Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы тензорного анализа

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 координатные линии криволинейной системы координат 7

Пример 2 локального базиса для криволинейной системы координат 36

Пример 3 локального базиса полярной системы координат 56

Пример 4 поиска ортогональной системы координат 67

Пример 5 поиска матрицы перехода от одной криволинейной системы координат к другой 109

Пример 6 поиска значений символов Кристоффеля 159

Пример 7 поиска координатных функций тензорного поля 161

Пример 8 поиска ковариантной производной 192

Поиск локального базиса 284

Задача I.1 285

Матрица перехода для криволинейных систем координат 285

Задача II.2 286

Поиск координатных функций 286

Задача III.3 287

Поиск координатных функций ортогональных криволинейных систем координат 287

Задача IV.4 288

Задача IV.5 289

Задача IV.6 290

Задание тензорного поля в локальном базисе 290

Задача V.7 291

Задача V.8 292

Задача V.9 293

Задача V.10 294

Задача V.11 295

Задача V.12 296

Задача V.13 297

Задача V.14 298

Задача V.15 299

Задача V.16 300

Ковариантная производная 300

Задача VI.17 301

Задача VI.18 302

Задача VI.19 303

Задача VI.20 304

Ответы и решения 305

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии:

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x = -v, \\ y = -v^2. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x = -v, \\ y = -v^2. \end{cases}$ Удобнее, конечно, было бы получить «обычное» уравнение, то есть уравнение вида $f(x, y) = 0$. Для этого

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x = -v, \\ y = -v^2. \end{cases}$ Удобнее, конечно, было бы получить «обычное» уравнение, то есть уравнение вида $f(x, y) = 0$. Для этого выразим u, v через x, y.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \frac{y}{x} - u$.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \frac{y}{x} - u$.

Кроме того, из уравнения $x = u - v$ получим $u =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \frac{y}{x} - u$.

Кроме того, из уравнения $x = u - v$ получим $u = x + v$, откуда

$u =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \frac{y}{x} - u$.

Кроме того, из уравнения $x = u - v$ получим $u = x + v$, откуда $u = x + \frac{y}{x} - u$.

Следовательно, $u = \dfrac{x^2 + y}{2x}$.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $v = \dfrac{y}{x} - u$, $u = \dfrac{x^2 + y}{2x}$.

В итоге получим $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $v = \dfrac{y}{x} - u$, $u = \dfrac{x^2 + y}{2x}$.

В итоге получим $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \\ \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:**

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ —

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ —

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ — часть параболы;

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $v = 1$**:** $y =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $v = 1$**:** $y = (x + 1)^2 - 1$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ — часть параболы;

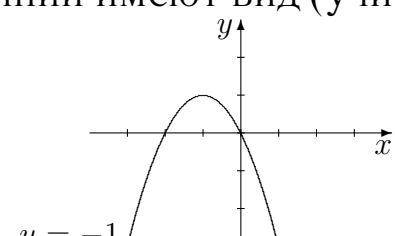
линия $v = 1$**:** $y = (x + 1)^2 - 1$ — часть параболы.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

$u = -1$: $y = -(x + 1)^2 + 1$,



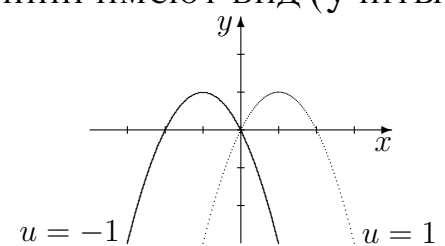
Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

$u = -1$: $y = -(x + 1)^2 + 1$,

$u = 1$: $y = -(x - 1)^2 + 1$,



Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

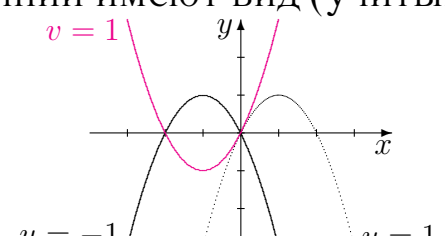
Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

$u = -1$: $y = -(x+1)^2 + 1$,

$u = 1$: $y = -(x-1)^2 + 1$,

$v = 1$: $y = (x+1)^2 - 1$.



Вернуться к лекции?

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение.

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial v} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

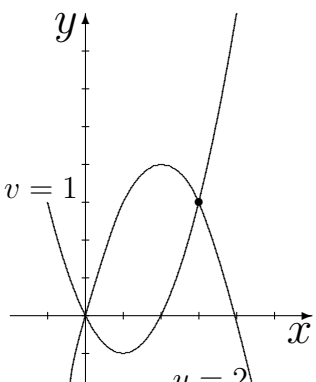
$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial v} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



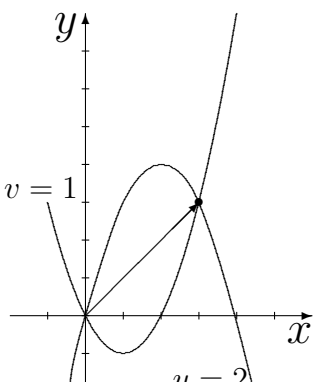
В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} =$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



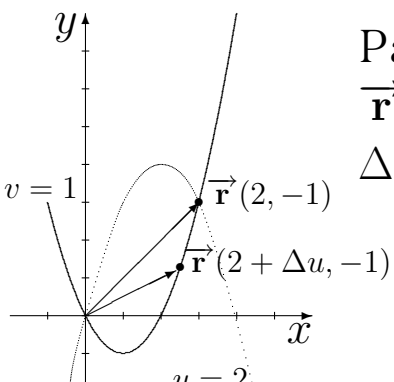
В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



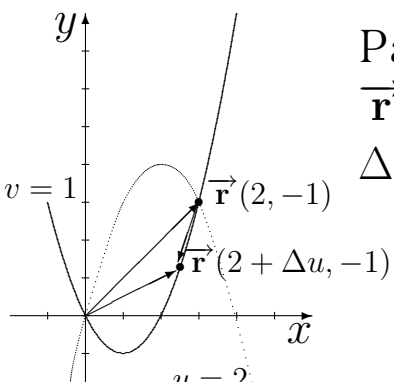
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$),

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



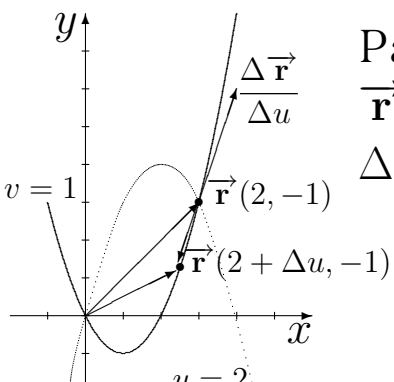
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1)$,

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



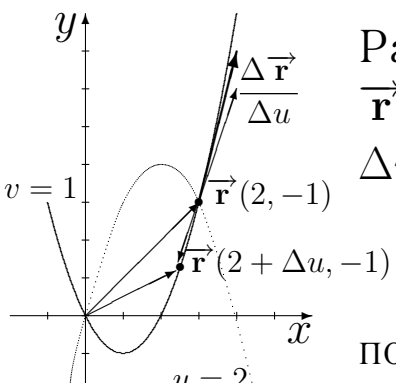
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1)$, $\dfrac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\Delta u}$.

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\vec{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\vec{\mathbf{r}}_u = \vec{\mathbf{i}} + 2u\,\vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{r}}_v = -\vec{\mathbf{i}} - 2v\,\vec{\mathbf{j}}.$



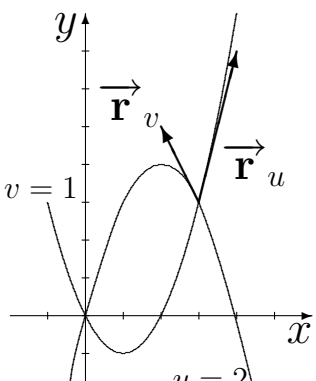
Рассмотрим векторы $\vec{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \vec{\mathbf{r}}(2;\ -1)$, $\dfrac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta u}$. Перейдем к пределу $\Delta u \to 0$, получим вектор $\vec{\mathbf{r}}_u = \dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u}$.

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\vec{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\vec{\mathbf{r}}_u = \vec{\mathbf{i}} + 2u\,\vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{r}}_v = -\vec{\mathbf{i}} - 2v\,\vec{\mathbf{j}}.$



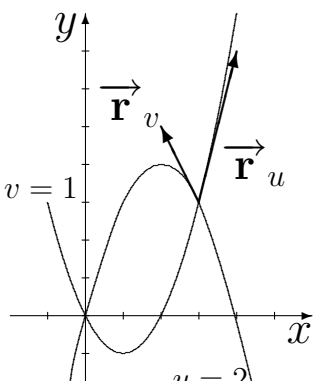
В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\vec{\mathbf{r}} = 3\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

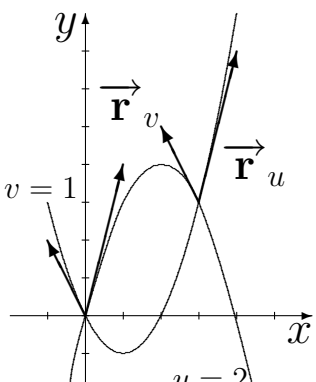
$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, -\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

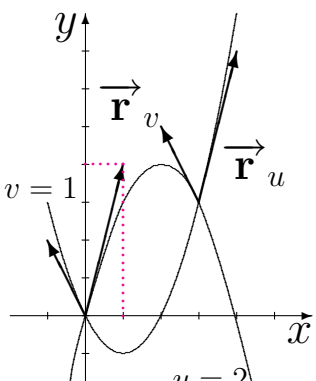
$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, -\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\vec{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\vec{\mathbf{r}}_u = \vec{\mathbf{i}} + 2u\,\vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{r}}_v = -\vec{\mathbf{i}} - 2v\,\vec{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\vec{\mathbf{r}} = 3\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

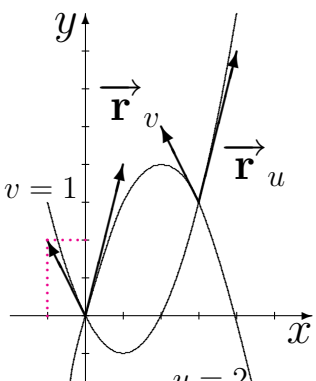
$$\left\{\vec{\mathbf{i}} + 4\,\vec{\mathbf{j}}, -\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\vec{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\vec{\mathbf{r}}_u = \vec{\mathbf{i}} + 2u\,\vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{r}}_v = -\vec{\mathbf{i}} - 2v\,\vec{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\vec{\mathbf{r}} = 3\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

$$\left\{\vec{\mathbf{i}} + 4\,\vec{\mathbf{j}}, -\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}}\right\}.$$

Вернуться к лекции или **рассмотреть еще один пример?**

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Решение. Мы приведем два способа вычисления этих векторов: чисто геометрический и аналитический. Найдем вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ этими двумя способами.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Геометрический способ. Как известно,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{1}{\Delta\varphi} \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi) \right).$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\right)$.

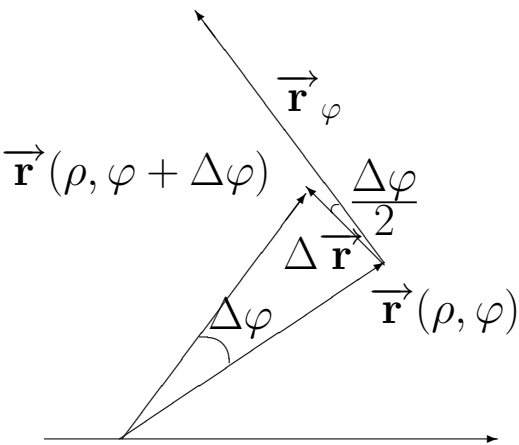


Рис. 1.

Из рис. 1 понятно, что при $\Delta\varphi \to 0$ вектор

$\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)$

в пределе «принимает ортогональное положение» по отношению к радиусу-вектору, то есть стремится к вектору, касательному к окружности $\rho = const$.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\right)$.

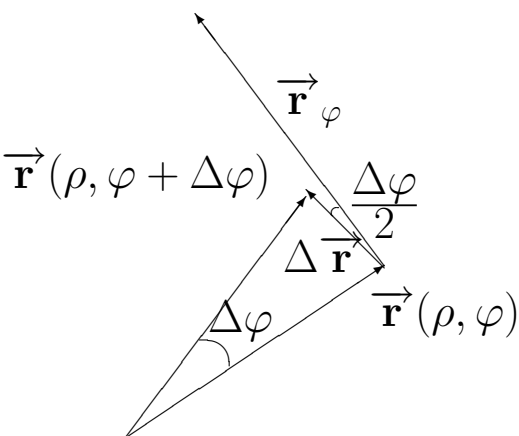


Рис. 1.

Из рис. 1 понятно, что длина вектора $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)$ с точностью до бесконечно малых порядка, большего $\Delta\varphi$, равна длине дуги координатной линии $\rho = const$, отвечающей изменению параметра $\Delta\varphi$, то есть дуги окружности радиуса $\rho = const$ с углом $\Delta\varphi$.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\right)$.

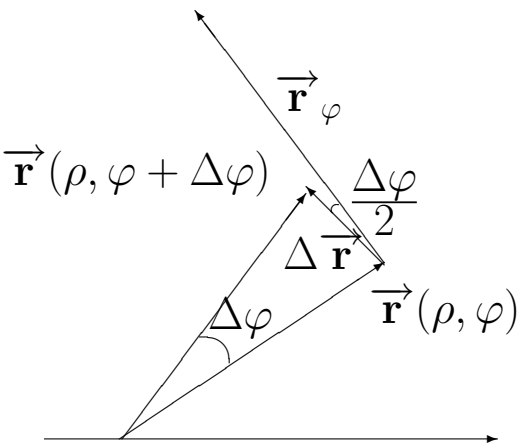


Рис. 1.

Как известно из школьного курса, длина дуги окружности радиуса ρ, соответствующая углу $\Delta\varphi$, равна $\rho\cdot\Delta\varphi$. Поэтому длина вектора $\dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\right)$ с точностью до бесконечно малых порядка, большего, чем $\Delta\varphi$, равна $\dfrac{1}{\Delta\varphi}\cdot\rho\cdot\Delta\varphi = \rho$.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\right)$.

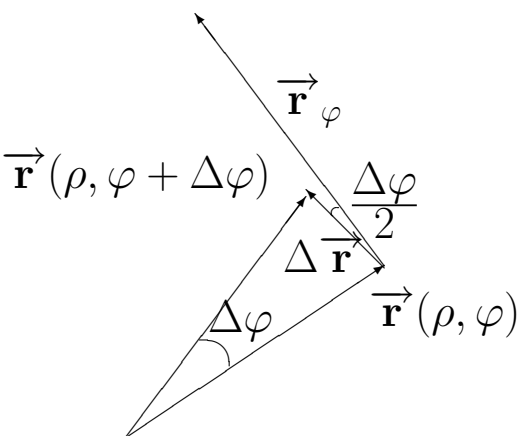


Рис. 1.

Следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$ в точке с радиусом-вектором $\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}$ должен быть вектором, ортогональным к радиусу-вектору, и имеющим длину ρ.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} =$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} =$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Этот вектор, в соответствии с результатами «геометрического метода» имеет длину ρ и перпендикулярен к радиусу-вектору точки, в которой вычисляется этот локальный базис.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Этот вектор, в соответствии с результатами «геометрического метода» имеет длину ρ и перпендикулярен к радиусу-вектору точки, в которой вычисляется этот локальный базис.

Нетрудно вычислить (и геометрически, и аналитически), что вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ является ортом радиуса-вектора, то есть $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{r}}|}\overrightarrow{\mathbf{r}} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u, C)$ или $y(u, C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u, C)$ или $y(u, C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C. Эта константа C определяется значением переменной v, то есть является функцией от v.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u,v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u,v)$, $y(u,v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v) = \Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u,C)$ или $y(u,C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C. Эта константа C определяется значением переменной v, то есть является функцией от v.
Полагая $C = f(v)$ для какой-либо функции f, получаем, учитывая условие $y = ux^2$, искомые координатные функции $x(u,v)$, $y(u,v)$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию
$\Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2uxx_v =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2uxx_v =$$

$$= \left(x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux\right) x_v.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2uxx_v =$$

$$= \left(x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux\right)x_v.$$

Будем искать такую функцию Φ, чтобы $x_v \neq 0$. Тогда получаем

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux = 2ux^3 + x_u\left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux = 2ux^3 + x_u \left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux = 2ux^3 + x_u \left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Теперь видно, что это —

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux = 2ux^3 + x_u \left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Теперь видно, что это — уравнение Бернулли. Решаем его стандартным способом.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2f(x)x}$, откуда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \frac{C - x^2}{2}$. Итак,

$f(x) =$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \frac{C - x^2}{2}$. Итак, $f(x) = \pm\frac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \frac{2u}{x} = -\frac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \frac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \frac{C - x^2}{2}$. Итак, $f(x) = \pm\frac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$u(x) = f(x)g(x) = \pm\frac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

$$\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

$$\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$$

задающую координатные линии этой системы координат. Можно выразить из нее $x(u, v)$ и $y(u, v)$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$

Приведенные на рис.2 графики некоторых координатных линий подтверждают «разумность» полученного ответа:

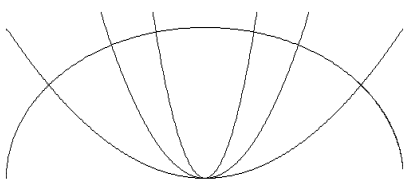


Рис. 2.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ. Возьмем произвольную точку с криволинейными координатами (u_0, v_0). Тогда касательная к координатной линии $u = u_0$, то есть, по условию, к кривой $y = u_0 x^2$, будет нормалью к координатной линии $v = v_0$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ. Возьмем произвольную точку с криволинейными координатами (u_0, v_0). Тогда касательная к координатной линии $u = u_0$, то есть, по условию, к кривой $y = u_0 x^2$, будет нормалью к координатной линии $v = v_0$. Таким образом, из соотношения между угловыми коэффициентами ортогональных линий, получаем, что угол наклона касательной к координатной кривой $v = v_0$ равен $-\dfrac{1}{2u_0 x}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ. Итак, если координатная линия $v = v_0$ в декартовой системе координат имеет уравнение $y = \psi(x, v_0)$, то угловой коэффициент касательной к ней, с одной стороны, равен $\psi'(x, v_0)$, а с другой стороны $-\dfrac{1}{2u_0x}$. Следовательно, получили уравнение

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0x}. \tag{1}$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Это прекрасное уравнение, но у него есть один недостаток — «лишняя буква» u_0. Дело в том, что именно u определяет положение точки на координатной линии $v = v_0$, то есть x, y зависят от u. Но все не так уж плохо, так как у нас в запасе «неизрасходованное» равенство $y = ux^2$. С его помощью можно «выполоть» u из уравнения (1).

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x,$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x, \quad 2y^2 + x^2 = v_0.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x, \quad 2y^2 + x^2 = v_0.$$

Полученный результат совпадает с результатом первого способа.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

откуда

$$\begin{cases} \rho = q^1(q'^1, q'^2, q'^3) = q^1(r, \varphi, \theta) = r\sin\theta \\ \varphi = q^2(q'^1, q'^2, q'^3) = q^2(r, \varphi, \theta) = \varphi \\ z = q^3(q'^3, q'^2, q'^3) = q^3(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta \end{cases} \qquad (2)$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

откуда

$$\begin{cases} \rho = q^1(q'^1, q'^2, q'^3) = q^1(r, \varphi, \theta) = r\sin\theta \\ \varphi = q^2(q'^1, q'^2, q'^3) = q^2(r, \varphi, \theta) = \varphi \\ z = q^3(q'^3, q'^2, q'^3) = q^3(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta \end{cases} \qquad (2)$$

Например, найдем матрицу перехода от цилиндрической системы координат к сферической.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right).$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \theta} = -r\sin\theta.$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial \theta} = -r\sin\theta.$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно

просто вычислить обратную матрицу:

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно просто вычислить обратную матрицу: $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\cos\theta}{r} & 0 & -\frac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix}$.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно просто вычислить обратную матрицу. Однако этот «чисто алгебраический» подход в данном случае нуждается в существенном уточнении: для осуществления перехода к цилиндрической системе координат необходимо еще *выразить коэффициенты полученной матрицы через цилидрические координаты*.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,
$\sin\theta =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$,

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\cos\theta =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$.

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. Поэтому матрицу перехода от сферической к цилиндрической системе координат следует записать так:

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. Поэтому матрицу перехода от сферической к цилиндрической системе координат следует записать так:

$$\left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2 + z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2 + z^2} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение.

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial r} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial r} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_r.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= r\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\theta} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\theta.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\vec{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\vec{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\vec{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\vec{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\vec{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\vec{\mathbf{k}} =$$

$$= r\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\mathbf{j}} - r\sin\theta\,\vec{\mathbf{k}} = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\theta} = \vec{\mathbf{r}}_\theta.$$

Значит, матрица $\left(a^i_j\right)$ найдена правильно. **Вернуться к лекции?**

Пример 6. *Найти* ***символы Кристоффеля*** *в примере 1.*

В последующем примере 8 (см. стр. 192) мы **символы Кристоффеля** будем находить с помощью **операций матричной алгебры**, здесь же мы это сделаем с помощью индивидуального подбора, так как значения **символов Кристоффеля** в рассматриваемой криволинейной системе координат подбираются устно. Имеем:

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2, \end{cases} \text{ откуда } \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{1}{u - v}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \frac{1}{u - v}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{11}^1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = \Gamma_{12}^1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{21}^1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = -\frac{1}{u - v}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \frac{1}{u - v}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{22}^1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Таким образом, массив **символов Кристоффеля** в системе координат примера 1 имеет вид:

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{u-v} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{u-v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? «Канонически» с линейным оператором связывают тензор, ставящий каждому **базису Б** в соответствие **матрицу этого оператора** в базисе **Б**.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? «Канонически» с линейным оператором связывают тензор, ставящий каждому **базису Б** в соответствие **матрицу этого оператора** в базисе **Б**. Как известно из курса линейной алгебры, для того, чтобы найти матрицу линейного оператора $\hat{L}$, надо найти в базисе **Б** координаты образов векторов базиса **Б** относительно действия оператора $\hat{L}$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид:

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) =$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right\}$ получаем

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right\}$ получаем

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\vec{\mathbf{r}}_\rho, \vec{\mathbf{r}}_\varphi, \vec{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{x}})}{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}})}\vec{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\left\{\vec{\mathbf{r}}_\rho, \vec{\mathbf{r}}_\varphi, \vec{\mathbf{r}}_z\right\}$ получаем

$$\hat{L}\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{(\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z, \vec{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\vec{\mathbf{r}}_\rho, \vec{\mathbf{r}}_\varphi, \vec{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{x}})}{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}})}\vec{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\left\{\vec{\mathbf{r}}_\rho, \vec{\mathbf{r}}_\varphi, \vec{\mathbf{r}}_z\right\}$ получаем

$$\hat{L}\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{(\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z, \vec{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\vec{\mathbf{r}}_\rho + z\vec{\mathbf{r}}_z\right),$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

Следовательно, **матрица этого оператора** в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$, имеет вид

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

$$\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

$$\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+z^2} \\ 0 \\ \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

$$\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{z\rho}{\rho^2+z^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z)}{|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

$$\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z^2}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. $\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z^2}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$

Таким образом, соответствующий тензор (точнее, значение тензорного поля в точке $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)$) равен

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^i_j \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{\rho^2}{\rho^2+z^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + \frac{z\rho}{\rho^2+z^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z +$$

$$+\frac{z\rho}{\rho^2+z^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + \frac{z^2}{\rho^2+z^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z.$$

Вернуться к лекции?

Пример 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *— тензорное поле ранга 2, заданное формулой*

$$\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = T^i_j \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u =$$

$$= 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v + uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u$$

в криволинейной системе координат $\Phi(u, v)$*, координатные линии которой имеют вид*

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Найти ковариантную производную тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *в системе координат* $\Phi(u, v)$*. Найти* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *в прямоугольной декартовой системе координат. Убедиться в справедливости* ***теоремы «о тензоре ковариантной производной»*** *сравнением найденных ковариантных производных в точке* $\Phi(1;\ 2)$.

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \frac{e^x}{v} = 0$, то есть $x =$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \frac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y =$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \frac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y = \frac{2}{uv} + u$. Итак получили, что

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \frac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y = \frac{2}{uv} + u$. Итак получили, что

$$\Phi(u, v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \ln uv \, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

$$\Phi(u, v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \ln uv \, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Следовательно,

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

$$\Phi(u, v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \ln uv \, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u} \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v} \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v} \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2} \overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^i \overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^i \overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

$$= \Gamma_{11}^1 \left(\frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right).$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^i \overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

$$= \Gamma_{11}^1 \left(\frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right).$$

Таким образом, сравнивая коэффициенты перед векторами $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 - \frac{2}{u^2 v} & -\frac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} \\ \frac{4}{u^3 v} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uu = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uv = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}vu =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uu = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uv = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}vu = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uu = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uv = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}vu = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uu = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}uv = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}vu = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}vv =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{22}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{22}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

При этом получим еще три матричных уравнения.

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{22}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

У всех четырех полученных уравнений матрица коэффициентов одна и та же, что позволяет свести их к одному матричному уравнению (умножение матриц «на макроуровне»):

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 - \frac{2}{u^2 v} & -\frac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{4}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{4}{uv^3} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 - \frac{2}{u^2 v} & -\frac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{4}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{4}{uv^3} \end{pmatrix}$$

Решая это уравнение каким-либо стандартным методом: с помощью обратной матрицы или методом Гаусса, получаем массив символов Кристоффеля системы координат $\Phi(u, v)$:

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} =$

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?}$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^?_? \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^?_?$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^?_?$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

Заметим, что массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$, заданного выражением

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

Заметим, что массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$, заданного выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) = uv\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u =$

$$= 0\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v + uv\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v,$$

имеет вид $\left(T^i_{\bullet j}\right) =$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 =$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \frac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} +$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \frac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} +$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} -$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} -$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \frac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \frac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 +$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 +$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2 v^2} \cdot uv -$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2 v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 -$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2 v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 - \left(-\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2}\right) \cdot 0 =$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2 v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 - \left(-\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2}\right) \cdot 0 = \frac{2}{uv}.$$

$$\left(\Gamma^k_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s = \dfrac{2}{uv}$.

Нам надо выполнить еще 7 подобных вычислений. Однако эту работу можно несколько облегчить, если применить операции матричной алгебры. Правда, для этого придется «реорганизовать» массив символов Кристоффеля, так как сейчас порядок индексов в этом

массиве ($\begin{smallmatrix} * & & \\ \bullet & * & * \end{smallmatrix}$) отличается от необходимого нам ($\begin{smallmatrix} \bullet & * & \\ * & \bullet & * \end{smallmatrix}$). Для этого выполним транспонирование массива (напомним, что этот массив тензором не является) по 1-2 индексам, (i-тая строка j-той матрицы становится j-той строкой i-той матрицы):

$$\left(\Gamma^{\bullet j}_{i\,\bullet\,k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \left(\frac{\partial T^j_{\bullet k}}{\partial q^i} + \Gamma^{\bullet j}_{i\,\bullet\,s} T^s_{\bullet k} - \Gamma^{\bullet s}_{i\,\bullet\,k} T^j_{\bullet s}\right) =$$

$$
= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{uv^3} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

$$
-\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{uv^3} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{2}{u^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ u - \frac{2}{uv} - u & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{u^2} & \frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{uv} & \frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix},
$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) =$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \qquad \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right) \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u -$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u -$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u -$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u -$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v.$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^j_{\bullet k}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v.$$

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

В точке $\Phi(1;\ 2)$ получаем, соответственно, массив

$$\left(\nabla_i T^j_{\bullet k}\right)\Bigg|_{(u;v)=(1;2)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ковариантную производную в прямоугольной декартовой системе координат. Сначала переведем тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в эту систему координат. Надо сначала найти явные выражения для координатных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Это нетрудно сделать:

$$u(x,y) = y - 2e^{-x} = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^x}{y - 2e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2}.$$

В массиве координат тензора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ проведем замену $u = \dfrac{ye^x - 2}{e^x}$, $v = \dfrac{e^{2x}}{ye^x - 2}$, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектора взаимного базиса $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u$ и $\overrightarrow{\mathbf{r}}^v$. Это можно сделать как с помощью формулы $\overrightarrow{\mathbf{r}}^i = g^{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_j$, так и непосредственно, по опре-

делению, из системы равенств $(\overrightarrow{\mathbf{r}}^i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j) = 0$. Имеем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{e^x}{ye^x - 2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x - 4}{ye^x - 2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{ye^x - 2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x - 2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Заметим, что тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ имеет вид $uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u$, то есть нам нужен только вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u$. Его проще найти непосредственно, чем вычислять дважды ковариантный метрический тензор, и обратный к нему. Если $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u = \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, то имеем:

$$\begin{cases} 1 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}^u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_u) = \dfrac{e^x}{ye^x - 2}\alpha + \dfrac{ye^x - 4}{ye^x - 2}\beta \\ 0 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}^u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v) = \dfrac{ye^x - 2}{e^{2x}}\alpha - 2\dfrac{ye^x - 2}{e^{3x}}\beta \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $\alpha = 2\dfrac{\beta}{e^x}$, подставив в первое уравнение имеем $\beta = 1$, $\alpha = \dfrac{2}{e^x}$.

Поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u = e^x\left(\frac{ye^x-2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x-2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\otimes\left(\left(\frac{2}{e^x}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

$$= 2\frac{ye^x-2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x-2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\frac{ye^x-2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x-2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Значит, так как символы Кристоффеля системы координат x, y — нулевые, то

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+8\frac{ye^x-3}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+\frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+8\frac{ye^x - 3}{e^{3x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+\frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+8\frac{ye^x - 3}{e^{3x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+\frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{4}{e^{2x}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{e^x}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$
$$+ \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

Значит, массив координат $\left(P_{i\bullet k}^{\bullet j}\right)$ тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ равен

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$
$$+ \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

Значит, массив координат $\left(P^{\bullet j}_{i \bullet k}\right)$ тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ равен

$$\left(P^{\bullet j}_{i \bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) =$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x} & 1 \\ e^{2x}\frac{ye^x - 4}{(ye^x - 2)^2} & -\frac{e^{3x}}{(ye^x - 2)^2} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x} & 1 \\ e^{2x}\frac{ye^x - 4}{(ye^x - 2)^2} & -\frac{e^{3x}}{(ye^x - 2)^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного перехода равна:

С другой стороны, так как

$$u(x,y)=\frac{ye^x-2}{e^x},\quad v(x,y)=\frac{e^{2x}}{ye^x-2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б}=\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}'=\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{e^x} & 1\\ e^{2x}\frac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\frac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2}\end{pmatrix}.$$

Матрица обратного перехода равна:

$$(b^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\frac{e^x}{ye^x-2} & \frac{ye^x-2}{e^{2x}}\\ \\ \frac{ye^x-4}{ye^x-2} & -2\frac{ye^x-2}{e^{3x}}\end{pmatrix}.$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x} & 1 \\ e^{2x}\frac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\frac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2} \end{pmatrix}, \ (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \frac{e^x}{ye^x-2} & \frac{ye^x-2}{e^{2x}} \\ \frac{ye^x-4}{ye^x-2} & -2\frac{ye^x-2}{e^{3x}} \end{pmatrix}.$$

Кстати, правильность вычисления матрицы $(b^i_{\bullet j})$ легко проверить, поскольку мы уже нашли координатные функции векторов $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_v$:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{e^x}{ye^x-2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x-4}{ye^x-2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{ye^x-2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x-2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Если $P_{m\bullet\ s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

Если $P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}\right) =$$

Если $P_{m\bullet\ s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u,v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m\bullet\ s}^{\bullet n}\right) = \left(a_{\bullet i}^m\right)^t \left(\begin{array}{c} \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{1\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \\ \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{2\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \end{array} \right) =$$

Если $P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u,v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}\right) = \left(a_{\bullet i}^m\right)^t \left(\begin{array}{c} \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{1\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \\ \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{2\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right) =$$

$$\left(a_{i}^{m}\cdot b_{n}^{j}\cdot a_{k}^{s}\cdot P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}\right)=\left(a_{\bullet i}^{m}\right)^{t}\left(\begin{array}{c}\left(b_{\bullet n}^{j}\right)\left(P_{1\bullet s}^{n}\right)\left(a_{\bullet k}^{s}\right)\\ \left(b_{\bullet n}^{j}\right)\left(P_{2\bullet s}^{n}\right)\left(a_{\bullet k}^{s}\right)\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ -2 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 0.5\end{pmatrix}\end{array}\right)=$$

$$\left(a_{i}^{m}\cdot b_{n}^{j}\cdot a_{k}^{s}\cdot P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}\right)=\left(a_{\bullet i}^{m}\right)^{t}\left(\begin{array}{c}\left(b_{\bullet n}^{j}\right)\left(P_{1\bullet s}^{n}\right)\left(a_{\bullet k}^{s}\right)\\ \left(b_{\bullet n}^{j}\right)\left(P_{2\bullet s}^{n}\right)\left(a_{\bullet k}^{s}\right)\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ -2 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 0.5\end{pmatrix}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right).$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**.

$$\left(a^m_i \cdot b^j_n \cdot a^s_k \cdot P^{\bullet n}_{m\,\bullet\, s}\right) = \left(a^m_{\bullet i}\right)^t \left(\begin{array}{c} \left(b^j_{\bullet n}\right)\left(P^n_{1\bullet s}\right)\left(a^s_{\bullet k}\right) \\ \left(b^j_{\bullet n}\right)\left(P^n_{2\bullet s}\right)\left(a^s_{\bullet k}\right) \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**. Это подтверждает **теорему о тензоре ковариантной производной**.

$$\left(a^m_i \cdot b^j_n \cdot a^s_k \cdot P^{\bullet n}_{m\,\bullet\, s}\right) = \left(a^m_{\bullet i}\right)^t \left(\begin{array}{c} \left(b^j_{\bullet n}\right)\left(P^n_{1\bullet s}\right)\left(a^s_{\bullet k}\right) \\ \left(b^j_{\bullet n}\right)\left(P^n_{2\bullet s}\right)\left(a^s_{\bullet k}\right) \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**. Это подтверждает **теорему о тензоре ковариантной производной**. **Вернуться к лекции?**

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.307.) Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u, v, w)$, заданной формулой $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u, v, w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1, 1, 2)$, то есть вектор $\Phi(1, 1, 2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.310.) Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u, v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u, v)$ имеют вид $x + y = u$, $y = vx$.

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.312.) Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \left\{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u, v, w)$, заданной формулой $\big(\Phi(u, v, w)\big)(x) = (u + vx)(v - wx)$.

Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.314.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.318.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.320.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Задача V.7. (Ответ приведен на стр.322.) Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho, \varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u, v) = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u, v) \mid u > 0,\ v > 0\}$.

Задача V.8. (Ответ приведен на стр.326.) Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.329.) Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.331.) Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Задача V.11. (Ответ приведен на стр.334.) Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача V.12. (Ответ приведен на стр.337.) Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Задача V.13. (Ответ приведен на стр.339.) Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\big((u(x), v(x)\big) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Задача V.14. (Ответ приведен на стр.341.) В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Задача V.15. (Ответ приведен на стр.352.) В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $(\Phi(u,v))(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Задача V.16. (Ответ приведен на стр.354.) С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u, v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2, \quad x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Задача VI.17. (Ответ приведен на стр.357.) В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$.

Задача VI.18. (Ответ приведен на стр.361.) Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Задача VI.19. (Ответ приведен на стр.372.) Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача VI.20. (Ответ приведен на стр.379.) Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u, v, w)$, заданной формулой $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u, v, w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1, 1, 2)$, то есть вектор $\Phi(1, 1, 2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 1. Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u, v, w)$, заданной формулой $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u, v, w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1, 1, 2)$, то есть вектор $\Phi(1, 1, 2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ. Имеем $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u^2 + w^2 & w^2 \\ w^2 & v^2 + w^2 \end{pmatrix}$. Поэтому в базисе $\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции системы координат φ имеют вид

$$(u^2 + w^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (v^2 + w^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $B = T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}}$ находится непосредственно с помощью **формулы**[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

[1] Учтите, что мы **договорились матрицу перехода обозначать буквами A и B**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то есть $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\varphi(u, v, w) = \psi_1(u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \psi_2(u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \psi_3(u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_1(u, v, w) \\ \psi_2(u, v, w) \\ \psi_3(u, v, w) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 + w^2 \\ w^2 \\ v^2 + w^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ 2w^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$\frac{u^2 + v^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{u^2 - v^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & w^2 \\ w^2 & v^2 + w^2 \end{pmatrix} = \varphi(u, v, w),$$

что и требовалось.

Решение задачи 2.

Задача 2. Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u, v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u, v)$ имеют вид $x + y = u$, $y = vx$.

Задача 2. Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u,v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u,v)$ имеют вид $x+y=u$, $y=vx$.

Ответ. Как известно, $a^i_{\bullet j} = \dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$. Поэтому надо выразить ρ, φ через u,v. Для этого выразим x,y через u,v, и попробуем получить требуемые выражения, сравнивая выражения для x,y. По условию имеем $x(1+v)=u$, откуда $x=\dfrac{u}{v+1}$, $y=\dfrac{uv}{v+1}$. Поэтому $\begin{cases} x=\dfrac{u}{v+1}=\rho\cos\varphi \\ y=\dfrac{uv}{v+1}=\rho\sin\varphi \end{cases}$. Имеем $\rho^2=\dfrac{u^2}{(v+1)^2}+\dfrac{u^2v^2}{(v+1)^2}$, откуда $\rho=\dfrac{u\sqrt{v^2+1}}{v+1}$. Далее, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}=v$. Поэтому, учитывая условие $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{u\sqrt{v^2+1}}{v+1} \\ \varphi=\operatorname{arctg} v \end{cases}$$

Поэтому

$$\left(a^i_{\bullet j}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\rho}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{v^2+1}}{v+1} & \dfrac{u(v-1)}{\sqrt{v^2+1}(v+1)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{v^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$\left(b^i_{\bullet j}\right)=\left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{v+1}{\sqrt{v^2+1}} & -\dfrac{u(v-1)}{v+1} \\ 0 & v^2+1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \{1-x, 1+x, 1-x^2\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u,v,w)$, заданной формулой $\big(\Phi(u,v,w)\big)(x) = (u+vx)(v-wx)$.

Задача 3. Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \{1-x, 1+x, 1-x^2\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u,v,w)$, заданной формулой $\big(\Phi(u,v,w)\big)(x) = (u+vx)(v-wx)$.

Ответ. $\Phi(u,v,w) = uv + (v^2 - uw)\,x - vwx^2 =$

$$= \psi_1(u,v,w)(1-x) + \psi_2(u,v,w)(1+x) + \psi_3(u,v,w)\left(1-x^2\right),$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_1(u,v,w) \\ \psi_2(u,v,w) \\ \psi_3(u,v,w) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} uv + uw - vw - v^2 \\ uv - uw - vw + v^2 \\ 2vw \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Задача 4. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Ответ. Ответ. Решая аналогично примеру 4, стр.67, получаем $x^2 + ky^2 = v$.

Задача 4.

Решение (в общем виде).

Случай $y = u \cdot f(x)$**.** Пусть $y = u \cdot f(x)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем:

$$y' = -\frac{1}{u \cdot f'(x)} = -\frac{f(x)}{y \cdot f'(x)},$$

откуда

$$y\,dy = -\frac{f(x)}{f'(x)}\,dx,$$

$$y^2 = C(v) - \int \frac{f(x)}{f'(x)}\,dx.$$

Случай $y = u + f(x)$**.** Пусть $y = u + f(x)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем:

$$y' = -\frac{1}{f'(x)},$$

откуда

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)}.$$

Случай $u = f(x, y)$. Пусть $u = f(x, y)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем, что тангенс наклона кривой $u = const$ равен

$$0 = f_x(x, y) + f_y(x, y)y', \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Следовательно, в точке пересечения угол наклона координатной линии $v = const$ должен быть равен

$$y' = \frac{f_y}{f_x}.$$

Это дифференциальное уравнение и надо решать.

Случай $x = f(u, v)$, $y = f(v, u)$. Итак, $x = f(u, v)$, $y = f(v, u)$ — координатные функции ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Найти функцию f. Будем считать, что «стандартные названия» переменных функции f — это α, β, то есть $f(u, v)$, $f(v, u)$ — результат подстановки соответствующих переменных в выражение $F(\alpha, \beta)$, задающее функцию f. Здесь уместно заметить, что следует различать *функцию* и *выражение*, задающее эту функцию. В частности, одна и та же функция может быть задана различными выражениями, например, $\sin^2 x$ и $1 - \cos^2 x$ задают одну и ту же функцию, а выражение AX может задавать различные функции даже при фиксированной матрице A: дело в том, что под X можно понимать как матрицу-столбец, так и матрицу из нескольких столбцов, и можно даже считать, что X — это скаляр!

$$0 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v) = f_\alpha(u, v)f_\beta(v, u) + f_\beta(u, v)f_\alpha(v, u).$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Задача 5. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Ответ. $2x = v - y^2$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Задача 6. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Ответ. $x^2 = v - \dfrac{y^2}{4}\,(2\ln y - 1)$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho, \varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u, v) = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u, v) \mid u > 0,\ v > 0\}$.

Задача 7. Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho,\varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u,v) = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u,v) \mid u>0,\ v>0\}$.

Ответ. Из решения примера 3, стр.56 следует, что $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ равен радиусу-вектору, а вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$ перпендикулярен радиусу-вектору и равен ему по длине. Поэтому из рис 1, стр.58 векторное поле поворачивает каждый вектор на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки и растягивает его в $\sqrt{2}$ раз.
Теперь найдем его разложение по локальному базису системы координат Ψ. Возьмем в качестве «основы» базис $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. Имеем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{u}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Из сравнения выражений для радиуса-вектора получаем, что $\begin{cases} \rho\cos\varphi = uv \\ \rho\sin\varphi = \frac{u}{v} \end{cases}$, откуда $\rho^2 = u^2v^2 + \frac{u^2}{v^2}$. Учитывая положительность u и v, получаем $\rho = \frac{u}{v}\sqrt{v^4+1}$. Так как u, v положительны, то конец радиуса-вектора $\Psi(u,v)$ находится в первой четверти, то есть можно считать, что $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому из $\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{v\cdot uv} = \frac{1}{v^2}$ следует, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{v^2}$. Согласно **формуле** получаем матрицу A перехода из полярной системы координат в систему Ψ и, находя обратную матрицу,

например, с помощью **присоединенной матрицы**, получаем матрицу B обратного перехода

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{v^4+1}}{v} & \dfrac{v^4-1}{v^2\sqrt{v^4+1}} \\ 0 & \dfrac{-2v}{v^4+1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}$$

Поэтому столбец координат вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ равен

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{u}{v}\sqrt{v^4+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2} \\ -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, разложение вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ по локальному базису системы координат Ψ имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \frac{v^4+1}{2v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Проверка.

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + (-y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\overrightarrow{\mathbf{j}} = (x-y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x+y)\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(uv - \frac{u}{v}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(uv + \frac{u}{v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

С другой стороны

$$\frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \frac{v^4+1}{2v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\left(v\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) - \frac{v^4+1}{2v}\left(u\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{u}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

$$= \frac{2uv^2 - 2u}{2v}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2uv^2 + 2uv^4}{2v^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{T}},$$

что подтверждает правильность результата.

Решение задачи 8.

Задача 8. Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача 8. Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Естественно, применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Компоненты тензорного поля в цилиндрических координатах *Как запишем ответ?* Формулами. *Введем переменные.* Пусть (учитывая, что $\overrightarrow{\mathbf{r}}_z = \overrightarrow{\mathbf{k}}$)

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{u}} = U^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + U^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + U^3\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \\ \overrightarrow{\mathbf{v}} = V^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + V^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + V^3\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \end{cases}$$

Составим уравнение. С одной стороны, значение поля мы обозначили через $\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$, с другой стороны, его можно вычислить с помощью координат:

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \sqrt{\rho^2 + z^2}\left(U^1V^1 + U^2V^2\rho^2 + U^3V^3\right).$$

Мы записали многочлен, соответствующий этой билинейной форме, но нас интересуют it компоненты соответствующего тензорного поля. В соответствии с **равенствами** имеем

$$F_{ij}(\rho, \varphi, z) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right) = \sqrt{\rho^2 + z^2}\left(U^1V^1 + U^2V^2\rho^2 + U^3V^3\right),$$

где, как обычно, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z$, то есть для вычисления компоненты $F_{ij}(\rho, \varphi, z)$ надо положить $U_t = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = i \\ 0 & \text{при} \quad t \neq i \end{cases}$, $V_t = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = j \\ 0 & \text{при} \quad t \neq j \end{cases}$. Итак, билинейной форме соответствует дважды ковариантный тензор второго ранга, каждому базису (локальному базису этой

системы координат) ставящий в соответствие матрицу этой билинейной формы в этом базисе. Локальному базису $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z \right\}$ соответствует матрица

$$(F_{ij}(\rho, \varphi, z)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2 + z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2 + z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2 + z^2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При этом тензорное поле имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}\,(\rho, \varphi, z) = F_{ij}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \sqrt{\rho^2 + z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + \rho^2\sqrt{\rho^2 + z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \sqrt{\rho^2 + z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z.$$

Решение задачи 9.

Задача 9. Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Задача 9. Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Ответ. Как следует из **примера**, функция, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \overrightarrow{\mathbf{r}}_2, \overrightarrow{\mathbf{r}}_3\right\}$ ставящая в соответствие столбец $(F_i(r,\varphi,\theta)) = \begin{pmatrix} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_1\right) \\ \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_2\right) \\ \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_3\right) \end{pmatrix}$, является ковариантным тензором первого ранга. Как нетрудно вычислить с использованием **формул, связывающих сферическую и декартову системы координат**, для сферической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_r$, поэтому, учитывая ортогональность сферической системы координат, получаем $(F_i(r,\varphi,\theta)) = \begin{pmatrix} r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тензорное поле имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}\,(r,\varphi,\theta) = F_i(r,\varphi,\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^i = r^2\overrightarrow{\mathbf{r}}^r.$$

Решение задачи 10.

Задача 10. Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Задача 10. Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Ответ. В силу **формул** матрица перехода A из базиса $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$ в локальный базис полярной системы координат $\Phi(\rho,\varphi)$ имеет вид $A = (a_{ij}(\rho,\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$. Нетрудно вычислить обратную матрицу, например, с помощью **формулы**:

$$B = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица координат поля в полярной системе координат равна

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Иными словами, $\overrightarrow{\mathbf{F}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho - \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$.

Задача 10.

Проверка.

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}-\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}=\rho\cos\varphi\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)-\sin\varphi\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)=$$

$$=\rho\,\overrightarrow{\mathbf{i}}=\overrightarrow{\mathbf{F}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right),$$

в полном соответствии с нашими ожиданиями.

Решение задачи 11.

Задача 11. Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 11. Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Ответ. В локальном базисе системы координат Φ тензорному полю $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ соответствует тензор-массив

$$\left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу перехода. В соответствии с **формулой** необходимо сначала u, v выразить через α, β:

$$\begin{cases} u = \alpha \\ uv = \ln\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \alpha \\ v = \dfrac{\ln\beta}{\alpha} \end{cases}$$

Поэтому, согласно **формуле**

$$A = \left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\ln\beta}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Согласно **формуле** имеем

$$B = A^{-1} = \alpha\beta \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha\beta} & 0 \\ \dfrac{\ln\beta}{\alpha^2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

(переход к переменным u, v не требуется). Следовательно,

$$\left(\acute{T}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta \ln \beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta \ln \beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta \ln \beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ln \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta \ln \beta}{\alpha} \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ln \beta \\ 0 & \dfrac{\beta \ln^2 \beta}{\alpha} - \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta \ln \beta}{\alpha} \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \ln \beta \\ 0 & \beta^2 \left(\ln^2 \beta - \alpha^2\right) \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Задача 12. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Ответ. **Билинейной форме** соответствует дважды ковариантный тензор, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) ставящий в соответствие **матрицу этой билинейной формы**. Введем базис[2] $= \{e_1(x), e_2(x)\} = \{x^0, x\}$. Пусть $f(x) = \alpha + \beta x$, $u(x) = U^1 + U^2 x = U^i e_i(x)$, $v(x) = V^1 + V^2 x = V^i e_i(x)$. Тогда $F_{ij}(f) = f(0)e_i(0)e_j(0) + f(1)e_i(1)e_j(1)$. Например[3], $F_{11}(\alpha + \beta x) = (\alpha + \beta \cdot 0) \cdot 1 \cdot 1 + (\alpha + \beta \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 = 2\alpha + \beta$. Продолжая в том же духе, получаем

$$\text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x\} \quad \mathbf{F}[\alpha + \beta x]\,(\mathbf{Б}) = (F_{ij}(\alpha + \beta x)) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

---

[2] Соответствующий, так сказать, «прямолинейной» системе координат.

[3] Напомним, что в теории многочленов полагают по определению $0^0 = 0$, хотя в математическом анализе значение 0^0 не определено.

Решение задачи 13.

Задача 13. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\left((u(x), v(x)\right) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Задача 13. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\big((u(x), v(x)\big) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Ответ.

$$\text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x\} \quad \mathbf{F}[\alpha + \beta x]\,(\mathbf{Б}) = (F_{ij}(\alpha + \beta x)) = \begin{pmatrix} 2\alpha & \frac{\beta}{3} \\ \frac{\beta}{3} & \frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 14.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. **Линейному оператору** соответствует контра-ковариантный тензор второго ранга, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) ставящий в соответствие матрицу оператора в этом базисе. Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Будем действовать по определению. Возьмем матрицу $Y = \Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Локальный базис в точке с этом «радиусом-вектором» имеет вид

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix}, \quad M_v = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix}, \quad M_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу **определения матрицы линейного оператора**,

$$\hat{P}[Y]\,(M_u) = M_u Y - Y M_u = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2u\,(1+v^2) & 2uv(vw+1) \\ 2uv(vw+1) & 2uv^2\,(1+w^2) \end{pmatrix} = p_{11} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{21} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

Сравнивая коэффициенты матриц в левых и правых частях последнего равенства, получаем систе-

му уравнений

$$\begin{cases} p_{11} = 2u\left(1+v^2\right) \\ v \cdot p_{11} + u \cdot p_{21} = 2uv(vw+1) \\ vw \cdot p_{11} + uw \cdot p_{21} + uv \cdot p_{31} = 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{cases},$$

которую можно представить в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) \\ 2uv(vw+1) \\ 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix}.$$

Равенства

$$\hat{P}[Y]\left(M_v\right) = M_v Y - Y M_v = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2u^2v & u^2(vw+1) \\ u^2(vw+1) & 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix} = p_{12} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

сводятся к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u^2v \\ u^2(vw+1) \\ 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix}.$$

$$\hat{P}[Y]\left(M_w\right) = M_w Y - Y M_w = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & u^2v^2 \\ u^2v^2 & 2u^2v^2w \end{pmatrix} = p_{13} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{23} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

что приводит к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2v^2 \\ 2u^2v^2w \end{pmatrix}.$$

Эти три матричных уравнения сводятся с помощью **«умножения на макроуровне»** к одному матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\,(1+v^2) & 2u^2v & 0 \\ 2uv(vw+1) & u^2(vw+1) & u^2v^2 \\ 2uv^2\,(1+w^2) & 2uv^2\,(1+w^2) & 2u^2v^2w \end{pmatrix}.$$

Решая это матричное уравнение методом Гаусса или с помощью обратной матрицы[4], получаем

$$\mathbf{P}_\Phi(Y) = \left(P^i_{\bullet j}(u,v,w)\right) = \begin{pmatrix} 2u\,(1+v^2) & 2u^2v & 0 \\ 2v^2(w-v) & u\,(2vw-2v^2+1) & v^2u \\ 2(w-v) & -\dfrac{u(w-2v)}{v} & uvw \end{pmatrix}.$$

---

[4] которая, кстати, равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{u} & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & -\frac{w}{uv} & \frac{1}{uv} \end{pmatrix}$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & uv \\ uv & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u(1+vw) \\ u(1+vw) & 2uv \end{pmatrix} =$$

$$= 2uv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u(1+vw) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2uv \\ u(1+vw) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2uv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u(1 + vw) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2uv \\ u(1 + vw) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ uv & 2uvw \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uvw \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ uv \\ 2uvw \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2uv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u(1 + vw) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2uv \\ u(1 + vw) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uvw \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ uv \\ 2uvw \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u, v, w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1 + vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u, v, w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v, w)$, равна

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u, v, w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v, w)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u, v, w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v, w)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2u\,(1+v^2) & 2u^2 v & 0 \\ 2v^2(w-v) & u\,(1+2vw-2v^2) & uv^2 \\ 2(v-w) & -\dfrac{u(w-2v)}{v} & uvw \end{pmatrix},$$

что совпадает с результатами расчетов, приведенных в первом решении.

Решение задачи 15.

Задача 15. В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $(\Phi(u,v))(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Задача 15. В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $(\Phi(u,v))(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Ответ. $\left(P^i_{\bullet j}(u,v)\right) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$.

Решение задачи 16.

Задача 16. С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u, v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2, \quad x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Задача 16. С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u,v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2, \quad x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Легко находится выражение x, y через u, v: $\begin{cases} x = uv \\ y = u/v \end{cases}$. Поэтому $\overrightarrow{\mathbf{r}} = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_u = v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}} \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{u}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} \end{cases}$$

В процессе решения примера 3, стр.56, мы нашли локальный базис полярной системы координат:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Можно найти матрицу перехода из локального базиса полярной системы координат в локальный базис системы Φ с помощью этих разложений, но проще воспользоваться **формулой**. Выразим ρ, φ через u, v, учитывая $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi = uv \\ \rho\sin\varphi = \frac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{u}{v}\sqrt{v^4+1} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{v^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{v^2}{\sqrt{v^4+1}} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{v^4+1}} \end{cases}$$

Следовательно, матрица перехода равна $A = \left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v^4+1}}{v} & \frac{u\left(v^4-1\right)}{2v^2} \\ 0 & -\frac{2v}{\sqrt{v^4+1}} \end{pmatrix}$. Матрицу обратного перехода можно найти, например, с помощью **формулы**, получаем $B = \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \frac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\frac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}$. Тензор-вектор из условия задачи имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = T^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + T^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi,$$

поэтому массив его координат в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$ равен

$$\left(\acute{T}^i\right) = \left(b^i_{\bullet j}T^j\right) = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \frac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\frac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u\left(2v^2+1-v^4\right)}{2v^2} \\ \frac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 17.

Задача 17. В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$.

Задача 17. В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$.

Ответ. Эта задача аналогична рассмотренному выше примеру 8, стр.192. Найдем векторы локального базиса системы координат $\Phi(u,v)$:

$$\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x, \quad \Phi_u(x) = \Phi_1(x) = v + x, \quad \Phi_v(x) = \Phi_2(x) = u + x.$$

Поэтому локальный базис имеет вид $\mathbf{Б} = \{v + x, u + x\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в этом локальном базисе:

$$\begin{cases} \hat{D}\Phi_1(x) = \dfrac{d}{dx}\Phi_1(x) = 1 = d^1_{\bullet 1}\Phi_1(x) + d^2_{\bullet 1}\Phi_2(x) = (vd^1_{\bullet 1} + ud^2_{\bullet 1}) + (d^1_{\bullet 1} + d^2_{\bullet 1})\,x \\ \hat{D}\Phi_2(x) = \dfrac{d}{dx}\Phi_2(x) = 1 = d^1_{\bullet 2}\Phi_1(x) + d^2_{\bullet 2}\Phi_2(x) = (vd^1_{\bullet 2} + ud^2_{\bullet 2}) + (d^1_{\bullet 2} + d^2_{\bullet 2})\,x \end{cases}$$

откуда $\mathbf{D}(\mathbf{Б}) = \big(D^i_{\bullet j}\big) = \dfrac{1}{u-v}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Этому **массиву соответствует тензор-вектор**

$$\overrightarrow{\mathbf{D}} = -\frac{1}{u-v}\Phi_1 \otimes \Phi^1 - \frac{1}{u-v}\Phi_1 \otimes \Phi^2 + \frac{1}{u-v}\Phi_2 \otimes \Phi^1 + \frac{1}{u-v}\Phi_2 \otimes \Phi^2.$$

Найдем символы Кристоффеля системы координат $\Phi(u,v)$ с помощью **формулы**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\Phi_1 = 0 = \Gamma^1_{11}\Phi_1 + \Gamma^2_{11}\Phi_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\Phi_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}\Phi_2 = 1 = \Gamma^1_{12}\Phi_1 + \Gamma^2_{12}\Phi_2 = \Gamma^1_{21}\Phi_1 + \Gamma^2_{21}\Phi_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\Phi_2 = 0 = \Gamma^1_{22}\Phi_1 + \Gamma^2_{22}\Phi_2 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $\left(\Gamma^i_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} \\ -\dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u-v} \\ \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Координаты ковариантной производной найдем по **формуле** (массив $\left(D^p_{\bullet q}\right)$ мы нашли выше):

$$\left(\nabla_i D^j_{\bullet k}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} D^j_{\bullet k}\right) + \left(\Gamma^j_{\bullet im} D^m_{\bullet k}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ik} D^j_m\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2} \\ -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2} \\ \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{u-v} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} \\ -\dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u-v} \\ \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{1}{u-v}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{u-v} \\ -\frac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u-v} \\ \frac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(u-v)^2} & \frac{1}{(u-v)^2} \\ -\frac{1}{(u-v)^2} & -\frac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{(u-v)^2} & -\frac{1}{(u-v)^2} \\ \frac{1}{(u-v)^2} & \frac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{(u-v)^2} & -\frac{1}{(u-v)^2} \\ \frac{1}{(u-v)^2} & \frac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{(u-v)^2} & \frac{1}{(u-v)^2} \\ -\frac{1}{(u-v)^2} & -\frac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ответ: ковариантная производная этого тензорного поля нулевая.

Решение задачи 18.

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

и, согласно **свойству скалярного произведения**

$$\begin{cases} F_{11} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 1 \\ F_{12} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \\ F_{21} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 0 \\ F_{22} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \end{cases}$$

Значит, $\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

и, согласно **свойству скалярного произведения**

$$\begin{cases} F_{11} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 1 \\ F_{12} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \\ F_{21} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 0 \\ F_{22} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \end{cases}$$

Значит, $\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем

$$\nabla_i F_{jk} = \frac{\partial}{\partial q^i}F_{jk} - \Gamma^m_{ij}F_{mk} - \Gamma^m_{ik}F_{jm}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

Массив значений символов Кристоффеля для полярной системы координат нетрудно «извлечь» из **формулы**, но его следует преобразовать[5] для второго и, соответственно, третьего слагаемого последней формулы следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \qquad\qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) =$$

[5] То есть транспонировать массивы. Говорить о транспонировании *тензоров* в этом случае нельзя, во-первых, поскольку проводится перестановка разновысоких индексов и, самое главное, массив символов Кристоффеля тензором не является (поскольку этот массив характеризует «геометрию данной криволинейной системы координат», и при переходе к другой системе координат меняется почти непредсказуемо).

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

Массив значений символов Кристоффеля для полярной системы координат нетрудно «извлечь» из **формулы**, но его следует преобразовать для второго и, соответственно, третьего слагаемого последней формулы следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) =$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) =$$

$$= -\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно **формуле**, получаем

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно **формуле**, получаем

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_i T_{jk}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно **формуле**, получаем

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_i T_{jk}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k = \rho\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \rho\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

Решение задачи 19.

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Согласно **формуле**,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ik} F_{jm}\right). \tag{6}$$

Массив символов Кристоффеля цилиндрической системы координат мы вычислили выше, но его удобнее «реорганизовать» для второго и, соответственно, третьего слагаемых формулы (7) следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \qquad\qquad\qquad\qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) =$$

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Согласно **формуле**,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ik} F_{jm}\right). \tag{7}$$

Массив символов Кристоффеля цилиндрической системы координат мы вычислили выше, но его удобнее «реорганизовать» для второго и, соответственно, третьего слагаемых формулы (7) следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Массив координат данного векторного поля **уже получен**. Поэтому, считая $q^1 = \rho$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$, получаем

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma_{ij}^{\bullet\bullet m} F_{mk}\right) - \left(\Gamma_{i\bullet k}^{\bullet m} F_{jm}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho\left(3\rho^2+2z^2\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{pmatrix} -$$

$$
-\left(\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}
\end{array}\right) -
$$

$$
-\left(\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho\left(2\rho^2+z^2\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & -\rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}.
$$

Следовательно, согласно **формуле**, ковариантная производная равна

$$
\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{F}} = \nabla_i F_{jk} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + \rho^3 \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \rho \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z + \right.
$$

$$
\left. + z \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + z\rho^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + z \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \right).
$$

Решение задачи 20.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Для того, чтобы было проще задать координатные функции этого поля, воспользуемся полярной системой координат плоскости П, связанную с прямоугольной декартовой системой координат.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

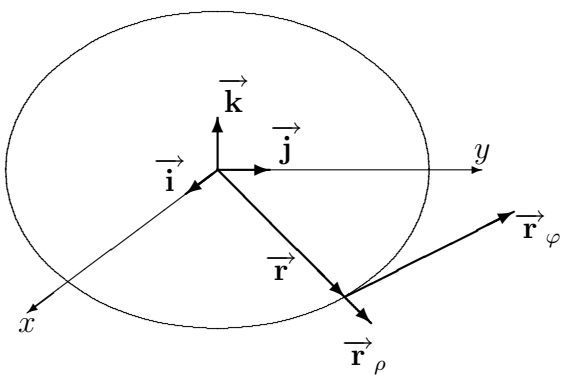
Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho};\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\rho};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$

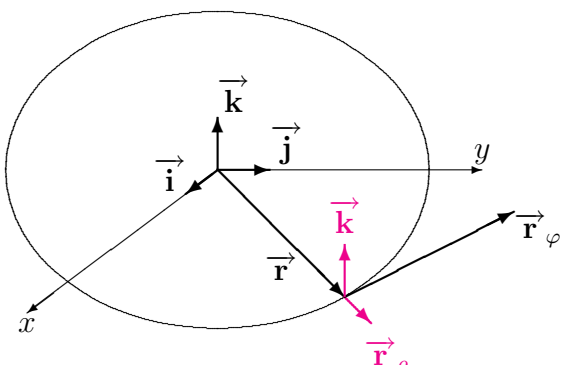


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\rho};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$

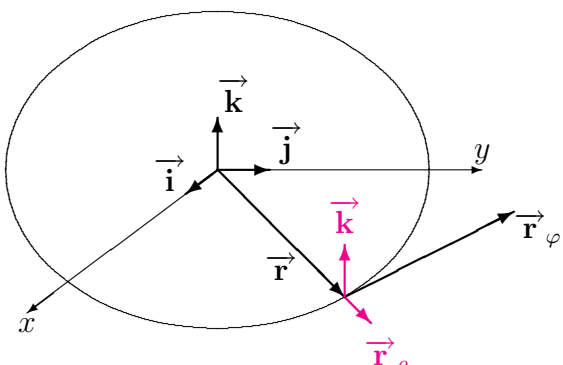


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^{i}_{j}(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\rho};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$

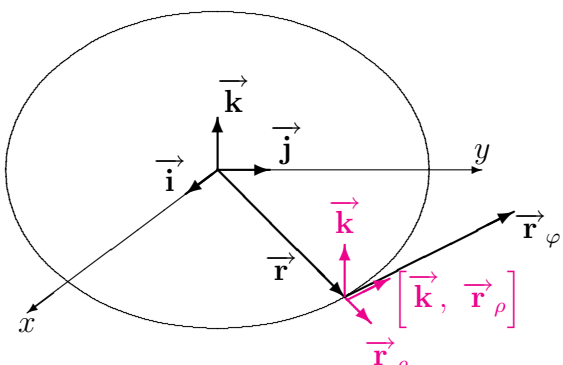


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\rho}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^{i}_{j}(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\rho};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$

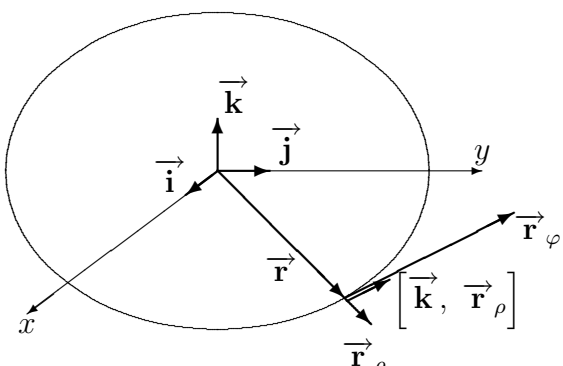


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\rho}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_\rho;\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$

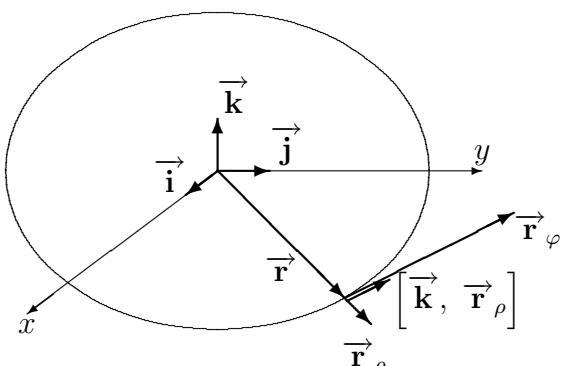


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_\rho;\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{r}}_\varphi\right) =$$

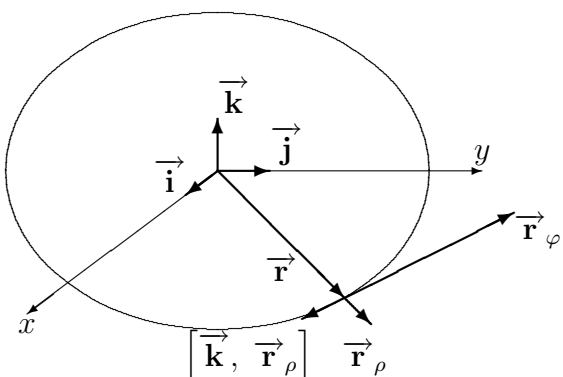


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_\rho;\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{r}}_\varphi\right) = 0\,\vec{\mathbf{r}}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\vec{\mathbf{r}}_\varphi.$$

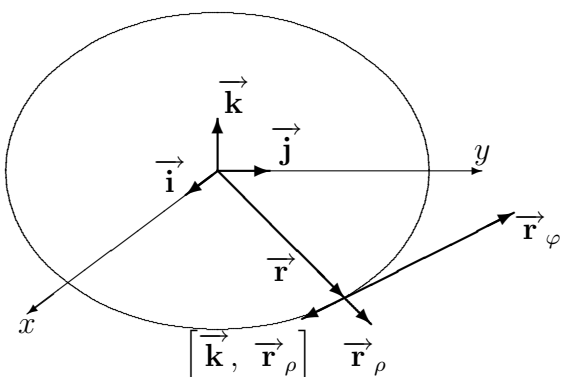


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_\rho;\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{r}}_\varphi\right) = 0\,\vec{\mathbf{r}}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\vec{\mathbf{r}}_\varphi.$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\vec{\mathbf{k}}\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

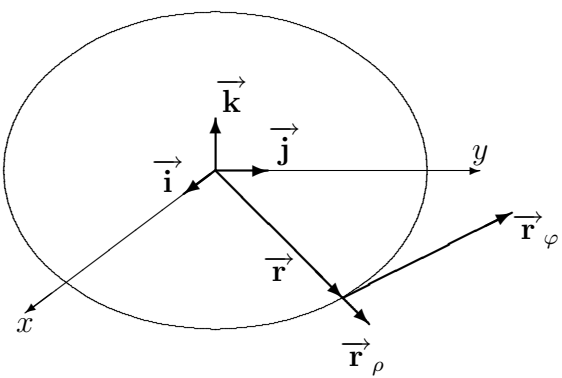
Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi; \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$

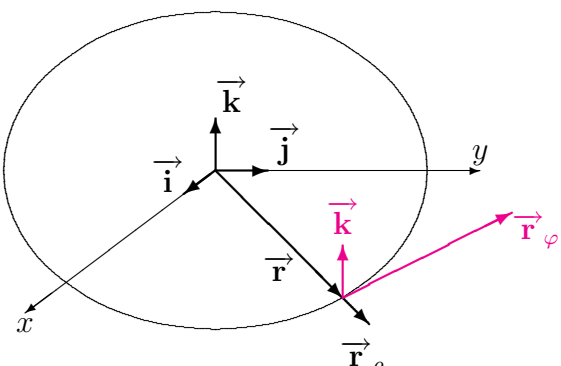


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi; \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$

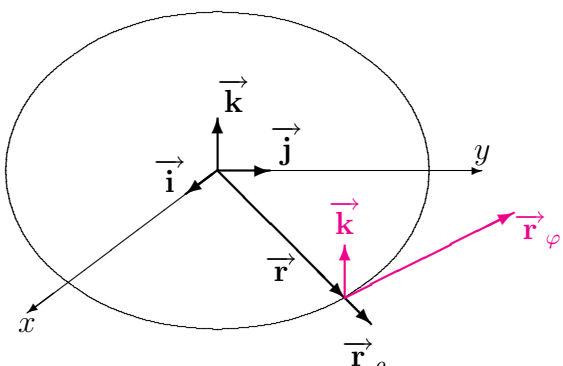


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

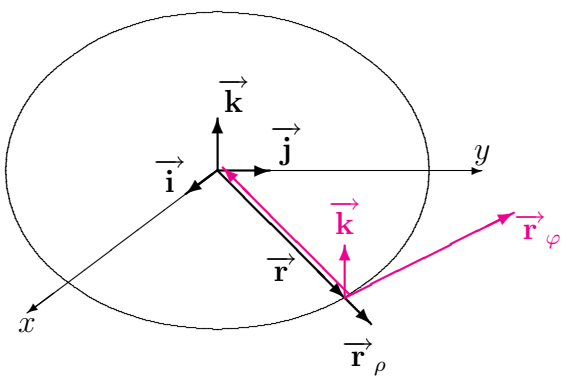
$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\vec{\mathbf{k}}\right] =$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

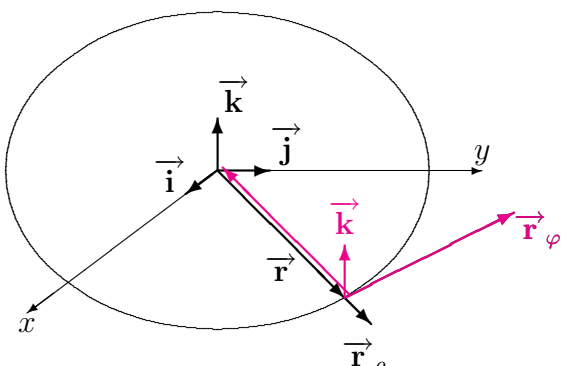
$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \dfrac{1}{\rho}\left(-\rho\,\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) =$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

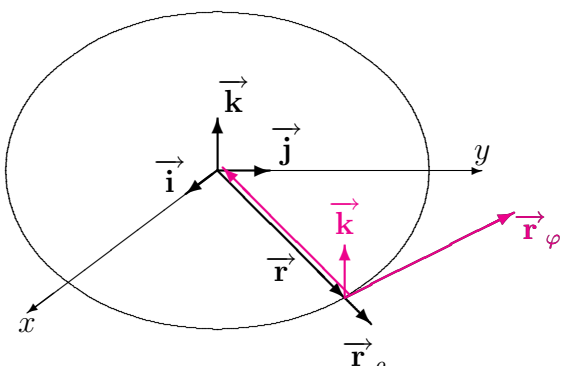
$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(-\rho\,\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = -\vec{\mathbf{r}}_{\rho} + 0\,\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}.$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

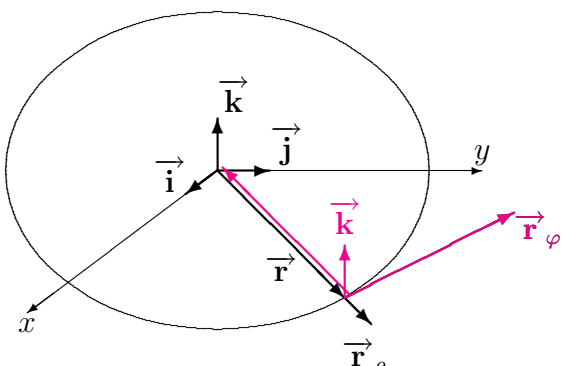
$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\vec{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}\left[\vec{\mathbf{k}}\,;\vec{\mathbf{v}}\right]$, где $\vec{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$, $\quad \vec{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^{i}_{j}(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\vec{\mathbf{r}}\right]\left(\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\vec{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\vec{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(-\rho\,\vec{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = -\vec{\mathbf{r}}_{\rho} + 0\,\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}.$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|\left|\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\vec{\mathbf{k}}$ к $\vec{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

Согласно **теореме о ковариантной производной**

$$\nabla_s L^i_j = \frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^?_{??}L^?_j - \Gamma^?_{??}L^i_?.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

Согласно **теореме о ковариантной производной**

$$\nabla_s L^i_j = \frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{s?}L^?_j - \Gamma^?_{js}L^i_?.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$
Согласно **теореме о ковариантной производной**
$$\nabla_s L^i_j = \frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp} L^p_j - \Gamma^p_{js} L^i_p.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\nabla_s L^i_j = \frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp} L^p_j - \Gamma^p_{js} L^i_p, \quad \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^u \partial q^v} = \Gamma^w_{uv}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_w.$$

$$\left(\Gamma^{\bullet w}_{u\bullet v}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}$. $\quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\dfrac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_i\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^j =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_i\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} -$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_i\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} -$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_i\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^3}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^3}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(b^i_{\bullet j}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{\rho^3} \\ -\dfrac{x}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{\rho^3} \\ -\dfrac{y}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(a^{u}_{\bullet s} b^{i}_{\bullet v} a^{w}_{\bullet j} \nabla_u L^{v}_{\bullet w}\right) = \left(a^{u}_{\bullet s}\left[b^{i}_{\bullet v}\nabla_u L^{v}_{\bullet w} a^{w}_{\bullet j}\right]\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{\rho^3} \\ -\dfrac{x}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{\rho^3} \\ -\dfrac{y}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.
Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$,

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$,

$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix}$,

$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, имеет вид $\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}$,

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L^{\prime i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ \dfrac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L^{i}_{j}\right) = \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Это совпадает с полученным ранее результатом, представленным **формулой (8)**.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?