Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Исчисление высказываний

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург

2009

I. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ **5**
Пример поиска доказательства 6
Вспомогательная задача 1 9
Вспомогательная задача 2 20
Вспомогательная задача 3 26
Итоговое доказательство 28
Пример 1 обогащения правилами вывода 29
Пример 2 обогащения правилами вывода 41
Пример доказательства с использованием дополнительного правила и без него 45

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \rightarrow$ **49**
Пример поиска доказательства 50

Примеры задач для самостоятельного решения 63

Поиск доказательств для исчисления с логическими связками $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 63

Задача IV.1 64

Задача IV.2 65

Задача IV.3 66

Задача IV.4 67

Задача IV.5 68

Задача IV.6 69

Дополнительные правила вывода 69

Задача V.7 70

Задача V.8 71

Ответы и решения 72

I. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Алфавит ИВ состоит из трех групп символов:

Пропозициональные переменные: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$.

Логические символы или связки: импликация $\rightarrow$, конъюнкция $\&$ или $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\neg$ или $\overline{}$, символ следования $\vdash$.

Вспомогательные символы: левая круглая скобка «(», правая круглая скобка «)», запятая «,».

Аксиома: $\Phi \vdash \Phi$.

Правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как доказать $\ldots \wedge \ldots$?

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \wedge \Psi}}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В правилах вывода доказуемая секвенция с заключением в виде $\ldots \wedge \ldots$ встречается только в правиле 1.

$$\dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \qquad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Значит, надо доказать две секвенции. Сначала докажем **первую** из них.

$$\dfrac{\mathbf{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} \qquad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 1. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 1. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила 9.

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как можно доказать противоречивость теории?

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\neg\Phi}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$ формул Φ и $\neg\Phi$?

$$\dfrac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\neg\Phi}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$ формул Φ и $\neg\Phi$?

Наиболее естественные варианты: $(P \vee Q)$ или $\neg P$.

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \neg\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Вариант $\neg P$ вернет нас к первоначальной ситуации, поэтому выберем $(P \vee Q)$ в качестве Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Вторая секвенция быстро сводится к аксиоме.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Для оставшейся секвенции одно из условий можно убрать (она все равно остается истинной и, значит, доказуемой).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11, 12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \vee \Psi}}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Дизъюнкцию можно доказать только с помощью правил 4 и 5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P \vdash P \vee Q}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось доказать секвенцию $\neg\neg P \vdash P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg\neg P \vdash P}}{\neg\neg P \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\dfrac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)}(10)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma, \neg\Phi} \vdash}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Надо «уменьшить» разницу в количестве отрицаний $\neg$ между $\neg(\neg P)$ и P. Для этого естественно воспользоваться правилом 9.

$$\overline{\neg\neg P \vdash P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила 10.

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Что взять в качестве Φ и $\neg\Phi$?

Очевидно, что оптимальным является выбор $\neg P$ в качестве Φ.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \Phi}{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Psi} \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12) \qquad \dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \Phi}{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Psi} \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12) \qquad \dfrac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Аналогично **доказательству вспомогательной задачи 1** получаем следующее доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg\neg Q \vdash Q}}{\neg\neg Q \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

При этом доказательство секвенции $\neg\neg Q \vdash Q$ аналогично **доказательству утверждения** $\neg\neg P \vdash P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg\neg Q \vdash Q}}{\neg\neg Q \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В итоге получили следующее доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{\textbf{Решение}\ \text{вспом. задачи 1}}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} \qquad \dfrac{\textbf{Решение}\ \text{вспом. задачи 2}}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}\,(1)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$?

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???} \quad , \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$? Такое условие имеется только в правиле вывода 7.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???} \quad , \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

В каких правилах вывода присутствует импликация?

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens).

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, у которой в которой выводится Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \quad \ldots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, у которой в которой выводится Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ??? \vdash \Phi, \quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Надо использовать секвенцию, у которой в которой выводится Φ, и в условии должно присутствовать $\neg(\neg\Phi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Условие секвенции $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$ можно «обогатить» формулой $\neg(\neg\Phi)$ с помощью правила 12.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Доказательство секвенции $\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi$ было осуществлено при решении **вспомогательной задачи**.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Применение этого правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7)}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi \to \Psi,}(11,12) \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{Вспомогательная задача}}{\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi}}{\Gamma, \ \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi}(11,12)}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул Γ.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул Γ. Сделать это можно было только с помощью правила вывода 10. Значит, до этого были получены секвенции $\Gamma \vdash \Psi$ и $\Gamma \vdash \neg\Psi$ для некоторой формулы Ψ.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применение данного правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \Psi,}(12) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \neg\Psi}(12)}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}(10)}{\Gamma \vdash \Phi}(9).$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию* $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ *с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение с использованием **дополнительного правила**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P,}(12) \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12,11)}{\mathbf{P}, \neg \mathbf{P} \vdash}(10)}{\mathbf{P}, \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}(\mathbf{I})}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q,}(12,11) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q,}(12,11) \quad \dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)}{\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)}(6)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение. Для того, чтобы получить «нормальное» доказательство, использующее только правила вывода 1-12, надо, как указано в примере I, удалить «дробь» $\dfrac{P, \neg P \vdash}{P, \neg P \vdash Q}$ и сделать следующие «вставки» (выделены прямоугольниками)

Решение с использованием **дополнительного правила**:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P,}(12)
\quad
\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12, 11)
}{\mathbf{P, \neg P \vdash}}(10)
}{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}(\mathbf{I})
}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q,}(12, 11)
\qquad
\dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q,}(12, 11)
\quad
\dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)
}{
\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)
}(6)
$$

Решение без применения **дополнительного правила**:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P}(12)
}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash P}}(12)
\quad
\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12, 11)
}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash \neg P}}(12)
}{\boxed{\dfrac{P, \neg P, \neg Q \vdash}{P, \neg P \vdash Q}}}(10)
}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q}(12)
}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q}(12, 11)
\qquad
\dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q}(12, 11)
\quad
\dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)
}{
\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)
}
$$

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

Система аксиом исчисления высказываний «порождается» в этом случае следующими тремя схемами секвенций (в отличие от единственной секвенции):

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

В данном случае можно ограничиться единственным правилом вывода: правилом **modus ponens** или **правилом отделения**:

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$. Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.
Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.
Брать $P \to P$, видимо, не имеет смысла, так как доказательство формулы $(P \to P) \to (P \to P)$ вряд ли проще доказательства исходной формулы.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.

Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.

Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.

Например, P не годится, так как эта формула «не обязана» быть истинной в любой модели.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \boldsymbol{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.

Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.

Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.

Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Следовательно, для того, чтобы можно было воспользоваться правилом modus ponens, надо еще доказать формулу $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Эту формулу можно получить тоже только с помощью правила modus ponens.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \mathbf{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Попытка использовать для второго аргумента в правиле modus ponens результат подстановки соответствующих формул в схему аксиом 1, по-видимому, бесперспективна.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \boldsymbol{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

В этом случае придется брать в качестве Φ формулу $P \to P$, то есть ту самую формулу, которую мы доказываем, а она к моменту использования в доказательстве должна уже быть доказана.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \boldsymbol{(\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta))}$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Поэтому остается применить схему аксиом 2.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \boldsymbol{\Phi} \to (\boldsymbol{\Psi} \to \boldsymbol{\Phi})$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$; $\quad \dfrac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

В схеме аксиом 2 придется положить $\Phi = P$, $\Psi = P \to P$, $\Theta = P$. Следовательно, для применения правила отделения, надо доказать формулу $\Phi \to (\Psi \to \Theta) = P \to \big((P \to P) \to P\big)$. Но это результат подстановки в схему аксиом 1 формулы P в качестве Φ и формулы $P \to P$ в качестве Ψ.

II. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение.

$$\dfrac{\dfrac{P \to \big((P \to P) \to P\big),\ \Big(P \to \big((P \to P) \to P\big)\Big) \to \Big(\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)\Big)}{\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P),} \qquad P \to (P \to P)}{P \to P}$$

Задания для самостоятельного выполнения

Задача IV.1. (Ответ приведен на стр.74.) Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача IV.2. (Ответ приведен на стр.83.) Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача IV.3. (Ответ приведен на стр.86.) Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.91.) Доказать формулу $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.93.) Доказать формулу $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \to \Phi$;

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.95.) Доказать формулу $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача V.7. (Ответ приведен на стр.97.) Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача V.8. (Ответ приведен на стр.100.) Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. Составив истинностную таблицу этой функции, легко убеждаемся в том, что эта функция тождественно равна 1, то есть истинна. Проверим доказуемость.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

В качестве $\Gamma \vdash \neg P$ можно взять аксиому $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$, при этом к посылке этой секвенции, согласно правилу 12, можно дописать любую формулу. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 попробуем взять $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$. Используем правило 10, в качестве $\Gamma \vdash \neg P$ возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash P)$. Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$. Используем правило 10, в качестве $\Gamma \vdash \neg P$ возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash P)$. Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

Итак, надо доказать, $\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash$. Как мы уже отмечали, такое заключение можно получить только из правила 10. Одной из секвенций посылки можно взять $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$, в которой, согласно правилу 12 посылку можно «расширить». Во второй секвенции посылки правила 10 должно быть правило, вывод в котором имеет вид $P \vee \neg P$. В качестве посылки можно взять один из «дизъюнктов», например, $\neg P$. Секвенция $\neg P \vdash P \vee \neg P$ следует из аксиомы $\neg P \vdash \neg P$ и правила 5.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.
Ответ. *«Оформление» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Оформим результат в виде так называемого **дерева доказательства**:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P \vdash P \vee \neg P}}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash P \vee \neg P;} \quad \dfrac{\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash \neg(P \vee \neg P)}}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P}(9)}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P;}(4) \quad \neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\dfrac{\neg(P \vee \neg P) \vdash}{\vdash P \vee \neg P}}(10)
$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Задача 2. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$;

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Дерево доказательства с «полиграфической точки зрения» в данном случае является слишком «широким», поэтому обозначим через $\mathcal{D}$ следующее дерево доказательства секвенции $\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash$:

$$\mathcal{D} = \dfrac{\dfrac{P \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P}(12,11) \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}(12,11)}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}(10)$$

Задача 2. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$;

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Тогда общее дерево доказательства имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q}(12,11) \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}(12,11)}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Задача 3. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{B}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}(9)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}(4), \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}(11, 12)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}(10)}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\neg(\neg P)\vdash P}(9)}{P\to Q,\neg(\neg P)\vdash P}(11,12),\quad \dfrac{P\to Q\vdash P\to Q}{P\to Q,\neg(\neg P)\vdash P\to Q}(12)}{P\to Q,\neg(\neg P)\vdash Q}(8)}{P\to Q,\neg(\neg P)\vdash \neg P\vee Q}(5)}{\mathbf{B}\approx P\to Q,\neg(\neg P\vee Q),\neg(\neg P)\vdash}(11,9)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{B}}{P\to Q,\neg(\neg P\vee Q)\vdash \neg P}(9)}{P\to Q,\neg(\neg P\vee Q)\vdash \neg P\vee Q}(4),\quad \dfrac{\neg(\neg P\vee Q)\vdash \neg(\neg P\vee Q)}{P\to Q,\neg(\neg P\vee Q)\vdash \neg(\neg P\vee Q)}(11,12)}{P\to Q,\neg(\neg P\vee Q)\vdash}(10)}{P\to Q\vdash \neg P\vee Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi;\quad \Gamma\vdash\Psi}{\Gamma\vdash\Phi\wedge\Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi\wedge\Psi}{\Gamma\vdash\Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi\wedge\Psi}{\Gamma\vdash\Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi}{\Gamma\vdash\Phi\vee\Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma\vdash\Psi}{\Gamma\vdash\Phi\vee\Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma,\Phi\vdash\Psi,\quad \Gamma,\Omega\vdash\Psi,\quad \Gamma\vdash\Phi\vee\Omega}{\Gamma\vdash\Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma,\Phi\vdash\Psi}{\Gamma\vdash\Phi\to\Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi,\quad \Gamma\vdash\Phi\to\Psi}{\Gamma\vdash\Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma,\neg\Phi\vdash}{\Gamma\vdash\Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi,\quad \Gamma\vdash\neg\Phi}{\Gamma\vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma,\Phi,\Psi,\Gamma_1\vdash\Omega}{\Gamma,\Psi,\Phi,\Gamma_1\vdash\Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma\vdash\Phi}{\Gamma,\Psi\vdash\Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P;\ \neg(\neg P) \vdash \neg P}(12),\quad \dfrac{\neg(\neg P) \vdash \neg(\neg P)}{\neg P;\ \neg(\neg P) \vdash \neg(\neg P)}(11,12)}{\mathbf{A} \approx \neg(\neg P)\,;\ \neg P \vdash}(11,10)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\neg(\neg P) \vdash P}(9)}{P \to Q, \neg(\neg P) \vdash P}(11,12),\quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg(\neg P) \vdash P \to Q}(12)}{P \to Q, \neg(\neg P) \vdash Q}(8)}{P \to Q, \neg(\neg P) \vdash \neg P \vee Q}(5)}{\mathbf{B} \approx P \to Q, \neg(\neg P \vee Q)\,, \neg(\neg P) \vdash}(11,9)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{B}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}(9)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}(4),\quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}(11,12)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}(10)}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Доказать формулу $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

Задача 4. Доказать формулу $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

Ответ.

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi,}(12) \qquad \dfrac{\Psi \vdash \Psi}{\Phi, \Psi \vdash \Psi}(12)}{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}(1).$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Доказать формулу $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \to \Phi$;

Задача 5. Доказать формулу $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \to \Phi$;

Ответ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}(2)}{\Phi \wedge \Psi, \Psi \vdash \Phi}(12)}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \to \Phi}(7)$$

Решение задачи 6.

Задача 6. Доказать формулу $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$.

Задача 6. Доказать формулу $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$.

Ответ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \Psi \vee \Phi}(5)}{\Phi \vee \Psi, \Phi \vdash \Psi \vee \Phi,}(12) \quad \dfrac{\dfrac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi \vdash \Psi \vee \Phi}(4)}{\Phi \vee \Psi, \Psi \vdash \Psi \vee \Phi,}(12) \quad \Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi}(6).$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \to \Theta}(7)}{\Gamma \vdash \Theta}(8).$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Psi}}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \to \Theta}(\mathbf{7})}{\Gamma \vdash \Theta}(8).$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \boldsymbol{\Psi}}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}(2)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi,}(12, 11) \quad \dfrac{\mathbf{A}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}(7)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

$$\mathbf{A}: \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}(3)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi,}(11,12) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}(12,11)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}(7)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Theta}(8)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}(2)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi,}(12,11) \quad \dfrac{\mathbf{A}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}(7)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?