Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Квадратичные формы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Порождение квадратичной формы симметричной биолинейной формой 3

Задача I.1 3

Приведение уравнений линий и поверхнейстей второго порядка к каноническому виду 3

Задача II.2 4

Задача II.3 5

Задача II.4 6

Ответы и решения 7

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.9.) На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \left\{x^0;\ x;\ x^2\right\}$, $\mathbf{Б}' = \left\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\right\}$.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.24.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.48.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.62.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \quad \text{(II.4)}$$

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Сначала найдем искомую билинейную форму по **лемме о матрице квадратичной формы**. Ясно, что данная **квадратичная форма** порождается билинейной формой $f(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx$. Имеем

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$g(p(x),q(x)) = \frac{1}{2}\left(f(p(x),q(x)) + f(q(x),p(x))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx + \int\limits_0^1 q(x)\,p(1-x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx - \int\limits_1^0 q(1-t)\,p(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx + \int\limits_0^1 q(1-x)\,p(x)\,dx\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx = f(p(x),q(x)).$$

В данном случае исходная билинейная форма оказалась симметричной. Найдем матрицу этой билинейной формы (а, значит, и квадратичной формы).

$$F_{11} = f\left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^0 \left(1-x\right)^0 dx = 1,$$

$$F_{12} = F_{21} = f\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \left(1-x\right)^0 dx = \frac{1}{2},$$

$$F_{13} = F_{31} = f\left(x^2, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1-x\right)^0 dx = \frac{1}{3},$$

$$F_{22} = f\left(x, x\right) = \int\limits_0^1 x \left(1-x\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$F_{23} = F_{32} = f\left(x^2, x\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1-x\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$F_{33} = f\left(x^2, x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1-x\right)^2 dx = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix}$. Можно было найти матрицу квадратичной формы, представив ее в виде многочлена от координат вектора в базисе **Б**:

$$\Phi(a,b,c) = \varphi\left(ax^0 + bx + cx^2\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(ax^0 + bx + cx^2\right)\left(a(1-x)^0 + b(1-x) + c(1-x)^2\right)\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ac}{3} + \frac{ab}{2} + b^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + bc\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{ac}{3} + bc\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + c^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{30} - 2\cdot\frac{ab}{2} + 2\cdot\frac{ac}{3} + 2\cdot\frac{bc}{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Матрицу в базисе $\mathbf{Б}'$ найдем по определению и с помощью **теоремы о матрице билинейной формы в разных базисах**.

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\textbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\textbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = f\left(x-1, x-1\right) = \int\limits_0^1 (x-1)((1-x)-1)\,dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6},$$

$$F'_{12} = F'_{21} = f\left(x+1, x-1\right) = \int\limits_0^1 (x+1)((1-x)-1)\,dx = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6},$$

$$F'_{13} = F'_{31} = f\left(x^2-1, x-1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\,\left((1-x)-1\right)dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = f\left(x+1, x+1\right) = \int\limits_0^1 (x+1)((1-x)+1)\,dx = \int\limits_0^1 \left(2 + x - x^2\right)\,dx =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6},$$

$$F'_{23} = F'_{32} = f\left(x^2-1, x+1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\,\left((1-x)+1\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^2 - x^3 - 2 + x\right)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{13}{12},$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12},$$

$$F'_{33} = f\left(x^2-1, x^2-1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\,\left((1-x)^2-1\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\,\left(x^2-2x\right)\,dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{30}.$$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12}, \quad F'_{33} = \frac{11}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} =$

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12}, \quad F'_{33} = \frac{11}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/4 \\ -5/6 & 13/6 & -13/12 \\ 1/4 & -13/12 & 11/30 \end{pmatrix}$.

Задача 1. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** F определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\textbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\textbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ. Вычисление по **формуле** с помощью **матрицы перехода** дает тот же результат:

$$\mathbb{F}_{\textbf{Б}'} = T^t_{\textbf{Б}\to\textbf{Б}'}\mathbb{F}_{\textbf{Б}'}T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б}'} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/4 \\ -5/6 & 13/6 & -13/12 \\ 1/4 & -13/12 & 11/30 \end{pmatrix}.$$

Уря-я-я-я-я!!!!

Решение задачи 2.

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\underbrace{5x^2 - 30y^2 - 120xy}_{\text{квадратичная форма}} \quad \underbrace{-250x}_{\text{линейная форма}} \quad +121 = 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

Найдем **собственные векторы** и **собственные значения** линейного оператора с матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению -75:

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению -75:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению -75:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению -75:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ C \neq 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} =$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Найдем с помощью матрицы оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ C \neq 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\vec{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\vec{\mathbf{j}}$, а орт, отвечающий собственному значению 50 — $-\frac{4}{5}\vec{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\vec{\mathbf{j}}$. Следовательно, закон преобразования координат (основанный на **матрице перехода** и **теореме о координатах вектора в разных базисах**) имеет вид

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим (-75), имеет вид $\frac{3}{5}\vec{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\vec{\mathbf{j}}$, а орт, отвечающий собственному значению 50 — $-\frac{4}{5}\vec{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\vec{\mathbf{j}}$. Следовательно, закон преобразования координат (основанный на **матрице перехода** и **теореме о координатах вектора в разных базисах**) имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 + 121 + 75 - 200 = 0,$$

Задача 2. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 + 121 + 75 - 200 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 - 4 = 0.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\underbrace{10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz}_{\substack{\text{квадратичная}\\ \text{форма}}} \underbrace{-88x + 16y - 44z}_{\substack{\text{линейная}\\ \text{форма}}} + 73 = 0.$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 324\lambda - 2916 =$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 324\lambda - 2916 = -(\lambda - 9)(\lambda - 18)(\lambda + 18).$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9,

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9, 18 и

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & \\ 1/3 & -2/3 & \\ -2/3 & 1/3 & \end{pmatrix}$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9, 18 и (-18),

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9, 18 и (-18), получаем с помощью **формулы преобразования координат**

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9, 18 и (-18), получаем с помощью **формулы преобразования координат**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ -10 & 1 & -14 \\ -2 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$9p^2 + 18q^2 - 18r^2 - 24p - 84q - 48r + 73 = 0$$

Задача 3. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ -10 & 1 & -14 \\ -2 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$9p^2 + 18q^2 - 18r^2 - 24p - 84q - 48r + 73 = 0$$

$$9\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + 18\left(q - \frac{7}{3}\right)^2 - 18\left(r + \frac{4}{3}\right)^2 - 9 = 0.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Выделяем в уравнении (II.4) квадратичную и линейную части:

$$\underbrace{7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz}+\underbrace{30x + 24y - 12z}-13 = 0.$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 =$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2.$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2.$$

Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$,

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = 0$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}};\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)} =$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}};\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} =$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}};\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} = -2$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} - 2\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}};\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ -\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} = -2$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9):

$$-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} - 2\left(-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\right) = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению (-9): $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению -9: $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида $[\vec{\mathbf{r}}]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б'}} [\vec{\mathbf{r}}]_{\mathbf{Б'}}$. В данном случае получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Ответ. Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, а собственному значению -9 — векторы $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению -9: $-\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида $[\vec{\mathbf{r}}]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б'}} [\vec{\mathbf{r}}]_{\mathbf{Б'}}$. В данном случае получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

$$9p^2 - 9q^2 - 9r^2 - 18\sqrt{2}p + 18q - 18\sqrt{2}r - 13 = 0. \qquad (3)$$

Задача 4. С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{II.4}$$

Ответ. Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

$$9p^2 - 9q^2 - 9r^2 - 18\sqrt{2}p + 18q - 18\sqrt{2}r - 13 = 0. \tag{3}$$

Для получения окончательного ответа осталось выделить полные квадраты при переменных p, q и r:

$$9\left(p - \sqrt{2}\right)^2 - 9\left(q - 1\right)^2 - 9\left(r + \sqrt{2}\right)^2 - 4 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, с помощью преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + \sqrt{2} \\ v + 1 \\ w - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

уравнение (II.4), стр.6 преобразуется к виду

$$9u^2 - 9v^2 - 9w^2 - 4 = 0.$$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?