^q_j \cdot T^{ij}$;

е) $\acute{T}^{pq}_{ijk} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_k \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw}$;

ж) $\acute{T}^{pqr}_m = a^k_m \cdot b^p_u \cdot b^q_v \cdot b^r_w \cdot T^{uvw}_m$.

Решение задачи 2.

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i} \cdot b^j \cdot b^k \cdot T^{\bullet} \quad =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b^j \cdot b^k \cdot T_p^{\bullet} \quad =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b^{k} \cdot T_{p}^{\bullet q} \ =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_{p}^{\bullet qr} =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_{p}^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_{p}^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right],$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) =$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Пусть **Б** $= \{e_1,\ e_2\}$, **Б'** $= \{3e_1 - e_2,\ e_1\}$, — базисы линейного пространства, и для **тензора** T имеем $\mathbf{T}(\text{Б}) = \left(T_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{T}(\text{Б'})$.

Ответ. $\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk} = a_{\bullet i}^{p} \cdot b_{\bullet q}^{j} \cdot b_{\bullet r}^{k} \cdot T_p^{\bullet qr} = a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]$,

$$\left(\acute{T}_{\bullet i}^{\bullet jk}\right) = \left(a_{\bullet i}^{p} \cdot \left[b_{\bullet q}^{j} \cdot T_p^{\bullet qr} \cdot b_{\bullet r}^{k}\right]\right) = \left(a_{\bullet i}^{p}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_1^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \\ \left(b_{\bullet q}^{j}\right) \cdot \left(T_2^{\bullet qr}\right) \cdot \left(b_{\bullet r}^{k}\right)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$

$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$

$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ & \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$

$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) =$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$$

$$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) =$$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\,(x^0 - 2x,\ x^0 - x)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T\,(x^0 - 2x,\ x^0 - x) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$$

$$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$$

$$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$$

$$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть для **тензора** T имеем $T(\{x^0, x\}) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Найдите $T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right)$.

Ответ. $\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T\left(x^0 - 2x,\ x^0 - x\right) = \left(T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet jk}\right) = \left(b^i_{\bullet p} \cdot a^q_{\bullet j} \cdot a^r_{\bullet k} \cdot b^m_{\bullet s} \cdot T^{p\bullet\bullet s}_{\bullet qr}\right) =$$

$$= \left(b^i_{\bullet p}\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{1\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \\ \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 1r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t & \left(a^r_{\bullet k}\right)^t \cdot \left(T^{2\bullet\bullet s}_{\bullet 2r}\right) \cdot \left(b^m_{\bullet s}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \left(a^q_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 16 & -26 \\ 12 & -22 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & -16 \\ 7 & -13 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Одной из основных задач при развитии теории конечномерных линейных пространств является представление практически любой рассматриваемой «конструкций» k в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$:

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Одной из основных задач при развитии теории конечномерных линейных пространств является представление практически любой рассматриваемой «конструкций» k в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$: вектора в виде **столбца координат**, скалярного произведения в **евклидовом пространстве** — с помощью **матрицы Грама**, линейного оператора — с помощью **матрица линейного оператора**, **билинейной формы** — с помощью **матрицы билинейной формы**. Это рассматривается в дальнейшем как один из стандартных способов задания «конструкции» k. Обычно в $\mathbb{R}^n$ этот стандартный способ формулируется в терминах матричной алгебры.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Одной из основных задач при развитии теории конечномерных линейных пространств является представление практически любой рассматриваемой «конструкций» k в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$: вектора в виде **столбца координат**, скалярного произведения в **евклидовом пространстве** — с помощью **матрицы Грама**, линейного оператора — с помощью **матрица линейного оператора**, **билинейной формы** — с помощью **матрицы билинейной формы**. Это рассматривается в дальнейшем как один из стандартных способов задания «конструкции» k. Обычно в $\mathbb{R}^n$ этот стандартный способ формулируется в терминах матричной алгебры.

Как правило, рассматривается также связь между стандартными представлениями «конструкции» k в разных базисах исходного пространства U с помощью **матрицы перехода**.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Одной из основных задач при развитии теории конечномерных линейных пространств является представление практически любой рассматриваемой «конструкций» k в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$: вектора в виде **столбца координат**, скалярного произведения в **евклидовом пространстве** — с помощью **матрицы Грама**, линейного оператора — с помощью **матрица линейного оператора**, **билинейной формы** — с помощью **матрицы билинейной формы**. Это рассматривается в дальнейшем как один из стандартных способов задания «конструкции» k. Обычно в $\mathbb{R}^n$ этот стандартный способ формулируется в терминах матричной алгебры.

Как правило, рассматривается также связь между стандартными представлениями «конструкции» k в разных базисах исходного пространства U с помощью **матрицы перехода**. Как правило, эта связь фиксируется в виде матричного равенства.

Поэтому один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

— обозначения для компонентов массивов значений функции F в этих базисах.

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

— обозначения для компонентов массивов значений функции F в этих базисах.

Обычно доказательство **тензорного закона** использует

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

— обозначения для компонентов массивов значений функции F в этих базисах.

Обычно доказательство **тензорного закона** использует

— равенства из определения функции F;

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

— обозначения для компонентов массивов значений функции F в этих базисах.

Обычно доказательство **тензорного закона** использует

— равенства из определения функции F;

— равенства для **матриц перехода**;

Задача 4. Пусть F — некоторая функция, каждому базису **Б** линейного пространства U сопоставляющая некоторый массив чисел. Как доказать, что F является **тензором**?

Ответ. Один из типовых способов доказательства факта, что F является тензором, является представление этого матричного равенства в тензорных обозначениях, т.е. использование теоремы **о координатах вектора в разных базисах**, теоремы **о матрице оператора в другом базисе**, теоремы **о матрице билинейной формы в разных базисах** и др.

Другой типовой способ состоит в непосредственной проверке того, что F удовлетворяет **определению тензор-функции**.

В соответствии с этим определением нам необходимо ввести:

— обозначения для двух базисов и входящих в них векторов;

— обозначения для компонентов массивов значений функции F в этих базисах.

Обычно доказательство **тензорного закона** использует

— равенства из определения функции F;

— равенства для **матриц перехода**;

— известные свойства функции F.

Решение задачи 5.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Можно сослаться на **теорему о матрице оператора в другом базисе**, но здесь мы приведем другое доказательство, целиком сформулированное на языке тензорной алгебры.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы (L_{ij}) линейного оператора $\hat{L}$** в тензорных обозначениях переписывается в виде $\hat{L}\left(e_i\right) = L[j;i]e_j$.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы (L_{ij}) линейного оператора $\hat{L}$** в тензорных обозначениях переписывается в виде $\hat{L}\left(e_i\right) = L[j;i]e_j$. Индекс i в левой части равенства, по-видимому, должен остаться нижним, поэтому в $L[j;i]$ этот символ, видимо, следует записать внизу.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\mathbf{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы (L_{ij}) линейного оператора $\hat{L}$** в тензорных обозначениях переписывается в виде $\hat{L}\left(e_i\right) = L[j;i]e_j$. Индекс i в левой части равенства, по-видимому, должен остаться нижним, поэтому в $L[j;i]$ этот символ, видимо, следует записать внизу. Для того, чтобы суммирование по j происходило по разновысоким индексам в $L[j;i]$ символ j, видимо, следует записать наверху.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^{j}_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^{j}_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**. Фактически проверять надо только выполнение **тензорного закона**.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^j_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**.

Если $\mathbf{L}\left(\text{Б}'\right) = L' = \left(\acute{L}^j_{\bullet i}\right), \quad \mathbf{L}\left(\text{Б}\right) = L = \left(L^j_{\bullet i}\right), \quad e'_p = a^q_p\, e_q$, то, с одной стороны,

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^j_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**.

Если $\mathbf{L}\left(\text{Б}'\right) = L' = \left(\acute{L}^j_{\bullet i}\right), \quad \mathbf{L}\left(\text{Б}\right) = L = \left(L^j_{\bullet i}\right), \quad e'_p = a^q_p\, e_q$, то, с одной стороны,

$$\hat{L}\left(e'_i\right) = \acute{L}^j_i\, e'_j = \acute{L}^j_i a^k_j\, e_k,$$

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^j_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**.

Если $\mathbf{L}\left(\text{Б}'\right) = L' = \left(\acute{L}^j_{\bullet i}\right), \quad \mathbf{L}\left(\text{Б}\right) = L = \left(L^j_{\bullet i}\right), \quad e'_p = a^q_p\, e_q$, то, с одной стороны,

$$\hat{L}\left(e'_i\right) = \acute{L}^j_i\, e'_j = \acute{L}^j_i a^k_j\, e_k,$$

с другой стороны,

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Итак, попытаемся доказать, что функция **L**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие матрицу $\left(L^j_{\bullet i}\right)$ оператора $\hat{L}$ этом базисе, является **тензором**.

Если $\mathbf{L}\left(\text{Б}'\right) = L' = \left(\acute{L}^j_{\bullet i}\right), \quad \mathbf{L}\left(\text{Б}\right) = L = \left(L^j_{\bullet i}\right), \quad e'_p = a^q_p\, e_q$, то, с одной стороны,

$$\hat{L}\left(e'_i\right) = \acute{L}^j_i\, e'_j = \acute{L}^j_i a^k_j\, e_k,$$

с другой стороны,

$$\hat{L}\left(e'_i\right) = \hat{L}\left(a^p_i\, e_p\right) = a^p_i L^q_p\, e_q.$$

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования[4] k на q.

[4] можно было сделать наоборот, то есть заменить q на k в равенстве $a_i^p L_p^q \, e_q$.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.
На матричном языке последнее равенство имеет вид $AL' = LA$.

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.
На матричном языке последнее равенство имеет вид $AL' = LA$. Для того, чтобы выразить L' надо умножить обе части этого равенства *слева* на матрицу

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.
На матричном языке последнее равенство имеет вид $AL' = LA$. Для того, чтобы выразить L' надо умножить обе части этого равенства *слева* на матрицу $B = A^{-1}$. На языке тензорных обозначений это запишется так:

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.
На матричном языке последнее равенство имеет вид $AL' = LA$. Для того, чтобы выразить L' надо умножить обе части этого равенства *слева* на матрицу $B = A^{-1}$. На языке тензорных обозначений это запишется так: умножим обе части равенства $a_i^p L_p^q = \acute{L}_i^j a_j^q$ на b_q^k и просуммируем по q. Получаем

Задача 5. Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U. Покажите, используя, по возможности, тензорные обозначения, что функция, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $L_{\text{Б}}$ линейного оператора $\hat{L}$** в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ.

$$\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Для того, чтобы сравнить коэффициенты в разложении вектора $\hat{L}\left(e_i'\right)$ по базису **Б**, заменим в выражении $\acute{L}_i^j a_j^k \, e_k$ символ суммирования k на q. Получаем

$$\acute{L}_i^j a_j^q \, e_q = a_i^p L_p^q \, e_q.$$

Из **теоремы о единственности разложения по базису** получаем, что $\acute{L}_i^j a_j^q = a_i^p L_p^q$.
На матричном языке последнее равенство имеет вид $AL' = LA$. Для того, чтобы выразить L' надо умножить обе части этого равенства *слева* на матрицу $B = A^{-1}$. На языке тензорных обозначений это запишется так: умножим обе части равенства $a_i^p L_p^q = \acute{L}_i^j a_j^q$ на b_q^k и просуммируем по q. Получаем

$$a_i^p L_p^q b_q^k = \acute{L}_i^j \underbrace{a_j^q b_q^k}_{=\delta_j^k} = \acute{L}_i^j \delta_j^k = \acute{L}_i^1 \cdot \underbrace{\delta_1^k}_{=0} + \ldots + \acute{L}_i^k \cdot \underbrace{\delta_k^k}_{=1} + \ldots + \acute{L}_i^n \cdot \underbrace{\delta_n^k}_{=0} = \acute{L}_i^k \tag{3}$$

Следовательно, для функции **L** выполняется соответствующий **тензорный закон**, что и требовалось доказать.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$.

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** —

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

$$\acute{F}_{ij} =$$

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\mathbf{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

$$\acute{F}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) =$$

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

$$\acute{F}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = F\left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) =$$

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\mathbf{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.

Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

$$\acute{F}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = F\left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q F(e_p, e_q) =$$

Задача 6. Пусть F — билинейная форма на линейном пространстве U. Покажите, что функция **F**, каждому базису **Б** ставящая в соответствие **матрицу $\mathbf{F}_{\text{Б}}$ билинейной формы** F в базисе **Б**, является **тензором**, и найдите его структуру.

Ответ. Равенство из **определения матрицы** $(F[i;j])$ **билинейной формы F в базисе Б** (выражение для f_{ij}) в тензорных обозначениях имеет вид $F(e_i, e_j) = F[i;j]$. Естественно считать, что в правой части этого равенства индексы i, j стоят «как бы внизу», поэтому можно ожидать, что **F** — дважды ковариантный тензор. Докажем это.
Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**. Имеем

$$\acute{F}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = F\left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q F(e_p, e_q) = a_i^p a_j^q F_{pq},$$

что и требовалось доказать.

Решение задачи 7.

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\mathbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\mathbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\mathbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$.

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

$T'[i] =$

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

$T'[i] = \text{пр}_x(e'_i) =$

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

$T'[i] = \text{пр}_x(e'_i) = \text{пр}_x\left(a_i^j e_j\right) =$

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

$T'[i] = \text{пр}_x(e'_i) = \text{пр}_x\left(a_i^j e_j\right) = a_i^j \text{пр}_x\left(e_j\right) =$

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем

$T'[i] = \text{пр}_x(e'_i) = \text{пр}_x\left(a_i^j e_j\right) = a_i^j \text{пр}_x\left(e_j\right) = a_i^j T[j]$

Задача 7. Пусть x - вектор трехмерного пространства. Докажите, что T — **тензор**, и выясните его строение, если для всякого базиса **Б** $= \{e_1, e_2, e_3\}$, $\quad T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} \text{пр}_x(e_1) \\ \text{пр}_x(e_2) \\ \text{пр}_x(e_3) \end{pmatrix}$.

Ответ. Пусть $T(\textbf{Б}) = \begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$. Тогда для базиса **Б'** и $T(\textbf{Б'}) = \begin{pmatrix} T'[1] \\ T'[2] \\ T'[3] \end{pmatrix}$ по определению **матрицы перехода** получаем
$T'[i] = \text{пр}_x(e'_i) = \text{пр}_x\left(a_i^j e_j\right) = a_i^j \text{пр}_x\left(e_j\right) = a_i^j T[j]$ — **тензорный закон** для ковариантного **тензора** первого ранга.

Решение задачи 8.

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \operatorname{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \operatorname{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \operatorname{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \operatorname{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left((1\ 1)a_i^j E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left((1\ 1)a_i^j E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left((1\ 1)a_i^j E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j T[j]$

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left((1\ 1)a_i^j E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j T[j]$ — **тензорный закон** для ковариантного тензора.

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство симметричных (т.е. $X^t = X$) 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} T[1] \\ T[2] \\ T[3] \end{pmatrix}$, где $T[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Объяснить смысл этой функции, проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. $T'[i] = \mathrm{tr}\left((1\ 1)E'_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left((1\ 1)a_i^j E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j \mathrm{tr}\left((1\ 1)E_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_i^j T[j]$ — **тензорный закон** для ковариантного тензора.

Этот тензор каждому базису ставит в соответствие столбец, составленный из сумм всех элементов каждой базисной матрицы.

Решение задачи 9.

Задача 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Задача 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису $\mathbf{Б} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. Пусть **Б'** $= \{q_1,\ q_2,\ q_3\}$ и **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ — два базиса пространства $\mathcal{P}_2(x)$. Тогда

Задача 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. Пусть **Б'** $= \{q_1,\ q_2,\ q_3\}$ и **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ — два базиса пространства $\mathcal{P}_2(x)$. Тогда, по определению **матрицы перехода** $q_i(x) = a_i^j p_j(x)$, откуда

Задача 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. Пусть **Б'** $= \{q_1,\ q_2,\ q_3\}$ и **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ — два базиса пространства $\mathcal{P}_2(x)$. Тогда, по определению **матрицы перехода** $q_i(x) = a_i^j p_j(x)$, откуда
$q_i(1) = a_i^j p_j(1)$

Задача 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не большей 2 с вещественными коэффициентами. Пусть функция T каждому базису **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ ставит в соответствие столбец $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix}$. Проверить, что это **тензор**, выяснить его структуру.

Ответ. Пусть **Б'** $= \{q_1,\ q_2,\ q_3\}$ и **Б** $= \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ — два базиса пространства $\mathcal{P}_2(x)$. Тогда, по определению **матрицы перехода** $q_i(x) = a_i^j p_j(x)$, откуда
$q_i(1) = a_i^j p_j(1)$ — закон преобразования для ковариантного **тензора** первого ранга.

Решение задачи 10.

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

$$\acute{g}_{ij} =$$

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

$$\acute{g}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) =$$

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

$$\acute{g}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) =$$

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

$$\acute{g}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q \left(e_p, e_q\right) =$$

Задача 10. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие **матрицу Грама** $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Можно сослаться на то, что скалярное произведение — это билинейная форма, для которой соответствующее утверждение мы уже доказали, оно представлено в **соглашении**. Но мы воспроизведем доказательство для этого случая:

$$\acute{g}_{ij} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \left(a_i^p e_p, a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q \left(e_p, e_q\right) = a_i^p a_j^q g_{pq}.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. По **определению обратной матрицы** имеем

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. По **определению обратной матрицы** имеем $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} =$

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. По **определению обратной матрицы** имеем $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \mathbf{E} =$

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. По **определению обратной матрицы** имеем $\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \mathbf{E} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}\Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} =$$

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.
Умножая последнее равенство слева на $\mathbf{A}$ и учитывая $\mathbf{EB} = \mathbf{B}$, получаем

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Умножая последнее равенство слева на $\mathbf{A}$ и учитывая $\mathbf{EB} = \mathbf{B}$, получаем $\mathbf{E} = \mathbf{A}\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Умножая последнее равенство слева на $\mathbf{A}$ и учитывая $\mathbf{EB} = \mathbf{B}$, получаем $\mathbf{E} = \mathbf{A}\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы**, имеем $\mathbf{A}\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, откуда

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Умножая последнее равенство слева на $\mathbf{A}$ и учитывая $\mathbf{EB} = \mathbf{B}$, получаем $\mathbf{E} = \mathbf{A}\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы**, имеем $\mathbf{A}\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, откуда $\Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}}^{-1} = \mathbf{B}\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}\mathbf{B}^t$, что в тензорных обозначениях дает **тензорный закон** для

Задача 11. Докажите, что функция $\mathbf{T}$, каждому базису $\mathbf{Б}$ евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса $\mathbf{Б}$, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Сначала мы запишем доказательство на матричном языке, а потом воспроизведем его в тензорных обозначениях. На матричном языке получаем:

$$\mathbf{E} = \Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} \cdot \Gamma_{\acute{\mathbf{Б}}} = \Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \mathbf{A}.$$

Умножим равенство слева на $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{EB} = \Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Умножая последнее равенство слева на $\mathbf{A}$ и учитывая $\mathbf{EB} = \mathbf{B}$, получаем $\mathbf{E} = \mathbf{A}\Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} \cdot \mathbf{A}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы**, имеем $\mathbf{A}\Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} \cdot \mathbf{A}^t = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}}$, откуда $\Gamma^{-1}_{\acute{\mathbf{Б}}} = \mathbf{B}\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}}\mathbf{B}^t$, что в тензорных обозначениях дает **тензорный закон** для дважды контравариантного тензора.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} =$$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} =$$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\delta_k^i = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\delta_k^i b_m^k = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q b_m^k$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} =$

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $a_i^s b_m^i = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $\underbrace{a_i^s b_m^i}_{\delta_m^s} = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $\underbrace{a_i^s b_m^i}_{\delta_m^s} = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$. Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы**

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $\underbrace{a_i^s b_m^i}_{\delta_m^s} = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$. Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы** $a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} = g^{sp}$, откуда

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $\underbrace{a_i^s b_m^i}_{\delta_m^s} = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$. Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы** $a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} = g^{sp}$, откуда

$$\underbrace{\underbrace{b_s^u a_i^s}_{\delta_i^u}\underbrace{b_p^v a_j^p}_{\delta_j^v}\acute{g}^{ij}}_{\acute{g}^{uv}} = b_s^u b_p^v g^{sp},$$

то есть получили равенство $\acute{g}^{uv} = b_s^u b_p^v g^{sp}$ —

Задача 11. Докажите, что функция **Т**, каждому базису **Б** евклидова пространства U ставящая в соответствие матрицу $\Gamma_{\textbf{Б}}^{-1}$, где $\Gamma_{\textbf{Б}}$ — **матрица Грама** базиса **Б**, является **тензором**, укажите его ранг и «структуру».

Ответ. Переписывая доказательство в тензорных обозначениях, получаем $\acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \delta_k^i = g^{ij}g_{jk}$. Мы уже доказали, что g_{ij} изменяются по **тензорному закону**, поэтому

$$\delta_k^i = \acute{g}^{ij}\acute{g}_{jk} = \acute{g}^{ij}a_j^p a_k^q g_{pq} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} a_k^q.$$

Отсюда $\underbrace{\delta_k^i b_m^k}_{b_m^i} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pq} \underbrace{a_k^q b_m^k}_{\delta_m^q} = a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$.

Поэтому $\underbrace{a_i^s b_m^i}_{\delta_m^s} = a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} g_{pm}$. Следовательно, в силу **теоремы об однозначности обратной матрицы** $a_i^s a_j^p \acute{g}^{ij} = g^{sp}$, откуда

$$\underbrace{\underbrace{b_s^u a_i^s}_{\delta_i^u}\underbrace{b_p^v a_j^p}_{\delta_j^v}\acute{g}^{ij}}_{\acute{g}^{uv}} = b_s^u b_p^v g^{sp},$$

то есть получили равенство $\acute{g}^{uv} = b_s^u b_p^v g^{sp}$ — **тензорный закон** для дважды контравариантного тензора второго ранга.

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

$$u_m'^k a_k^p f_p(x) =$$

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

$$u_m'^k a_k^p f_p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_m^q f_q(k) x^k =$$

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

$$u_m'^k a_k^p f_p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_m^q f_q(k) x^k = \sum_{k=0}^{2} a_m^q u_q^s f_s(x).$$

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

$$u_m'^k a_k^p f_p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_m^q f_q(k) x^k = \sum_{k=0}^{2} a_m^q u_q^s f_s(x).$$

В силу теоремы об **однозначности разложения вектора по базису** получаем систему равенств $u_m'^k a_k^p = a_m^q u_q^s$, из которой следует **тензорный закон**:

Задача 12. Пусть функция T каждому базису $\{f_0, f_1, f_2\}$ линейного пространства многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше 2, ставит в соответствие массив $\begin{pmatrix} u_0^0 & u_0^1 & u_0^2 \\ u_1^0 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^0 & u_2^1 & u_2^2 \end{pmatrix}$, где u_m^k определяются правилом: $u_m^k f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m(k) x^k$. Выясните, является ли T **тензором**, и если да, то укажите структуру этого **тензора**.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}' = \{f_0'(x), f_1'(x), f_2'(x)\}$ — другой базис, причем $f_i'(x) = a_i^j f_j(x)$. Тогда из равенства $u_m'^k f_k'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_m'(k) x^k$ следует

$$u_m'^k a_k^p f_p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_m^q f_q(k) x^k = \sum_{k=0}^{2} a_m^q u_q^s f_s(x).$$

В силу **теоремы об однозначности разложения вектора по базису** получаем систему равенств $u_m'^k a_k^p = a_m^q u_q^s$, из которой следует **тензорный закон**:
$u_m'^k = b_s^k a_m^q u_q^s$.

Решение задачи 13.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$

Пусть $i = 1$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$

Пусть $i = 1$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается **первая строка**.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \cdot 4 & \mathbf{2} \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$

Пусть $i = 1$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается **первая строка**.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$

Пусть $i = 2$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$

Пусть $i = 2$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается **вторая строка**.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ \mathbf{-1} \cdot 4 & \mathbf{-1} \cdot 3 \end{pmatrix}$

Пусть $i = 2$. Когда j пробегает значения от 1 до 2, в матрице $(P_i) \otimes (Q^j)$ получается **вторая строка**.

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \cdot 4 & \mathbf{2} \cdot 3 & \mathbf{2} \cdot 7 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathbf{-1} \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathbf{-1} \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ \mathbf{-1} \cdot 4 & \mathbf{-1} \cdot 3 & \mathbf{-1} \cdot 7 \\ & & \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot 7 \\ & & \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot 7 \\ \mathbf{5} \cdot 4 & \mathbf{5} \cdot 3 & \mathbf{5} \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Найдите **тензорное произведение** тензоров $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $(P_i) \otimes (Q^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$(S_i) \otimes (T^j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot 7 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 14 \\ -4 & -3 & -7 \\ 20 & 15 & 35 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 14.

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^s_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^s_{\bullet t})$.

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(q_i r^s) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(q_i r^s) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(r^s q_i) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(r^s q_i) = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(u_{ij} r^s) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(u_{ij} r^s) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(r^s u_{ij}) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(r^s u_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(u_{ij} v^{st}) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $(u_{ij}v^{st}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 21 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(r^s p_i^{\bullet jk}\right) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(r^s p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(p_i^{\bullet jk} r^s\right) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(p_i^{\bullet jk} r^s\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(w^{s}_{\bullet t} p_i^{\bullet jk}\right) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^s_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^s_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8 & -20 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^{s}_{\bullet t}) \otimes \left(p_{i}^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) \otimes (w^{s}_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(p_{i}^{\bullet jk} w^{s}_{\bullet t}\right) =$

Задача 14. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **тензорные произведения** $(q_i) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (q_i)$, $(u_{ij}) \otimes (r^s)$, $(r^s) \otimes (u_{ij})$, $(u_{ij}) \otimes (v^{st})$, $(r^s) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (r^s)$, $(w^s_{\bullet t}) \otimes \left(p_i^{\bullet jk}\right)$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) \otimes (w^s_{\bullet t})$.

Ответ. $\left(p_i^{\bullet jk} w^s_{\bullet t}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ -16 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Решение задачи 15.

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} +$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} +$
$= \mathbf{2} +$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & \mathbf{-5} & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} + \mathbf{P_2^2} +$
$= \mathbf{2} +$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & \mathbf{-5} & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} + \mathbf{P_2^2} +$
$= \mathbf{2} + (\mathbf{-5}) +$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & \mathbf{-5} & -2 \\ 7 & 4 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} + \mathbf{P_2^2} + \mathbf{P_3^3} =$
$= \mathbf{2} + (\mathbf{-5}) +$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 4 \\ -3 & \mathbf{-5} & -2 \\ 7 & 4 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = \mathbf{P_1^1} + \mathbf{P_2^2} + \mathbf{P_3^3} =$
$= \mathbf{2} + (\mathbf{-5}) + \mathbf{6} =$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$P_i^{\bullet i} = P_1^1 + P_2^2 + P_3^3 =$
$= 2 + (-5) + 6 = 3,$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} =$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \\ \\ \end{pmatrix} =$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + \\ \\ \end{pmatrix}$,

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2}} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + \quad \\ \\ \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2}} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2 + 7} \\ \\ \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 1}} + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7 \\ \\ \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 1}} + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7 \\ \mathbf{3} + \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7 \\ \mathbf{3} + \quad \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7 \\ \mathbf{3 + (-6)} \end{pmatrix} =$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{1\bullet 2}^{\bullet 2} \\ Q_{2\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 \\ 3+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1}} + \mathbf{Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} + (\mathbf{-5}) \end{pmatrix}$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1}} + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1}} + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1}} + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ \mathbf{-1} + \end{pmatrix}$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ \mathbf{-1} + \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ \mathbf{-1} + \end{pmatrix}$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ \mathbf{Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ \mathbf{-1 + (-6)} \end{pmatrix}$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} Q_{1\bullet 1}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 1}^{\bullet 2} \\ Q_{1\bullet 2}^{\bullet 1} + Q_{2\bullet 2}^{\bullet 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ -1 + (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ \mathbf{4} & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ \mathbf{4} & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} \\ -5 & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4+(-6) \end{pmatrix} =$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(R_i^{\bullet ik}\right) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\left(R_i^{\bullet ik}\right) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(R_i^{\bullet ik}\right) = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ -1 + (-6) \end{pmatrix} =$$

Задача 15. $\left(P_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Вычислите **свертки тензоров** $\left(P_i^{\bullet i}\right)$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right)$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right)$, $\left(R_i^{\bullet ik}\right)$.

Ответ. $\left(P_i^{\bullet i}\right) = 2 + (-5) + 6 = 3$, $\left(Q_{i\bullet j}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left(Q_{i\bullet k}^{\bullet i}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\left(R_i^{\bullet ji}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\left(R_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(R_i^{\bullet ik}\right) = \begin{pmatrix} 2 + (-5) \\ -1 + (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Решение задачи 16.

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(w^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(w^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(q_i r^i) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_{s}^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{s}^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{i}^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{i}^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(q_i r^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(q_i r^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(q_i r^i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (2)$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^j) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^i) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} r^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{jt}) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_{s}^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{s}^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{i}^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^{s}_{\bullet t} p_{i}^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{jt}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{jt}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{sj}) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{sj}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{sj}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{sj}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{si}) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{si}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{si}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{si}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{it}) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{it}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{it}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $(u_{ij} v^{it}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 0 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ.

$$\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right) =$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ.

$$\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ.

$$\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ.

$$\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -14 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(w^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(w^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ 5 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ 5 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -20 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ -12 & 23 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right) =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(w^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_{i}^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

Задача 16. Пусть $(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(v^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(w^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(p_i^{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $(q_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r^i) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите с помощью матричного исчисления **внутренние произведения тензоров** $(q_i r^i)$, $(u_{ij} r^j)$, $(u_{ij} r^i)$, $(u_{ij} v^{jt})$, $(u_{ij} v^{sj})$, $(u_{ij} v^{si})$, $(u_{ij} v^{it})$, $\left(r^s p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_s^{\bullet jk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet tk}\right)$, $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right)$.

Ответ. $\left(w^s_{\bullet t} p_i^{\bullet jt}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 15 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 20 & 12 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Решение задачи 17.

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Зафиксируем значения всех тех индексов, положение которых при транспонировании $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$ не изменяется. Например, положим $k = m = n = 1$.

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Зафиксируем значения всех тех индексов, положение которых при транспонировании $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$ не изменяется. Например, положим $k = m = n = 1$.
Выделим элементы **с индексами** $j \in \{1;\ 2\}$ **при** $i = 1$ и

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Зафиксируем значения всех тех индексов, положение которых при транспонировании $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$ не изменяется. Например, положим $k = m = n = 1$.
Выделим элементы **с индексами** $j \in \{1;\ 2\}$ **при** $i = 1$ и **с индексами** $j \in \{1;\ 2\}$ **при** $i = 2$.

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. При транспонировании номер $i = 1$ «большой строки» становится номером

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. При транспонировании номер $i = 1$ «большой строки» становится номером «средней строки»

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (P_{jikmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{11} & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \left(\left\{ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \right)$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Тот же прием применим для получения массива (Q_{ijkmn}), где $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$. Номер строки «среднего уровня» становится номером столбца «среднего уровня»

$$(T_{ijkmn}) = \left(\left\{ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \right)$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Тот же прием применим для получения массива (Q_{ijkmn}), где $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$. Номер строки «среднего уровня» становится номером столбца «среднего уровня»

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Тот же прием применим для получения массива (Q_{ijkmn}), где $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$. Номер строки «среднего уровня» становится номером столбца «среднего уровня»

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (Q_{ikjmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \end{pmatrix},$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix}\right)\right)$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix}\right)\right), \quad (R_{mjkin}) = \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{25} & \mathbf{26} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{31} & \mathbf{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{35} & \mathbf{36} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{14} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{17} & \mathbf{18} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix}\right)\right)$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$.
Номер «большой строки» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, (S_{njkmi}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{21} \\ \mathbf{3} & \mathbf{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{25} \\ \mathbf{7} & \mathbf{27} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{31} \\ \mathbf{13} & \mathbf{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{35} \\ \mathbf{17} & \mathbf{37} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{22} \\ \mathbf{4} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{26} \\ \mathbf{8} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{32} \\ \mathbf{14} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{36} \\ \mathbf{18} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \left(\left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \right)$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$.
Номер столбца «среднего уровня» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \left(\left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \right)$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$.
Номер столбца «среднего уровня» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$.
Номер столбца «среднего уровня» становится номером «маленькой строки».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, (V_{ijmkn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{15} & \mathbf{16} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{14} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{25} & \mathbf{26} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{24} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{35} & \mathbf{36} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{33} & \mathbf{34} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.
Номер строки «среднего уровня» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.
Номер строки «среднего уровня» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

Задача 17. Выполните транспонирования $(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 31 & 32 \\ 33 & 34 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 35 & 36 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ для тензоров $P_{ijkmn} = T_{jikmn}$, $Q_{ijkmn} = T_{ikjmn}$, $R_{ijkmn} = T_{mjkin}$, $S_{ijkmn} = T_{njkmi}$, $V_{ijkmn} = T_{ijmkn}$, $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.

Ответ. Для транспонирования $W_{ijkmn} = T_{inkmj}$.
Номер строки «среднего уровня» становится номером «маленького столбца».

$$(T_{ijkmn}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ \mathbf{17} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{22} \\ \mathbf{23} & \mathbf{24} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ \mathbf{27} & \mathbf{28} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{32} \\ \mathbf{33} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ \mathbf{37} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, (W_{inkmj}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{11} \\ \mathbf{3} & \mathbf{13} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{15} \\ \mathbf{7} & \mathbf{17} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{16} \\ \mathbf{8} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{31} \\ \mathbf{23} & \mathbf{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{35} \\ \mathbf{27} & \mathbf{37} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{32} \\ \mathbf{24} & \mathbf{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{26} & \mathbf{36} \\ \mathbf{28} & \mathbf{38} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Решение задачи 18.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^1 на первом векторе искомого базиса (первое уравнение):

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^1 на первом векторе искомого базиса (первое уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**,

$$\begin{cases} F^1\left(\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2\right) = 1, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^1 на первом векторе искомого базиса (первое уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 x \cdot x^2 + \alpha_1^3 (x^2)^2)\ dx = 1, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^1 на первом векторе искомого базиса (первое уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^2 на первом векторе искомого базиса (второе уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^2 на первом векторе искомого базиса (второе уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ F^2\left(\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2\right) = 0, \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^2 на первом векторе искомого базиса (второе уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \int\limits_0^1 (\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 x(1-x) + \alpha_1^3 (1-x)^2) = 0, \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^2 на первом векторе искомого базиса (второе уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{6} + \dfrac{\alpha_1^3}{3} = 0, \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^3 на первом векторе искомого базиса (третье уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{6} + \dfrac{\alpha_1^3}{3} = 0, \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^3 на первом векторе искомого базиса (третье уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{6} + \dfrac{\alpha_1^3}{3} = 0, \\ F^3\left(\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^3 на первом векторе искомого базиса (третье уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{6} + \dfrac{\alpha_1^3}{3} = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 x \cdot 2x + \alpha_1^3 (2x)^2\right)\,dx = 0. \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала F^3 на первом векторе искомого базиса (третье уравнение): с одной стороны, **по определению векторов взаимного базиса**, с другой стороны, из условия задачи,

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{4} + \dfrac{\alpha_1^3}{5} = 1, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{\alpha_1^2}{6} + \dfrac{\alpha_1^3}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha_1^1}{3} + \dfrac{2\alpha_1^2}{3} + \dfrac{4\alpha_1^3}{3} = 0. \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Эту систему можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Аналогичным образом вычислим двумя способами значения функционалов F^i на втором

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Аналогичным образом вычислим двумя способами значения функционалов F^i на втором и, соответственно, третьем векторе искомого базиса:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3^1 \\ \alpha_3^2 \\ \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. а) *Что надо найти?* Базис пространства U. б) *В каком виде представим ответ?* Список из трех квадратичных форм. в) *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$. г) *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Аналогичным образом вычислим двумя способами значения функционалов F^i на втором и, соответственно, третьем векторе искомого базиса:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3^1 \\ \alpha_3^2 \\ \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью **умножения матриц на макроуровне** эти три уравнения сводятся к одному матричному равенству.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3^1 \\ \alpha_3^2 \\ \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. С помощью **умножения матриц на макроуровне** эти три уравнения сводятся к одному матричному равенству:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \dfrac{20}{3} & -\dfrac{68}{9} & \dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{10}{3} & \dfrac{25}{9} & \dfrac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \dfrac{20}{3} & -\dfrac{68}{9} & \dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{10}{3} & \dfrac{25}{9} & \dfrac{5}{9} \end{pmatrix},$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. $\mathbf{Б} = \{\alpha_1^1 x^2 + \alpha_1^2 xy + \alpha_1^3 y^2;\ \alpha_2^1 x^2 + \alpha_2^2 xy + \alpha_2^3 y^2;\ \alpha_3^1 x^2 + \alpha_3^2 xy + \alpha_3^3 y^2\}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \dfrac{20}{3} & -\dfrac{68}{9} & \dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{10}{3} & \dfrac{25}{9} & \dfrac{5}{9} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Б} = \left\{ \frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2;\ 4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2;\ -x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2 \right\}.$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. б) Базис, взаимный к базису $\acute{\mathbf{Б}}$, можно задать с помощью **стандартной формулы**:

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. б) Базис $\acute{\mathbf{Б}}^* = \{H^1;\ H^2;\ H^3\}$, взаимный к базису $\acute{\mathbf{Б}}$, можно задать с помощью **стандартной формулы**:

$$\begin{cases} H^1\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = p, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. б) Базис $\acute{\mathbf{Б}}^* = \{H^1;\ H^2;\ H^3\}$, взаимный к базису $\acute{\mathbf{Б}}$, можно задать с помощью **стандартной формулы**:

$$\begin{cases} H^1\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = p, \\ H^2\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = q, \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. б) Базис $\acute{\mathbf{Б}}^* = \{H^1;\ H^2;\ H^3\}$, взаимный к базису $\acute{\mathbf{Б}}$, можно задать с помощью **стандартной формулы**:

$$\begin{cases} H^1\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = p, \\ H^2\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = q, \\ H^3\,(p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = r. \end{cases}$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть
$H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$.

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?*

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$$H\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right) = \beta_1 F^1\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right)$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$$\frac{20}{3}(-1) - \frac{10}{3}1^2 = \beta_1 F^1\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(\frac{20}{3}xy - \frac{10}{3}y^2\right)$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$$\frac{20}{3}(-1) - \frac{10}{3}1^2 = \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 0$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:
$\beta_1 = -10$,

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$$H\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right) =$$

$$= \beta_1 F^1\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right)$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$$4(-1)^2 - \frac{68}{9}(-1) + \frac{25}{9}1^2 =$$

$$= \beta_1 F^1\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(4x^2 - \frac{68}{9}xy + \frac{25}{9}y^2\right)$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$4(-1)^2 - \dfrac{68}{9}(-1) + \dfrac{25}{9}1^2 = \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 1 + \beta_3 \cdot 0$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

$$H\left(-x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2\right) =$$

$$= \beta_1 F^1\left(-x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(-x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(-x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2\right)$$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

$-(-1)^2 + \dfrac{8}{9}(-1) + \dfrac{5}{9}1^2 =$

$= \beta_1 F^1\left(-x^2 + \dfrac{8}{9}xy + \dfrac{5}{9}y^2\right) + \beta_2 F^2\left(-x^2 + \dfrac{8}{9}xy + \dfrac{5}{9}y^2\right) + \beta_3 F^3\left(-x^2 + \dfrac{8}{9}xy + \dfrac{5}{9}y^2\right)$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

$-(-1)^2 + \dfrac{8}{9}(-1) + \dfrac{5}{9}1^2 = \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 1$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

$\beta_3 = -\dfrac{4}{3},$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = \beta_1 F^1 + \beta_2 F^2 + \beta_3 F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\beta_1 = -10,$

$\beta_2 = \dfrac{43}{3},$

$\beta_3 = -\dfrac{4}{3},$

откуда $H = -10F^1 + \dfrac{43}{3}F^2 - \dfrac{4}{3}F^3.$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:
$H\left(x^2\right) = \gamma_1 H^1\left(x^2\right) + \gamma_2 H^2\left(x^2\right) + \gamma_3 H^3\left(x^2\right)$,

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:
$(-1)^2 = \gamma_1 \cdot 1 + \gamma_2 \cdot 0 + \gamma_3 \cdot 0$,

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:
$\gamma_1 = 1$,

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$H\,(xy) = \gamma_1 H^1\,(xy) + \gamma_2 H^2\,(xy) + \gamma_3 H^3\,(xy),$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$(-1)\cdot 1 = \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 1 + \gamma_3 \cdot 0,$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

$H\left(y^2\right) = \gamma_1 H^1\left(y^2\right) + \gamma_2 H^2\left(y^2\right) + \gamma_3 H^3\left(y^2\right).$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис $\mathbf{Б}$, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

$1 = \gamma_1 H^1\,(y^2) + \gamma_2 H^2\,(y^2) + \gamma_3 H^3\,(y^2).$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

$1 = \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 0 + \gamma_3 \cdot 1.$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) *Что надо найти?* Координаты функционала. *В каком виде представим ответ?* Столбцами координат. *Сведем к переменным и введем обозначения.* Пусть $H = -10F^1 + \frac{43}{3}F^2 - \frac{4}{3}F^3 = \gamma_1 H^1 + \gamma_2 H^2 + \gamma_3 H^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* Значение функционала H на базисных векторах:

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

$\gamma_3 = 1.$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) $H = -10F^1 + \dfrac{43}{3}F^2 - \dfrac{4}{3}F^3 = H^1 - H^2 + H^3$.

$\gamma_1 = 1,$

$\gamma_2 = -1,$

$\gamma_3 = 1.$

Задача 18. На линейном пространстве U квадратичных форм от переменных x, y функционал H задан формулой: $H(f(x;\ y)) = f(-1;\ 1)$. В **сопряженном пространстве** дан базис $\mathbf{Б}^* = \{F^1, F^2, F^3\}$, где $F^1(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ x^2)\,dx$, $F^2(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 1-x)\,dx$, $F^3(f(x;y)) = \int\limits_0^1 f(x;\ 2x)\,dx$. Найдите а) базис **Б**, **взаимным (дуальным)** к которому является базис $\mathbf{Б}^*$; б) базис, **взаимный к базису** $\acute{\mathbf{Б}} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$; в) координаты функционала H в базисах $\mathbf{Б}^*$ и $\acute{\mathbf{Б}}^*$.

Ответ. в) $H = -10F^1 + \dfrac{43}{3}F^2 - \dfrac{4}{3}F^3 = H^1 - H^2 + H^3$.

Решение задачи 19.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\mathrm{tr}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathrm{tr}(X) + \beta \mathrm{tr}(Y)$, поэтому tr — вектор из V^*.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.
Что это означает?

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Как найти коэффициенты?

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Как найти коэффициенты? Для этого надо понять, что нам известно о функциях f^i.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\textbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к **Б**. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\textbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Как найти коэффициенты? Нам известно действие этих функций на векторы базиса **Б**.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Как найти коэффициенты? Вычислим действие tr на этих векторах.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, с другой стороны,

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, с другой стороны,

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, с другой стороны,

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, с другой стороны,

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 = \alpha$, откуда $\alpha = 1$.

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha$.

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha$.

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha$.

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 = \beta,$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 = \gamma,$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 =$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 = \delta.$$

Задача 19. Пусть $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство 2×2-матриц с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\mathrm{tr} \in V^*$, найти ее координаты в базисе, взаимном к $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Пусть $\mathbf{Б}^* = \{f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4\}$ — базис, взаимный к $\mathbf{Б}$. Нам надо найти координаты функции tr в базисе $\mathbf{Б}^*$.

Что это означает? По определению координат вектора в базисе имеем:

$\mathrm{tr} = \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta f^4$.

Имеем: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \alpha, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta, \quad 1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma.$

Аналогично получаем

$$1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha f^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta f^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma f^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta f^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 = \delta.$$

Итак, $\mathrm{tr} = f^1 + f^2 + f^3 + f^4$.

Решение задачи 20.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 1. $0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad (x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_1 \in U \otimes V$,

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_1 \in U \otimes V$, $\quad w_3 \in U \otimes V$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_1 \in U \otimes V$, $\quad w_3 \in U \otimes V$.

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5) \notin U \otimes V$, так как $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin U$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_1 \in U \otimes V$, $\quad w_3 \in U \otimes V$.

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5) \notin U \otimes V$, так как $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin U$.

Очевидно, что $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5) \in V \otimes U$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_1 \in U \otimes V$, $\quad w_3 \in U \otimes V$.

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5) \notin U \otimes V$, так как $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin U$.

Очевидно, что $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5) \in V \otimes U$. Таким образом, $U \otimes V \neq V \otimes U$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\notin U} \otimes \underbrace{(3x + y)}_{\notin V}$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\notin U} \otimes \underbrace{(3x + y)}_{\notin V} \notin U \otimes V$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U \otimes V \otimes V$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 2. $w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U \otimes V \otimes V \neq U \otimes V$.

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (3x - y - x) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;
2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;
4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (3x - y - x) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Пусть $U = \left\{ ax + by \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, p \in \mathbb{R} \right\}$. Для линейного пространства $U \otimes V$

1. Записать несколько векторов;

2. Из множества $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ выбрать те элементы, которые являются векторами пространства $U \otimes V$, где

$$w_1 = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (4x + 5);$$

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = (5x + 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes (3x + y); \quad w_5 = (4x - 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Доказать, что $w_1 = w_3$;

4. Найти координаты вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в каком-либо базисе пространства $U \otimes V$.

Ответ. 3. По определению $U \otimes V$ получаем:

$$w_3 = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (3x - y - x) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (2x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = w_1,$$

что и требовалось доказать.

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 6\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + 2\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 4\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 6\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + 2\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 4\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Следовательно, столбец координат вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе

$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ равен

Задача 20.

4. Каждый вектор $ax + by$ пространства U определяется двумя параметрами a и b, и каждый вектор $\begin{pmatrix} 0 & t \\ p & 0 \end{pmatrix}$ пространства V определяется двумя параметрами p и t. «Протаскиванием единички через параметры» получаем базисы этих пространств:

$\mathbf{Б}_U = \{1 \cdot x + 0 \cdot y,\ 0 \cdot x + 1 \cdot y\} = \{x, y\}$, $\mathbf{Б}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Положим

$$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 6\left(x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + 2\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 4\left(y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Следовательно, столбец координат вектора $w = (3x - y) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \left\{ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ равен $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?