Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Жорданова нормальная форма

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Постановка задачи 4

Определения и основные результаты 8

Определение ЖНФ 9

Пример нормальной жордановой формы матрицы 11

Теорема о жордановой форме 13

Лемма о корневом подпространстве 16

Лемма о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$ 19

Лемма об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и

$\hat{A} - \mu\hat{E}$ 31

Лемма о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств 48

Лемма о сумме корневых подпространств 58

Следствие о размерности корневого подпространства 83

Определение нильпотентного оператора 87

Лемма о каноническом базисе корневого подпространства 90

Некоторые полезные факты 122

Построение канонического базиса 126

Постановка задачи

В теории линейных операторов в конечномерных линейных пространствах центральную роль играет теорема об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Однако, как известно, таких изоморфизмов существует много (во всяком случае, для линейных пространств над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), то есть одному и тому же оператору, как правило, можно поставить в соответствие много матриц, в зависимости от того, какой базис зафиксирован в линейном пространстве. Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

Постановка задачи

В теории линейных операторов в конечномерных линейных пространствах центральную роль играет теорема об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Однако, как известно, таких изоморфизмов существует много (во всяком случае, для линейных пространств над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), то есть одному и тому же оператору, как правило, можно поставить в соответствие много матриц, в зависимости от того, какой базис зафиксирован в линейном пространстве. Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

$$A_{\mathbf{Б}_2} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2} \cdot A_{\mathbf{Б}_1} \cdot T_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2}.$$

Постановка задачи

В теории линейных операторов в конечномерных линейных пространствах центральную роль играет теорема об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Однако, как известно, таких изоморфизмов существует много (во всяком случае, для линейных пространств над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), то есть одному и тому же оператору, как правило, можно поставить в соответствие много матриц, в зависимости от того, какой базис зафиксирован в линейном пространстве. Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

$$A_{\mathbf{Б}_2} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2} \cdot A_{\mathbf{Б}_1} \cdot T_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2}.$$

Значит, матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$ подобны. Отношением подобия множество всех матриц разбивается на непересекающиеся классы подобных матриц. В связи с этим часто встает проблема выбора в каж-

дом классе подобных матриц «стандартного представителя». Можно предложить несколько различных правил выбора таких «стандартных представителей». В данной работе мы рассмотрим один из важнейших типов таких представителей: нормальную жорданову форму матрицы.

Определения и основные результаты

Определение 1. Жордановой клеткой размерности k, отвечающей собственному значению μ, *называется квадратная матрица вида* $J_k(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}$, *имеющая k строк и столбцов.*

Определение 2. *Говорят, что матрица M имеет* **нормальную жорданову форму**, *если M имеет клеточно-диагональный вид*

$$M = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\mu_1) & \mathbf{0}_{k_1 \times k_2} & \mathbf{0}_{k_1 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_1 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_2 \times k_1} & J_{k_2}(\mu_2) & \mathbf{0}_{k_2 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_2 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_3 \times k_1} & \mathbf{0}_{k_3 \times k_2} & J_{k_3}(\mu_3) & \dots & \mathbf{0}_{k_3 \times k_p} \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0}_{k_p \times k_1} & \mathbf{0}_{k_p \times k_2} & \mathbf{0}_{k_p \times k_3} & \dots & J_{k_p}(\mu_p) \end{pmatrix}$$

где $J_{k_i}(\mu_i)$ — ***жорданова клетка*** *размерности k_i, отвечающая собственному значению μ_i,*

$\mathbf{0}_{k_i \times k_j}$ *— нулевая матрица размерности $k_i \times k_j$.*

Определение 2. *Говорят, что матрица M имеет* **нормальную жорданову форму**, *если M имеет клеточно-диагональный вид*

$$M = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\mu_1) & \mathbf{0}_{k_1 \times k_2} & \mathbf{0}_{k_1 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_1 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_2 \times k_1} & J_{k_2}(\mu_2) & \mathbf{0}_{k_2 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_2 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_3 \times k_1} & \mathbf{0}_{k_3 \times k_2} & J_{k_3}(\mu_3) & \dots & \mathbf{0}_{k_3 \times k_p} \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0}_{k_p \times k_1} & \mathbf{0}_{k_p \times k_2} & \mathbf{0}_{k_p \times k_3} & \dots & J_{k_p}(\mu_p) \end{pmatrix}$$

где $J_{k_i}(\mu_i)$ — ***жорданова клетка*** *размерности k_i, отвечающая собственному значению μ_i,*

$\mathbf{0}_{k_i \times k_j}$ *— нулевая матрица размерности $k_i \times k_j$.*

В этом определении **не предполагается**, что **все** μ_i различны.

Пример нормальной жордановой формы матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет нормальную жорданову форму.

Пример нормальной жордановой формы матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет нормальную жорданову форму.

Теорема 1 (о жордановой форме). *Если U — линейное пространство над полем K, $\hat{A}$ — линейный оператор пространства U и характеристический полином оператора $\hat{A}$ вполне приводим над полем K, то есть имеет вид $(\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \dots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то существует такой базис* **Б** *пространства U, в котором матрица $A_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{A}$ имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Теорема 1 (о жордановой форме). *Если U — линейное пространство над полем K, $\hat{A}$ — линейный оператор пространства U и характеристический полином оператора $\hat{A}$ вполне приводим над полем K, то есть имеет вид $(\lambda-\mu_1)^{k_1}(\lambda-\mu_2)^{k_2}\dots(\lambda-\mu_m)^{k_m}$, то существует такой базис* **Б** *пространства U, в котором матрица $A_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{A}$ имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Замечание. Базис, в котором матрица оператора $\hat{A}$ из **теоремы 1** имеет нормальную жорданову форму, называется **каноническим базисом**.

Теорема 1 (о жордановой форме). *Если U — линейное пространство над полем K, $\hat{A}$ — линейный оператор пространства U и характеристический полином оператора $\hat{A}$ вполне приводим над полем K, то есть имеет вид $(\lambda-\mu_1)^{k_1}(\lambda-\mu_2)^{k_2}\dots(\lambda-\mu_m)^{k_m}$, то существует такой базис* **Б** *пространства U, в котором матрица $A_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{A}$ имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Доказательство этой теоремы предваряется рядом лемм.

Лемма 1 (о корневом подпространстве). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U, μ — собственное значение этого оператора. Тогда множество $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ является подпространством пространства U (точнее, носителем подпространства).*

Доказательство.

Лемма 1 (о корневом подпространстве). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U, μ — собственное значение этого оператора. Тогда множество $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ является подпространством пространства U (точнее, носителем подпространства).*

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия подпространства** и того факта, что $\operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n \subseteq \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^{n+1}$.

Лемма 1 (о корневом подпространстве). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U, μ — собственное значение этого оператора. Тогда множество $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ является подпространством пространства U (точнее, носителем подпространства).*

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия подпространства** и того факта, что $\operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n \subseteq \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^{n+1}$.

Определение 3. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U, μ — собственное значение этого оператора. Тогда множество $U(\hat{A},\mu) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ называется* **корневым подпространством, соответствующим собственному значению μ.**

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A} - \mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

Доказательство.

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=$$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=$$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=$$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, то $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.*

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=$$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, то $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.*

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$. Это утверждение о равенстве множеств. По определению равенства множеств надо проверить, что левая часть равенства является подмножеством правой части и наоборот.

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, то $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.*

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Если $\theta\in\operatorname{spec}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$, то есть θ — корень многочлена $g(\lambda)$, то $0=g(\theta)=f(\theta+\mu)$. Значит, $\theta+\mu=\nu_i$ для некоторого номера i. Следовательно, $\theta=$

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Если $\theta\in\operatorname{spec}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$, то есть θ — корень многочлена $g(\lambda)$, то $0=g(\theta)=f(\theta+\mu)$. Значит, $\theta+\mu=\nu_i$ для некоторого номера i. Следовательно, $\theta=\nu_i-\mu$,
то есть $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})\subseteq\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Доказательство. Пусть **Б** — базис линейного пространства U, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$. Это утверждение о равенстве множеств. По определению равенства множеств надо проверить, что левая часть равенства является подмножеством правой части и наоборот.

Обратное включение $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})\supseteq\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. Это следствие из определений.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из V.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из V. Тогда, по определению сложения операторов и умножения оператора на скаляр,

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из V. Тогда, по определению сложения операторов и умножения оператора на скаляр,

$$\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)(\mathbf{x}) = \hat{A}(\mathbf{x}) - \mu\hat{E}(\mathbf{x}) = \hat{A}(\mathbf{x}) - \mu\mathbf{x} \in V,$$

так как V — подпространство и $\hat{A}(\mathbf{x}) \in V$, $-\mu\mathbf{x} \in V$.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$.

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda), \\ \end{cases}$$

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda), \\ \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu). \end{cases}$$

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда для некоторого k имеем

$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k =$

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда для некоторого k имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\hat{E} + \lambda\hat{E} - \mu\hat{E}\right)^k =$$

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда для некоторого k имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}+\lambda\hat{E}-\mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}-(\mu-\lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно,

Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда для некоторого k имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\hat{E} + \lambda\hat{E} - \mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\hat{E} - (\mu - \lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно, $\mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$.

Лемма 3 (**об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$**). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если V является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом μ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого λ.*

Доказательство. В самом деле, пусть V — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда для некоторого k имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}+\lambda\hat{E}-\mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}-(\mu-\lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно, $\mathbf{x} \in U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство.

Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. Как известно, **характеристический полином линейного оператора равен характеристическому полиному его матрицы в любом базисе** (коэффициенты полинома являются инвариантами линейного оператора, поэтому полином $\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$ не зависит от выбора базиса **Б**).

Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис линейного пространства U и $\mathbf{Б}_2 = \{\mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства V, причем $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на U в базисе $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на V в базисе $\mathbf{Б}_2$.

Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис линейного пространства U и $\mathbf{Б}_2 = \{\mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства V, причем $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на U в базисе $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на V в базисе $\mathbf{Б}_2$.

Тогда, очевидно, система векторов $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ является базисом линейного пространства $U \oplus V$.

Лемма 4 (**о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

Согласно **критерию полураспавшейся матрицы**, матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$.

Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

Лемма 4 (**о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}_{n\times n}\right| =$$

Лемма 4 (**о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda\mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda\mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| =$$

Лемма 4 (**о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda\mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda\mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| = g(\lambda) \cdot h(\lambda),$$

Лемма 4 (**о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства $U \oplus V$, где U и V — $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — характеристические полиномы ограничения оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V, то характеристический полином оператора $\hat{A}$ равен $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.*

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на U и, соответственно, на V.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda \mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda \mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| = g(\lambda) \cdot h(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство. Индукция по размерности пространства. База индукции

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство. Индукция по размерности пространства. База индукции — $\dim U = 1$ — очевидна.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно. Пусть μ_1 — собственное значение оператора $\hat{A}$, $U(\hat{A}, \mu_1)$ — **корневое** подпространство линейного оператора $\hat{A}$, соответствующее числу μ_1. Тогда

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно. Пусть μ_1 — собственное значение оператора $\hat{A}$, $U(\hat{A}, \mu_1)$ — **корневое** подпространство линейного оператора $\hat{A}$, соответствующее числу μ_1. Тогда

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле,

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

Так как до k-го шага включительно размерности подпространств $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^i$ увеличивались, но размерность подпространства $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k$ не больше $n = \dim U$, то

Лемма 5 (**о сумме корневых подпространств**). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

Так как до k-го шага включительно размерности подпространств $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^i$ увеличивались, но размерность подпространства $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k$ не больше $n = \dim U$, то $k \leq n$.

Равенства (1) доказаны.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, то найдется такой вектор $\mathbf{y}$, что $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$. Согласно равенствам (1), имеем

$$\mathbf{0} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{x}) = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n} (\mathbf{y}).$$

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$. Согласно равенствам (1), имеем

$$\mathbf{0} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{x}) = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n} (\mathbf{y}).$$

Таким образом, $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$, $\quad \mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$.

Итак, $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}$. Из равенств (1) получаем $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n$. Следовательно, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Итак $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Мы доказали что

$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

Как отмечалось выше, из **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора** следует, что

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Мы доказали что

$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

Как отмечалось выше, из **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора** следует, что

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

В силу условия доказываемой леммы и леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств характеристический полином ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ является вполне приводимым.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

В силу условия доказываемой леммы и леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств характеристический полином ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ является вполне приводимым.

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

Лемма 5 (о сумме корневых подпространств). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

Доказательство.

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Эти подпространства являются корневыми и для оператора $\hat{A}$. Таким образом, получаем требуемое разложение пространства U в прямую сумму корневых подпространств.

Лемма доказана.

Следствие 1 (о размерности корневого подпространства). *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \dots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению μ_i, равна кратности корня μ_i многочлена $f(\lambda)$.*

Доказательство. Это очевидное следствие из **леммы о сумме корневых подпространств** и из **леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**.

Следствие 1 (о размерности корневого подпространства). *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \dots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого i с условием $1 \le i \le m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению μ_i, равна кратности корня μ_i многочлена $f(\lambda)$.*

Доказательство. Дело в том, что если $\hat{B}$ — ограничение оператора $\hat{A}$ на **корневое** подпространство $U(\hat{A}, \mu_i)$ оператора $\hat{A}$, то характеристический полином оператора $\hat{B}$ не имеет других корней, кроме μ.

Следствие 1 (**о размерности корневого подпространства**). *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \dots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого i с условием $1 \le i \le m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению μ_i, равна кратности корня μ_i многочлена $f(\lambda)$.*

Доказательство. Если бы нашелся корень $\theta \neq \mu$ характеристического полинома оператора $\hat{B}$, то для него в этом корневом подпространстве нашелся бы собственный вектор $\mathbf{x}$. Однако индукция дает $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k(\mathbf{x}) = (\theta - \mu)^k\mathbf{x}$, что ни при каком натуральном k не равно нулевому вектору. Это противоречит тому, что

Следствие 1 (**о размерности корневого подпространства**). *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \dots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого i с условием $1 \le i \le m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению μ_i, равна кратности корня μ_i многочлена $f(\lambda)$.*

Доказательство. Если бы нашелся корень $\theta \neq \mu$ характеристического полинома оператора $\hat{B}$, то для него в этом корневом подпространстве нашелся бы собственный вектор $\mathbf{x}$. Однако индукция дает $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k(\mathbf{x}) = (\theta - \mu)^k\mathbf{x}$, что ни при каком натуральном k не равно нулевому вектору. Это противоречит тому, что $\mathbf{x}$ принадлежит корневому подпространству оператора $\hat{A}$ (и, значит, корневому подпространству оператора $\hat{B}$), отвечающему собственному значению μ.

Определение нильпотентного оператора

Лемма об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

Определение нильпотентного оператора

Лемма об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

Определение 4. *Линейный оператор* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *называется* **нильпотентным** *тогда и только тогда, когда* U *является корневым подпространством оператора* $\hat{A}$, *отвечающим собственному значению* 0.

Определение нильпотентного оператора

Лемма об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

Определение 4. *Линейный оператор* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *называется* **нильпотентным** *тогда и только тогда, когда* U *является корневым подпространством оператора* $\hat{A}$, *отвечающим собственному значению* 0.

Итак, линейный оператор $\hat{A}$ является нильпотентным если и только если для некоторого натурального числа k имеет место равенство $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \mathrm{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq \ldots \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \leq$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \mathrm{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq \ldots \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \leq \mathrm{Ker}(\hat{A})$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq \ldots \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A})$.
Поэтому можно выбрать такой базис пространства $\operatorname{Ker} \hat{A}$

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2}+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\},$$

что для каждого p векторы $\mathbf{e}_{m_p+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p+1},1}$ дополняют базис

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p-1}+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_p,1}\right\}$$

линейного пространства $\operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-p}(U)$ до базиса

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_p+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p+1},1}\right\}$$

линейного пространства $\operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-p-1}(U)$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Положим $m_0 = 0$. Для каждых i, j с условиями $\begin{cases} 1 \leq i \leq k-1 \\ 1 \leq j \leq m_i - m_{i-1} \end{cases}$ обозначим через $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}$ некоторые фиксированные прообразы векторов $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$ относительно действия $\hat{A}^{k-i-1}$. Таким образом, $\hat{A}^{k-i-1}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) = \mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$.

Лемма 6 (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Положим $m_0 = 0$. Для каждых i, j с условиями $\begin{cases} 1 \le i \le k-1 \\ 1 \le j \le m_i - m_{i-1} \end{cases}$ обозначим через $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}$ некоторые фиксированные прообразы векторов $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$ относительно действия $\hat{A}^{k-i-1}$. Таким образом, $\hat{A}^{k-i-1}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) = \mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$.

Для каждых i, j, t с условиями $\begin{cases} 1 \le i \le k-1 \\ 1 \le j \le m_i - m_{i-1} \\ 1 \le t \le k-i \end{cases}$ положим

$$\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,t} = \hat{A}^{k-i-t}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) \tag{3}$$

(для $t = 1$ это равенство выполняется автоматически).

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Для наглядности проиллюстрируем ситуацию следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{e}_{1,k-1} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,k-1} & & & & & & \\
\mathbf{e}_{1,k-2} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,k-2} & \mathbf{e}_{m_1+1,k-2} & \dots & \mathbf{e}_{m_2,k-2} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\mathbf{e}_{1,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,1} & \mathbf{e}_{m_1+1,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_2,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_{k-2},1} & \dots \quad \mathbf{e}_{m_{k-1},1},
\end{array}$$

причем в этой «таблице» векторы, стоящие строкой ниже, являются образом, относительно $\hat{A}$, соответствующего вышестоящего вектора.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство.

$$
\underbrace{\left|\begin{array}{c|c|c|c|c}
\underbrace{\mathbf{e}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{m_1,1}}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-1}(U)} & \mathbf{e}_{m_1+1,1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{m_2,1} & \dots & \dots & \mathbf{e}_{m_{k-2},1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{m_{k-1},1} \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-2}(U)} & & & & \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-i}(U)} & & & & \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}(U)} & & & & \\
\end{array}\right|}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})}
$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Теперь осталось доказать, что

$$\mathbf{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}, \right\}$$

— искомый канонический базис. Нетривиальным здесь является только доказательство того факта, что $\mathbf{Б}$ — базис.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Докажем сначала, что система

$$\mathbf{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}, \right\}$$

линейно независима.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

Подействуем на левую и правую части равенства оператором $\hat{A}^{q-1}$, получим

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

$$= \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,q}) =$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты λ_{ij} — ненулевые и q — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого i.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,q}) = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq}\mathbf{e}_{i,1}.$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Получили

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq} \mathbf{e}_{i,1}.$$

Но система векторов

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2},1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

линейно независима, противоречие.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Получили

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq} \mathbf{e}_{i,1}.$$

Но система векторов

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2},1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

линейно независима, противоречие.

Значит, все λ_{ij} равны 0, то есть система **Б** **линейно независима**.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Теперь осталось доказать, что

$$\mathbf{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

— искомый канонический базис.

Теперь докажем, что система векторов **Б** полна, то есть любой вектор является линейной комбинацией векторов этой системы.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$ то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$ то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Поэтому $\hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum\limits_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-2}(U)$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$ то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Поэтому $\hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum\limits_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-2}(U)$. Отсюда

$$\exists \lambda_{j,k-2} \quad \hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) = \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in\operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in\operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

Продолжая этот процесс, в конце концов получим такой набор коэффициентов, что выполняется равенство $\mathbf{x}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}=\mathbf{0}$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in\operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

Из $\mathbf{x}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}=\mathbf{0}$ следует требуемое равенство $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}$.

Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства). *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства U, то имеется канонический базис линейного пространства U.*

Доказательство. Получили требуемое соотношение $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_{j,k-i} \mathbf{e}_{j,k-i}$.

Разумеется, последнее рассуждение следовало бы оформить с помощью математической индукции. Теорема доказана.

Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению μ, равна кратности корня μ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.

Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению μ, равна кратности корня μ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.
- В нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению μ, равно размерности ядра оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$.

Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению μ, равна кратности корня μ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.
- В нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению μ, равно размерности ядра оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$.
- Более того, для любого натурального числа k в нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению μ и имеющих *не менее* k строк, равно размерности ядра оператора $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k$.

Некоторые полезные факты

- Максимальный размер жордановой клетки, отвечающей μ, равен минимальному такому $k \in \mathbb{N}$, что $\mathrm{Rg}\left(\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^{k}\right) = \mathrm{Rg}\left(\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^{k+1}\right)$.

Построение канонического базиса

В соответствии с логикой доказательства теоремы о жордановой форме, для нахождения канонического базиса корневого подпространства $U(\hat{A}, \mu)$, мы переходим к рассмотрению линейного оператора $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, так как, согласно **лемме об инвариантных подпространствах операторов** $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$, имеет место равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \mu\hat{E}, 0) = U(\hat{B}, 0)$. Мы найдем канонический базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ корневого подпространства $U(\hat{B}, 0)$, в нем матрица ограничения оператора $\hat{B}$ на инвариантное подпространство $U(\hat{B}, 0)$ имеет вид $\begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ & & \ldots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & J_s \end{pmatrix}$, где $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ — жорданова клетка.

Построение канонического базиса

Тогда, согласно теореме об изоморфности линейного пространства линейных операторов и линейного пространства матриц, матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на инвариантное подпространство $U(\hat{A}, \mu)$ имеет в этом базисе вид $\begin{pmatrix} J_1' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2' & \dots & \mathbf{0} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J_s' \end{pmatrix}$, где

$$J_p' = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}.$$

Построение канонического базиса

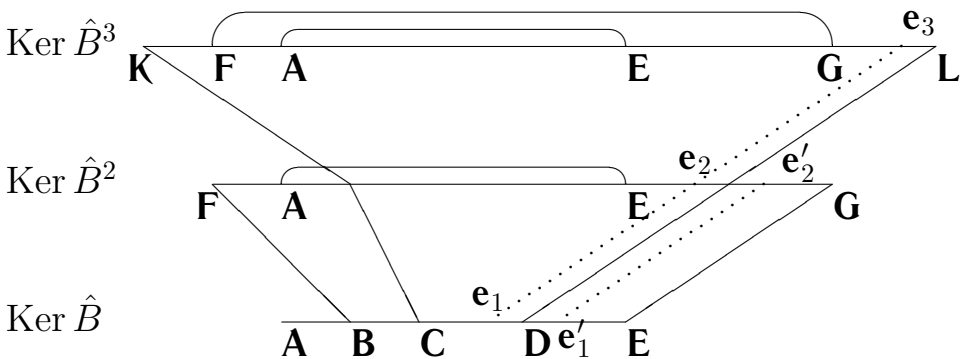

Рис. 2.

На рис. 2 мы изобразили **корневое** подпространство $U(\hat{B}, 0)$. Здесь горизонтальными отрезками изображены ядра линейных операторов: отрезок $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}$, отрезок $[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}^2$, отрезок $[\mathbf{K}, \mathbf{L}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}^3$. При этом отрезок $[\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ изображает множество всех тех векторов из ядра, у которых есть прообразы относительно $\hat{B}$, то есть $[\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ изображает множество $\hat{B}(\operatorname{Ker} \hat{B}^2)$. Отрезок $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ изображает множество $\hat{B}^2(\operatorname{Ker} \hat{B}^3)$.

Построение канонического базиса

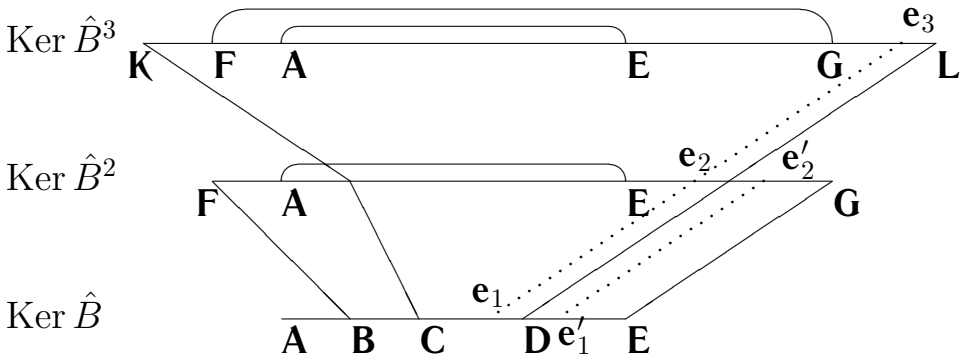

Рис. 2.

Образно говоря, у каждого элемента из $[\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ есть «папа» (прообраз относительно $\hat{B}$), причем у элементов из $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ — даже «дедушка» (прообраз относительно $\hat{B}^2$), а вот каждый элемент из $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ — «сирота».

Построение канонического базиса

Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис жордановой клетки, то есть такой базис инвариантного подпространства, в котором матрица оператора $\hat{B}$ имеет вид жордановой клетки (строго говоря, речь надо вести не об операторе $\hat{B}$, а о его ограничении на это инвариантное подпространство), то $\hat{B}$ действует на базисные векторы так: $\hat{B}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k-1}, \ \ldots, \ \hat{B}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Значит, для нахождения базиса жордановой клетки достаточно выбрать вектор $\mathbf{e}_1$ из $\operatorname{Ker} \hat{B}$, взять в качестве $\mathbf{e}_2$ прообраз вектора $\mathbf{e}_1$ относительно $\hat{B}$ и продолжать в таком же духе «выращивать» этот базис до тех пор, пока у вектора $\mathbf{e}_k$ не окажется прообраза. Однако тут есть одна проблема. Дело вот в чем.

Построение канонического базиса

Вообще говоря, не у каждого элемента из ядра есть «предок». Более того, если в $\operatorname{Ker}\hat{B}$ есть «сироты» (векторы, не имеющие прообраза относительно $\hat{B}$), то «почти каждый» элемент из $\operatorname{Ker}\hat{B}$ — «сирота». В самом деле, если, например, $\operatorname{Ker}\hat{B}$ — плоскость, в которой есть «сироты» (но у некоторых векторов есть «папы»), то множество векторов, у которых есть прообраз относительно $\hat{B}$, образуют одномерное подпространство — прямую, в то время как все остальные векторы этой плоскости — «сироты».

Построение канонического базиса

Поэтому построение базисов «маленьких клеток» обычно не вызывает трудностей: как правило, наугад выбранный «сынок», то есть вектор из $\operatorname{Ker}\hat{B}$, либо вообще не имеет «предков», либо его «генеалогическое древо» является коротким. Следовательно, в ситуации, когда не у всех векторов из $\operatorname{Ker}\hat{B}$ «генеалогическое древо» одинаковой длины, при построении канонического базиса одна из важнейших задач состоит в том, чтобы найти в $\operatorname{Ker}\hat{B}$ «самые родовитые» векторы, у которых имеются как можно более «далекие предки».

Построение канонического базиса

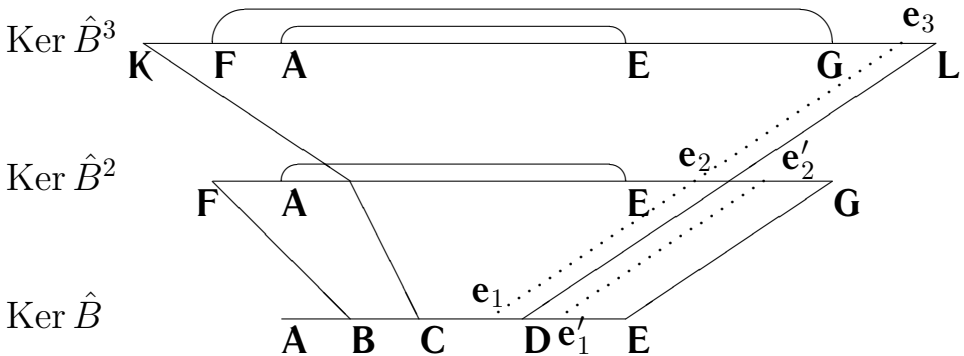

Рис. 2.

Например, таким является изображенный **на рисунке 2** вектор $\mathbf{e}_1$. Вектор $\mathbf{e}_1'$ имеет прообразы только относительно действия оператора $\hat{B}$, но относительно действия оператора $\hat{B}^2$ прообразов у него нет.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?