Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Отображения. Функции

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Отображение. Функция **4**
I.1. Определение функции 30
I.2. Взаимно однозначные функции 33
I.3. Критерий взаимной однозначности 38

II. В каких направлениях развивать исследование? **45**
II.1. «Стандартные» способы задания функции 50
II.2. Статические и динамические модели функции 58
II.3. Задание функции выражением. Формула 68
II.4. Тождественные преобразования 81

III. Преобразования функций **86**
III.1. Ограничение функции на подмножество 87
III.2. Суперпозиция (композиция) функций 88

III.3. Обратная функция 111

IV. Теоремы об обратной функции **131**

IV.1. Теорема о взаимной обратности 132

IV.2. Теорема о функции, обратной к суперпозиции 133

IV.3. Критерий существования обратной функции 134

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции 135

I. Отображение. Функция

Какие ассоциации вызывает у вас слово «отображение»?

I. Отображение. Функция

Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

I. Отображение. Функция

Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

— отображение как результат (это есть отображение...).

I. Отображение. Функция

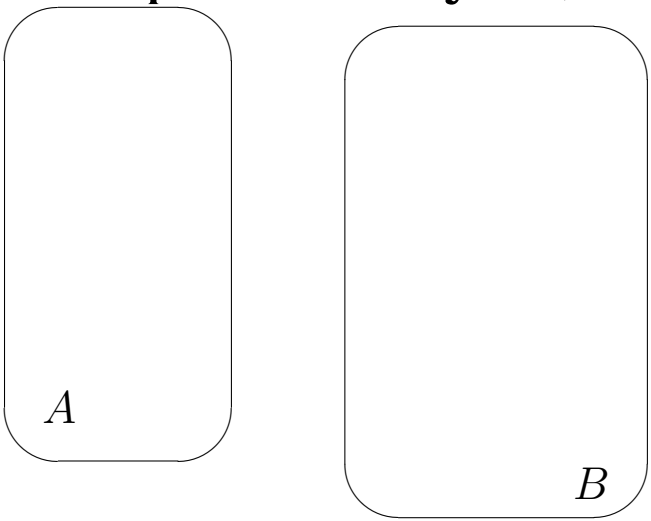
Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

— отображение как результат (это есть отображение...).

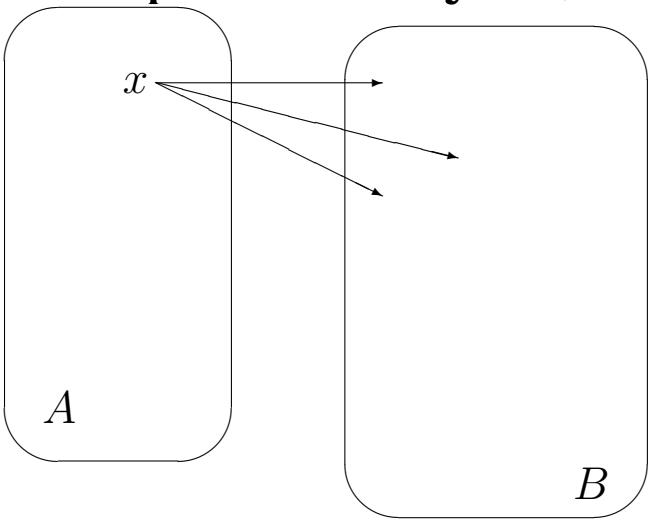
Мы будем ориентироваться на втором понимании термина «отображение»: отображение как результат.

I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

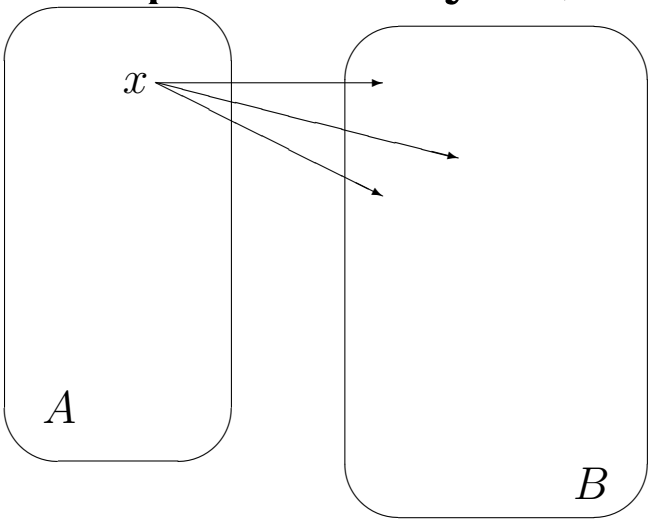
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Например, элементу x из A соответствует несколько элементов из B.

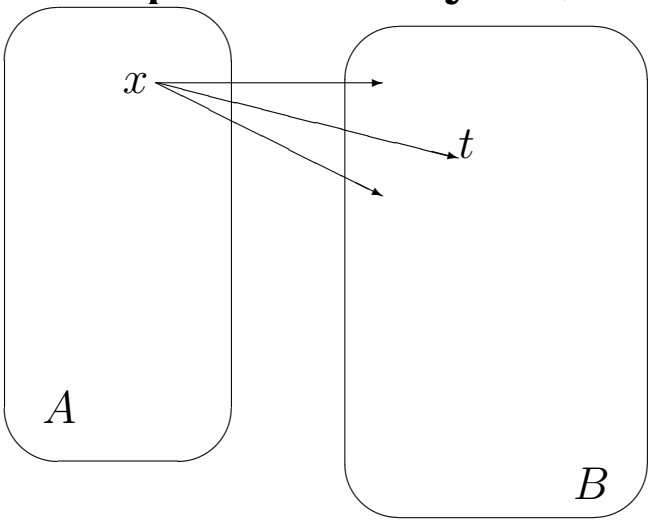
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Любой из элементов множества B, который отображением f сопоставлен элементу x, называется **образом** элемента x относительно действия f.

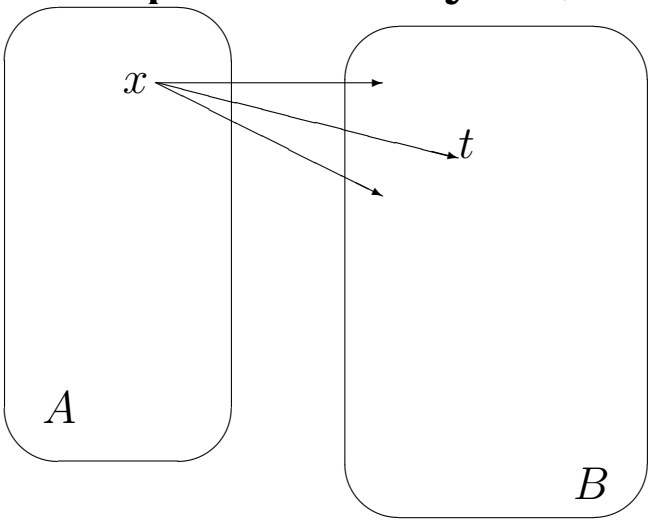
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Элемент, образом которого является элемент t из B, называется **прообразом** элемента t.

I. Отображение. Функция

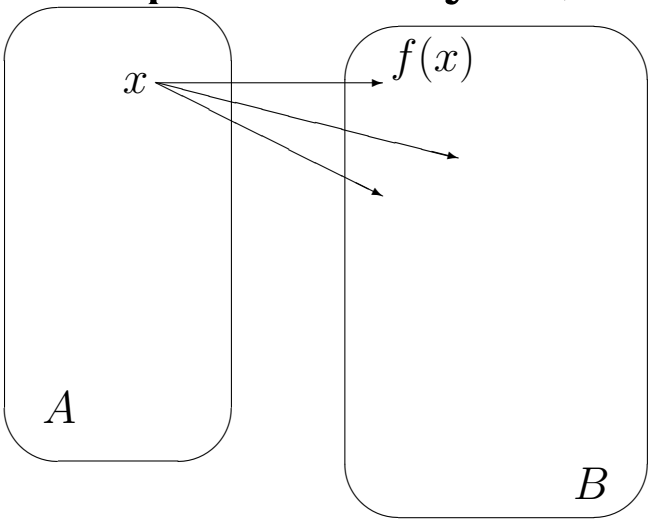


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Элемент, образом которого является элемент t из B, называется **прообразом** элемента t.

В данном случае элемент x является прообразом элемента t.

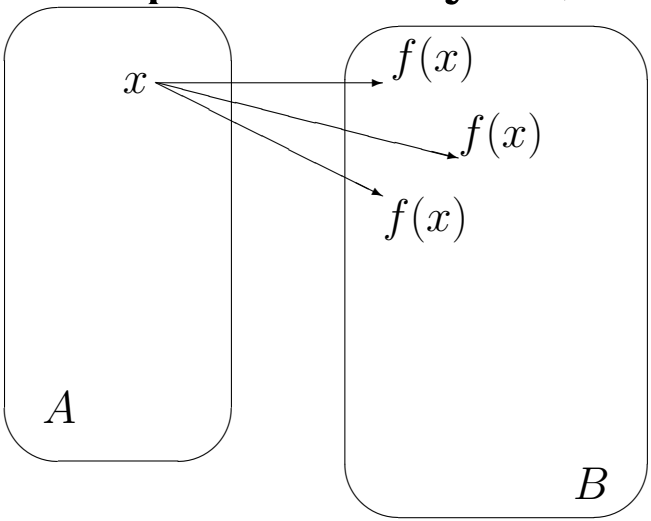
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Образ элемента x относительно отображения f обозначается через $f(x)$.

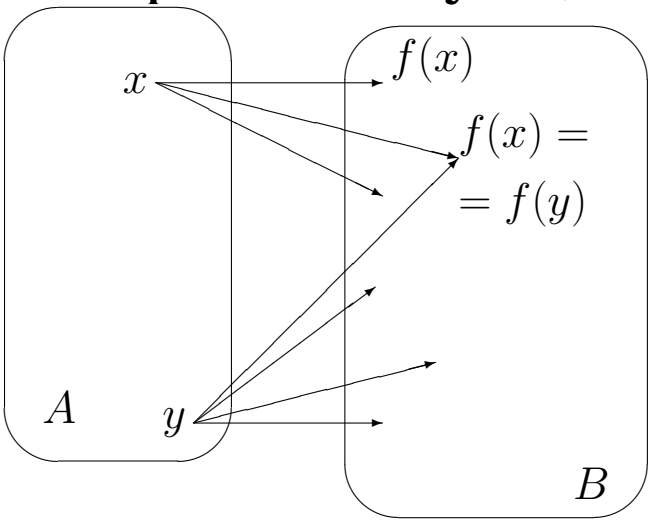
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Образ элемента x относительно отображения f обозначается через $f(x)$.

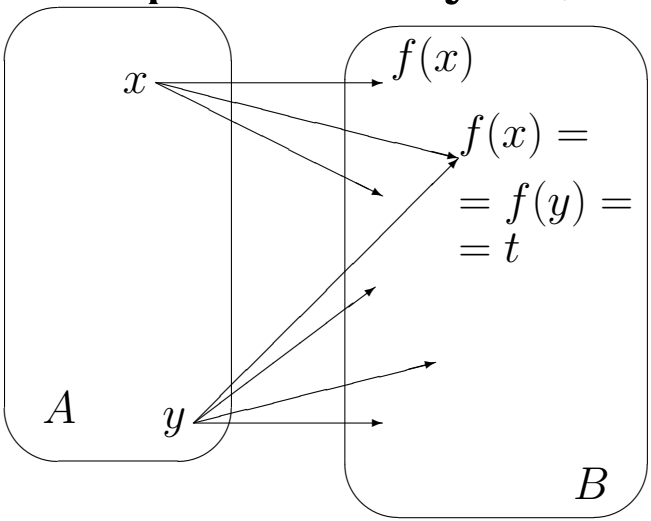
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Вообще говоря, один и тот же элемент может быть образом разных элементов из A.

I. Отображение. Функция

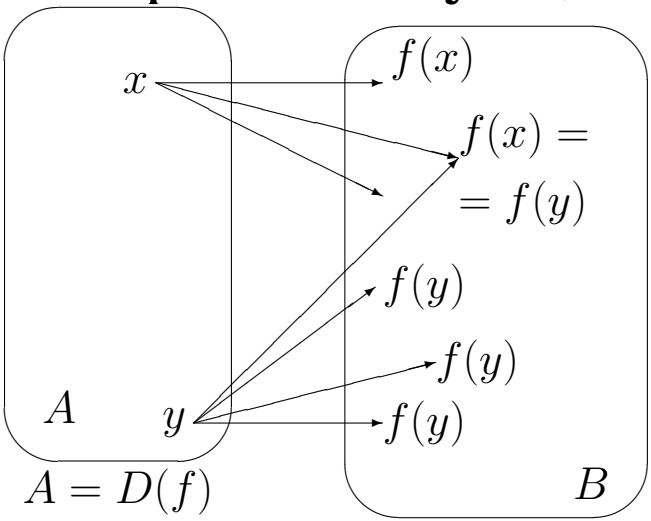


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Вообще говоря, один и тот же элемент может быть образом разных элементов из A.

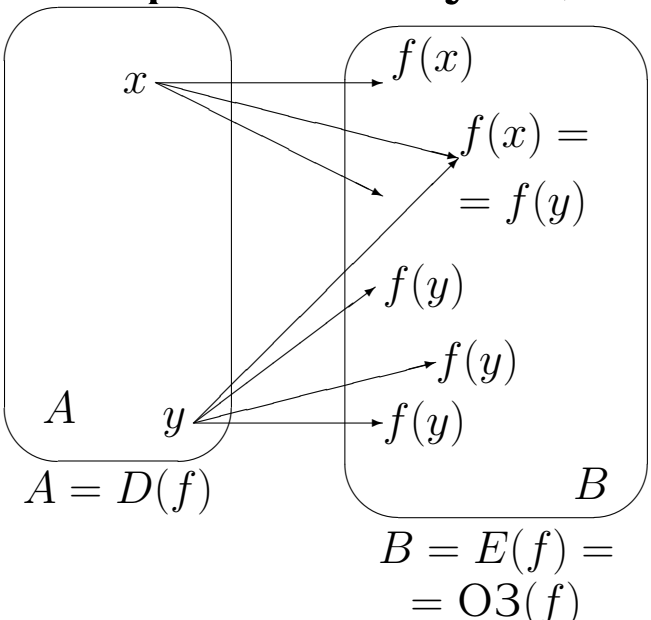
В данном случае прообразами элемента t будут и элемент x, и элемент y.

I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B. Множество A называется **областью определения отображения** f, обозначаемой через $D(f)$.

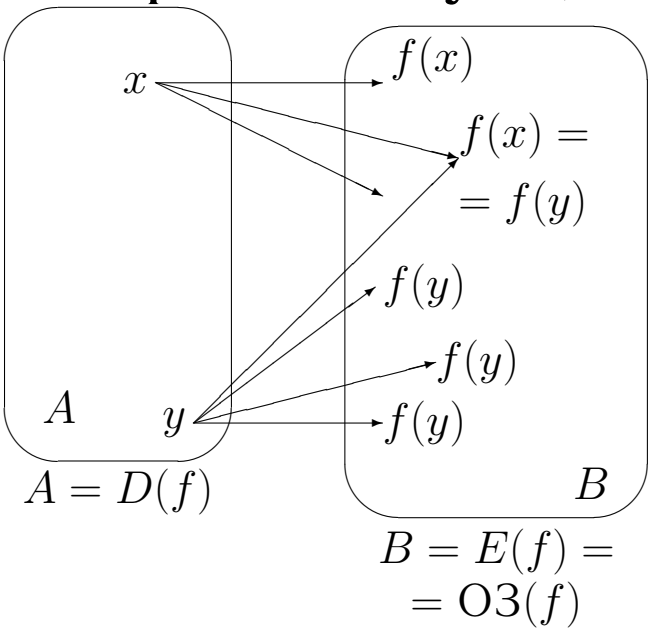
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B. Множество A называется **областью определения отображения** f, обозначаемой через $D(f)$. Множество всех значений отображения f образует **область значений отображения** f и обозначается как $E(f)$ или $\text{ОЗ}(f)$.

Тот факт, что $D(f) = A$ и $E(f) \subseteq B$ обычно записывают так: $f : A \mapsto B$.

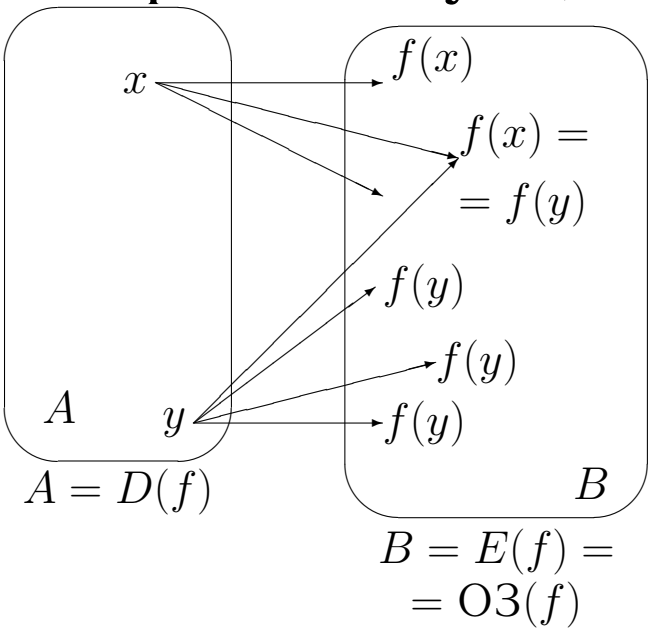
I. Отображение. Функция



Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

I. Отображение. Функция

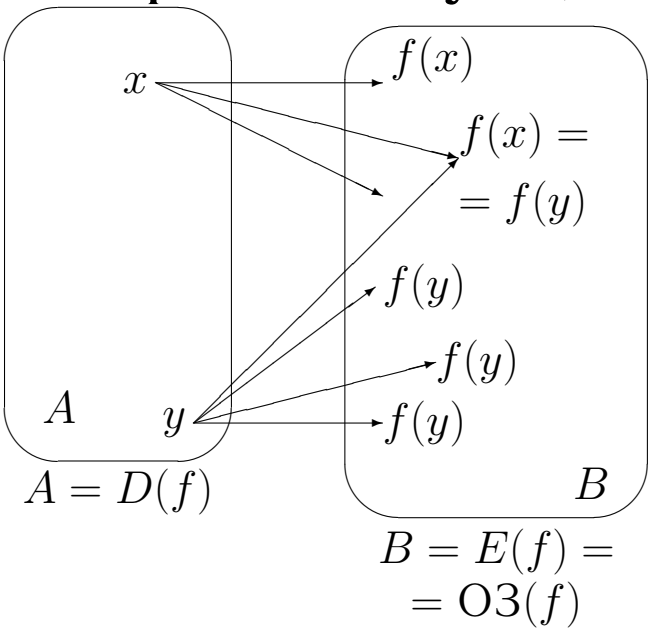


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

Иногда термины *отображение* и *функция* отождествляются, но мы будем считать функцией только однозначное отображение.

I. Отображение. Функция

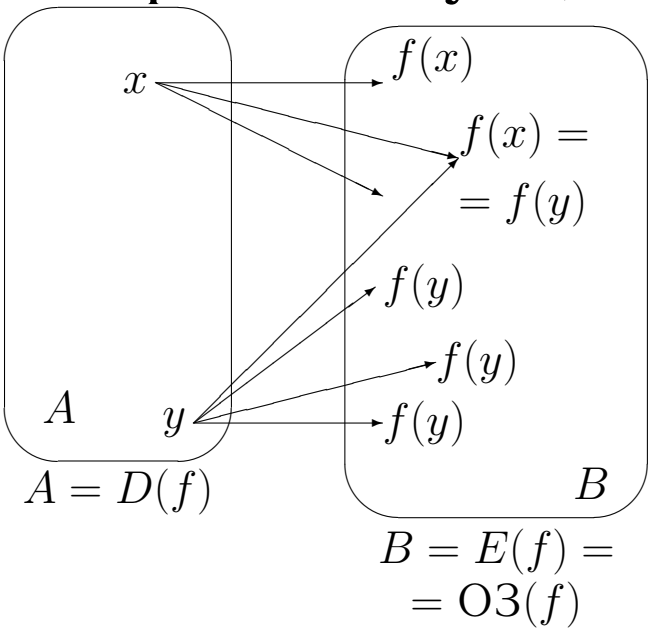


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

Что плохо в этом определении функции?

I. Отображение. Функция

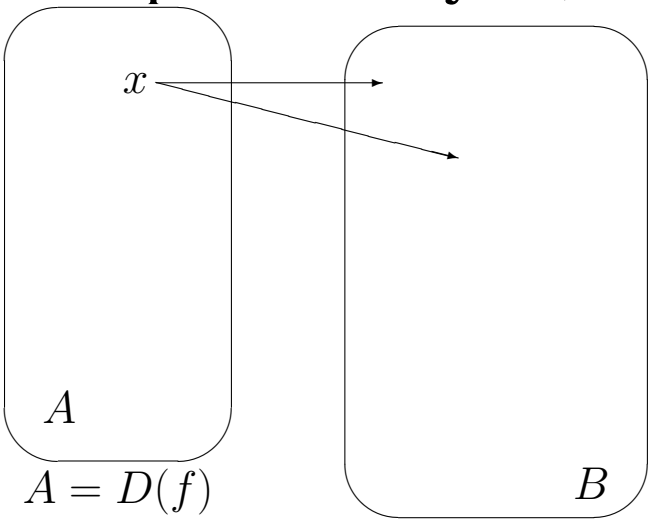


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

Главный недостаток состоит в том, что оно сформулировано не на «языке равенств и неравенств».

I. Отображение. Функция



$A = D(f)$

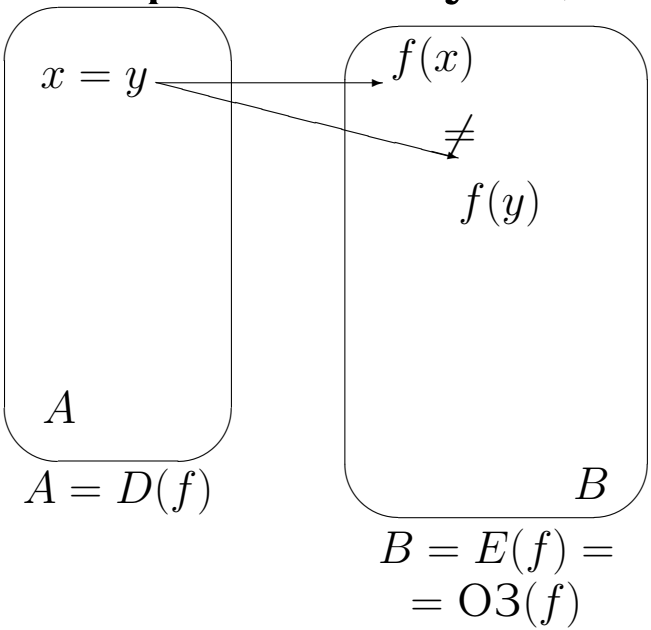
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

Как записать на «языке равенств» невозможность изображенной ситуации?

I. Отображение. Функция

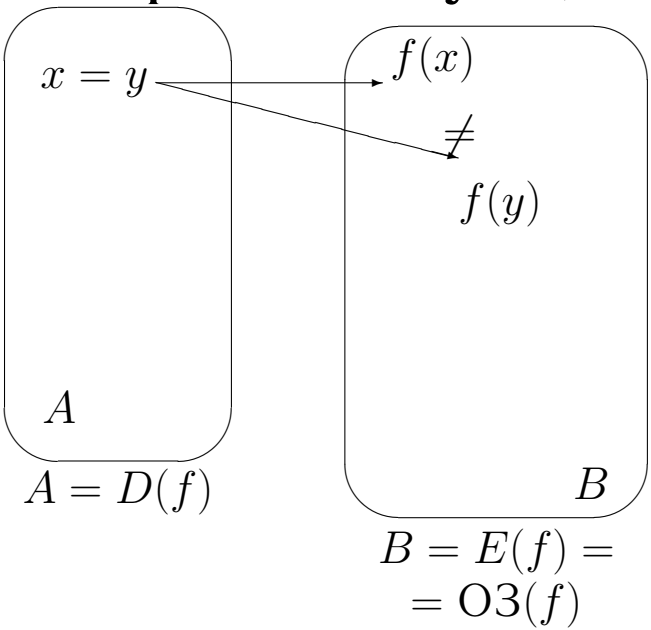


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

Как записать на «языке равенств» невозможность изображенной ситуации?

I. Отображение. Функция

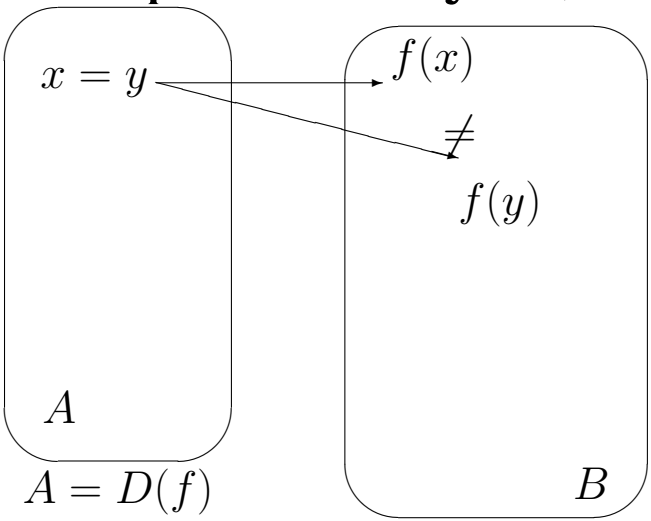


Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

I. Отображение. Функция



$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

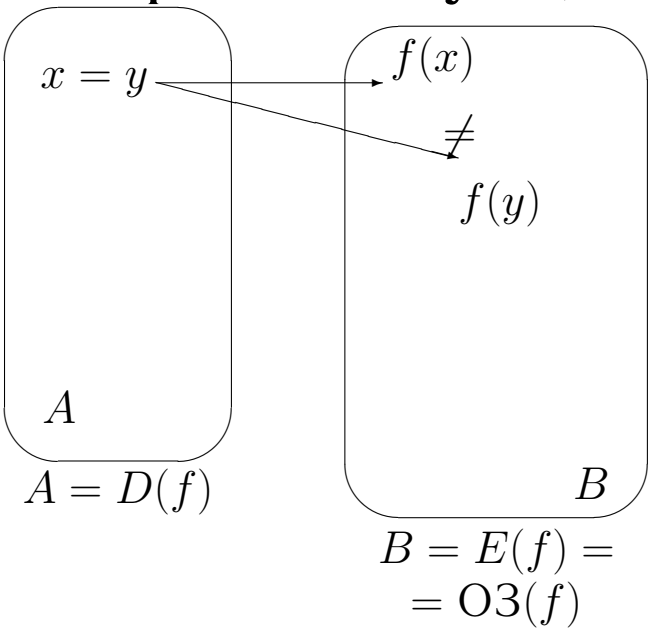
Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

Мы получили формулу. Что надо сделать в первую очередь?

I. Отображение. Функция



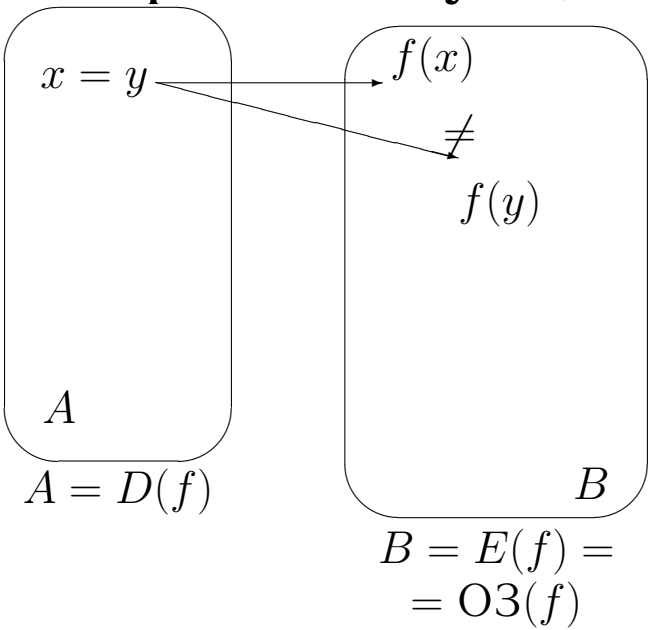
Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

Надо проверить правильность этой формулы. Что плохо в этой формуле?

I. Отображение. Функция



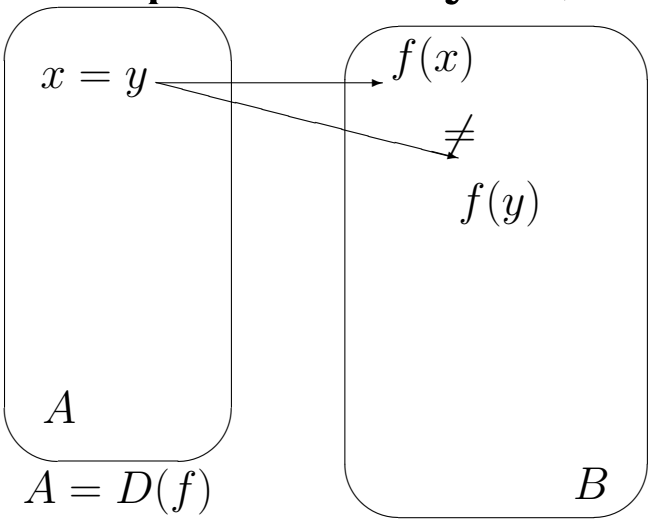
Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

Не указано явно, что x и y берутся из области определения функции f.

I. Отображение. Функция



$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества A сопоставлен один или несколько элементов из множества B.

Если каждому элементу из A сопоставлен *только один* элемент из B, то отображение f назовем **функцией**.

$$\begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \Big).$$

I.1. Определение функции

Определение 1. *Отображение f называется* **функцией** *или* **однозначным отображением**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \Big), \tag{2}$$

что равносильно

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \\ x = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y), \tag{3}$$

I.1. Определение функции

Определение 1. *Отображение f называется* **функцией** *или* **однозначным отображением**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \Big), \tag{2}$$

что равносильно

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \\ x = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y), \tag{3}$$

Можно привести формулировку на языке неравенств: *отображение называется однозначным тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(f(x) \neq f(y) \ \Rightarrow \ x \neq y \Big).$$

I.1. Определение функции

Из наших рассуждений можно сделать вывод, что отображение мы фактически рассматриваем как **неопределяемое понятие**. На самом деле понятие «отображение» можно свести к понятию **«множество»**, но такое сведение представляет скорее академический, чем практический интерес. Поэтому нам сейчас проще ввести новое неопределяемое понятие, чем сводить его к известным понятиям, несмотря на то, что при этом мы, к сожалению, нарушаем принцип **«бритвы Оккама»**.

I.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда

I.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда у каждого элемента из $E(f)$ имеется только один **прообраз**.

I.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда у каждого элемента из $E(f)$ имеется только один **прообраз**.

Такая функция называется взаимно однозначной.

I.2. Взаимно однозначные функции

Определение 2. *Функция f называется* **взаимно однозначной функцией**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \Big). \tag{4}$$

I.2. Взаимно однозначные функции

Определение 2. *Функция f называется* **взаимно однозначной функцией**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \Big). \tag{4}$$

Характеристическое свойство на языке неравенств можно записать, например, в виде:

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x \neq y \;\Leftrightarrow\; f(x) \neq f(y) \Big). \tag{5}$$

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из определения и расшифровки с помощью правил перевода на **«язык равенств и неравенств»**.

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство необходимости. Пусть для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство необходимости. Пусть для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство необходимости. Пусть для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \; a = b,$$

откуда

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство необходимости. Пусть для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \; a = b,$$

откуда

$$f(a) = f(b) \; \Rightarrow \; a = b,$$

то есть f — взаимно однозначная функция.

I.3. Критерий взаимной однозначности

Теорема 1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Доказательство необходимости. Пусть для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \ a = b,$$

откуда

$$f(a) = f(b) \ \Rightarrow \ a = b,$$

то есть f — взаимно однозначная функция.

Достаточность доказывается аналогично.

II. В каких направлениях развивать исследование?

Можно выделить следующие направления исследования.

II. В каких направлениях развивать исследование?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует в первую очередь изучить некоторые **частные виды функций**.

II. В каких направлениях развивать исследование?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует в первую очередь изучить некоторые **частные виды функций**.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

II. В каких направлениях развивать исследование?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует в первую очередь изучить некоторые **частные виды функций**.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

II. В каких направлениях развивать исследование?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует в первую очередь изучить некоторые **частные виды функций**.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

Сейчас не будем рассматривать применение других базовых исследовательских стратегий: стратегии поиска аналогии, стратегии предвкушения, стратегии обогащения модели, стратегии смены ролей и приоритетов.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

Обычно применяются следующие типовые способы задания функции.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА. Это наиболее часто встречающийся в школьной математике способ задания функции. Например, формула $f(x) = \sin^2 x$ представляет собой именно такой способ задания функции. Переменная, вместо которой надо подставлять элемент из области определения функции (в данном примере это x), называется **аргументом функции**. При этом явно указывается процедура *вычисления* значения $f(x)$ функции f на аргументе x, точнее, при любом *значении аргумента*. Фактически этим способом мы указываем *правило* вычисления значения функции f при произвольном значении аргумента x.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента. Например, если функция f задана таблицей

x	-3	4	2
$f(x)$	0	-1	1

, то $D(f) = \{-3, 4, 2\}$, $\quad E(f) = \{0, -1, 1\}$ и $f(-3) = 0$, $f(4) = -1$, $f(2) = 1$.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

Следует отметить, что таблица не всегда имеет такой вид. У Вас, наверное, есть или была тетрадка, на задней обложке которой приведена таблица умножения. Она задана иначе. Отметим, что таблицей умножения задается функция $f(x, y) = x \cdot y$ от двух переменных, ее область определения состоит из *пар чисел*. Обычно при задании таблицей значений функции двух переменных (то есть функции f такой, что $D(f) = A \times B$) эта таблица значений имеет следующий вид:

$y \backslash x$	$\dots$	x_i	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_j	$\dots$	$f(x_i, y_j)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

Например, для функции $f(x, y) = x \cdot y$, где $D(f) = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$ таблицу значений можно записать в виде

$y \backslash x$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

. Такой вид таблицы значений для функции двух переменных обычно удобнее таблицы из двух строчек:

(x, y)	$(-1; -1)$	$(-1; 0)$	$(-1; 1)$	$(0; -1)$	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(1; -1)$	$(1; 0)$	$(1; 1)$
$f(x, y)$	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

Отметим один важный факт: *таблицей, как правило, нельзя задавать функцию с бесконечной областью определения.*[1]

[1] Можно было бы считать исключениями из этого правила некоторые функции, например, прогрессии, но это требует специальных оговорок, причем весьма существенных.

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

ГРАФИК. Получим определение графика функции?

II.1. «Стандартные» способы задания функции

ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

ТАБЛИЦА. Ее еще называют **таблицей значений**.

ГРАФИК. **Получим определение графика функции?**

Определение 3. Графиком *функции* f *называется множество точек плоскости с координатами* $\big(x, f(x)\big)$.

Рассмотреть пример?

II.2. Статические и динамические модели функции

При изучении этой главы до этого момента основная нагрузка приходилась, в основном, на левую половину мозга, отвечающую за логическое мышление. Для того чтобы усвоить материал, необходимо, чтобы подключилась правая половина мозга — образное мышление, интуиция и т.п. Надо, чтобы у Вас сформировалась система моделей изучаемого понятия. Мы предлагаем два типа «моделей» понятия функции.

II.2. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция f представляется «черным ящиком», на вход которого подается x, а на выходе получаем $f(x)$.

II.2. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция f представляется «черным ящиком», на вход которого подается x, а на выходе получаем $f(x)$.

Пример — задание функции выражением. Кроме привычных выражений типа $x^2 - 2x$, могут быть выражения других типов. Например, можно задать некоторую функцию такой *словесной* формулой: «отображение h каждой цифре ставит в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру».

II.2. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция f представляется «черным ящиком», на вход которого подается x, а на выходе получаем $f(x)$.

Пример — задание функции выражением. Кроме привычных выражений типа $x^2 - 2x$, могут быть выражения других типов. Например, можно задать некоторую функцию такой *словесной* формулой: «отображение h каждой цифре ставит в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру».

Отличительная черта «динамических моделей»: четко выделено, куда надо подставлять элемент из области определения (например, при задании функции выражением этот элемент надо подставлять вместо аргумента функции), и где получим значение функции.

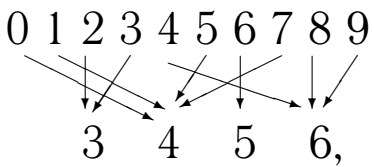
II.2. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции h можно поставить в соответствие

II.2. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции h можно поставить в соответствие

схему:



II.2. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции h можно поставить в соответствие

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & 3 \arrow[dl] & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[dl] & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & 7 \arrow[dl] \arrow[dr] & 8 \arrow[dl] & 9 \arrow[dl] \\
& 3 & & 4 & & 5 & & 6, &
\end{tikzcd}$$

схему:

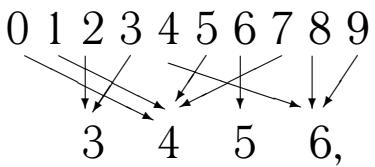
таблицу

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(x)$	4	4	3	3	6	4	5	4	6	6

II.2. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции h можно поставить в соответствие

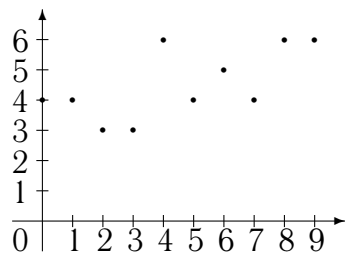
схему:



таблицу

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(x)$	4	4	3	3	6	4	5	4	6	6

или график



II.2. Статические и динамические модели функции

Таким образом, в статических моделях и значения аргумента, и значения отображения «размазаны», то есть не выделено «место, куда подставлять элемент» из области определения.

Чтобы найти $h(2)$ по вышеприведенной таблице, надо *найти* в первой строке число 2, и тогда в соответствующем столбце во второй строке находим значение функции — число 3. Если функция h задана формулой (например: «цифре ставится в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру»), ситуация принципиально другая: к цифре «2» применяем эту процедуру, не требующую поиска цифры 2 в «объекте», соответствующем области определения функции (например, строке таблицы). Получаем, что числу 2 соответствует слово «два», вычисляем количество букв в нем: 3 и получаем значение $h(2)$.

II.2. Статические и динамические модели функции

Таким образом, в статических моделях и значения аргумента, и значения отображения «размазаны», то есть не выделено «место, куда подставлять элемент» из области определения.

Еще пример статической модели — график функции. Напомним, что **график функции** h — *это множество точек плоскости с координатами* $(x, h(x))$.

Рассмотреть пример?

II.3. Задание функции выражением. Формула

Часто в учебниках, сборниках задач и экзаменационных билетах можно прочитать фразы типа «функция $\sin x$...» или «функция $f(x) = x^2$...» На самом деле в этих случаях следовало бы написать что-нибудь типа «функция $\sin$» или соответственно «функция f, заданная *выражением* $f(x) = x^2$...», или «функция f, заданная *формулой* $f(x) = x^2$...».

II.3. Задание функции выражением. Формула

Что означает в последнем случае термин *выражение*?

II.3. Задание функции выражением. Формула

Что означает в последнем случае термин *выражение*?

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

Предполагается, что мы имеем дело с некоторым «алфавитом» и совокупностью грамматических правил, в соответствии с которыми некоторые «слова», составленные из «букв» этого алфавита, считаются грамматически правильными, а некоторые — «неправильными», то есть нарушающими правила используемой грамматики.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

Грамматически правильно построенные слова называются **выражениями**.

Например, если речь идет о русском языке, то выражения — это слова, фразы, предложения и последовательности предложений, построенные с соблюдением формальных правил русского языка: орфографии, пунктуации и т.п.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

Грамматически правильно построенные слова называются **выражениями**.

Отметим, что нас сейчас не интересует *смысл* высказывания, нам в данный момент важна *формальная, грамматическая* правильность. Скажем *У воробьев по шесть ног* — грамматически правильное «слово» (пробел между словами считается «буквой»), то есть эта фраза является выражением. Но это выражение является неверным по *смыслу* , то есть неверным с точки зрения *семантики*. А слово *варобей* выражением не является, как и фраза *воробей, похожая на птички*, так как в последнем случае не согласуется род существительного (воробей — мужского рода) и прилагательного (окончание -ая в слове *похожая*).

II.3. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

Грамматически правильно построенные слова называются **выражениями**.

Есть свои грамматические правила для геометрических (а особенно технических) чертежей. Если речь идет о языке школьной математики, то выражения имеют вид $2\sin^2 x$, $1-\cos 2x$, $\log_{x-3}\left(x^2-1\right)+5\cos^3\sqrt{2x+3}<x-2$ и т.п. Слово $\sin(x]\cdot -2$ выражением не является.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Рассмотрим подробнее математические выражения (в рамках школьной математики). Некоторые «слова», то есть последовательности букв, могут иметь специальный смысл. Например, последовательность букв $\sin$ обычно обозначает отдельное слово. Для того чтобы отличить его от слова sin в ситуации, когда оно обозначает *произведение* переменных s, i, n, точку, обозначающую умножение, лучше не опускать, и писать $s \cdot i \cdot n$.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Следует отличать понятия *выражение* и *формула*. Отметим, что **формула** — *это высказывание,* то есть *фраза, относительно которой осмысленным является вопрос о том, верна ли эта фраза* . Например, $x^2 - 1 = x$ — это формула, $5 \vdots (x^2 + 1)$ и $4 < 2$ — тоже формулы. Для того чтобы фраза была осмысленной (иначе она не может быть высказыванием), надо, чтобы она была построена в соответствии с некоторыми грамматическими правилами. Таким образом, *формулы — это частный случай выражений*.

II.3. Задание функции выражением. Формула

В математике среди выражений, кроме высказываний, особо выделяют еще **арифметические выражения** (это выражения типа $1+2\cdot 3$, $(5-1):2$, $\dfrac{7+2}{4}$ и т.п.) и **алгебраические выражения** (это выражения типа $x-y^2$, $\dfrac{x\left(x^2-\log_3 x\right)}{5^x}$ и т.п.). *Формулы* в языках программирования часто называют **логическими выражениями**. Таким образом, например, $x-2\le x^2$ — это логическое выражение или формула. Среди логических выражений особо отметим равенство и неравенство. **Левой частью** неравенства или равенства называется алгебраическое выражение, стоящее *слева* от соответствующего знака отношения: $\le, <, >, \ge, =, \ne$. Соответственно **правой частью** неравенства или равенства называется алгебраическое выражение, стоящее *справа* от соответствующего знака отношения: $\le, <, >, \ge, =, \ne$.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Рассмотрим *смысл* выражений типа $\lg\left(x^2+1\right)-5$ и т.п. Выражаясь «по-научному», обратимся к *семантике* математических выражений, задающих функции. Фраза *функция f задана выражением* $f(x)=x^2-x$ означает, что мы явно указываем способ вычисления *значения функции f* на произвольном элементе области определения: надо этот элемент подставить вместо аргумента функции, в данном примере — вместо буквы x.

II.3. Задание функции выражением. Формула

Таким образом, как мы отмечали в предыдущем разделе, задание функции формулой фактически представляет собой реализацию *динамической модели* функции f, так как при этом способе четко указано, куда надо подставлять элемент области определения (вместо аргумента), и где надо «считывать» значение. Например, пусть для функции, заданной формулой $f(x) = x^2 - x$, надо вычислить значение на числе 3. Нам следует вычислить $f(3)$. Следовательно, в формуле $f(x) = x^2 - x$ надо вместо буквы x в левой и правой частях равенства подставить символ 3, получим $f(3) = 3^2 - 3$. Получаем $f(3) = 6$. Таким образом, элемент области определения (число 3) надо подставить вместо *аргумента функции*, то есть буквы, указанной в скобках, стоящих после обозначения функции, а значение функции «присваивается», говоря языком информатики, выражению $x^2 - x$, то есть всему этому «слову».

II.3. Задание функции выражением. Формула

Ясно, что выражения $f(x) = x^2 - x$ и $f(t) = t^2 - t$ задают одну и ту же функцию, просто в первом случае в качестве аргумента функции используется символ x, а во втором — t. На результате *вычисления значения* функции это не отразится. И в том, и в другом случае получим $f(3) = 3^2 - 3 = 6$, просто в первом случае мы числом 3 заменили букву x, а во втором — букву t. Из этого примера следует, что обозначение аргумента может быть практически любым (кроме естественных исключений: $0, 1, \ldots, \cos, \ldots$), при этом функция не изменится. То есть формулы $f(x) = x^2 - x, \quad f(t) = t^2 - t, \quad f(s) = s^2 - s$ и т.п. задают *одну и ту же функцию* f.

II.4. Тождественные преобразования

Заметим, что для $f(x) = x^2 - x$ при вычислении $f(3) = 3^2 - 3 = 6$ мы не оставили в ответе «слово» $3^2 - 3$, а преобразовали его в соответствии с правилами арифметики (эти правила носят грамматический характер). Но многие из таких преобразований можно проделать не только *после* подстановки числа вместо аргумента, но и *до* этого, «в общем виде».

II.4. Тождественные преобразования

Ясно, что выражение $x(x-1)$ задает ту же функцию, что и выражение x^2-x, потому что при каждом значении переменной x значение выражения $x(x-1)$ равно значению выражения x^2-x. Таким образом, к выражению, задающему функцию, можно применять некоторые преобразования. Такими преобразованиями, например, являются: вынесение за скобку общего множителя, применение формул сокращенного умножения, формул типа $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ и т.п. Поставим вопрос в общем виде: какие именно преобразования допустимы?

II.4. Тождественные преобразования

Ясно, что выражение $x(x-1)$ задает ту же функцию, что и выражение x^2-x, потому что при каждом значении переменной x значение выражения $x(x-1)$ равно значению выражения x^2-x. Таким образом, к выражению, задающему функцию, можно применять некоторые преобразования. Такими преобразованиями, например, являются: вынесение за скобку общего множителя, применение формул сокращенного умножения, формул типа $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ и т.п. Поставим вопрос в общем виде: какие именно преобразования допустимы?

Ответ таков: только такие, применение которых приводит к выражению, задающему ту же функцию.

II.4. Тождественные преобразования

Определение 4. *Преобразование алгебраического выражения назовем* **тождественным**, *если преобразованное алгебраическое выражение задает ту же функцию, что и исходное алгебраическое выражение.*

II.4. Тождественные преобразования

Определение 4. *Преобразование алгебраического выражения назовем* **тождественным**, *если преобразованное алгебраическое выражение задает ту же функцию, что и исходное алгебраическое выражение.*

Чем богаче доступный «арсенал» тождественных преобразований, тем проще решать уравнения, неравенства и другие задачи. Именно поэтому так много внимания в школе уделяется формальным правилам алгебры чисел и алгебры числовых функций, в частности, формулам сокращенного умножения, а также тригонометрическим тождествам.

III. Преобразования функций

В соответствии **предложенными направлениями исследований** рассмотрим преобразования функций как результат применения **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

III.1. Ограничение функции на подмножество

Определение 5. *Пусть f — функция и $M \subseteq D(f)$ (т.е. M — подмножество* ***области определения функции****). Функция g называется* **ограничением** *функции f на множество M, если*

$$\begin{cases} D(g) = M, \\ \forall x \, (x \in M \;\Rightarrow\; g(x) = f(x)) \, . \end{cases} \tag{6}$$

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

В школьном курсе вместо термина *суперпозиция (композиция) функций* используют термин *сложная функция*. Разберемся, что это такое, и попробуем сформулировать четкое определение. Рассмотрим ситуацию, когда *значение* функции f подставляется в качестве *значения аргумента* в функцию g. Например, функция, заданная выражением $5x - 3$, «составлена» из двух функций, первая из которых умножает значение аргумента на 5, а вторая — вычитает из полученного результата число 3.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции f и g. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию h, последовательно соединяя f и g:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g} \overset{h}{\longrightarrow} g(f(x))$$

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции f и g. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию h, последовательно соединяя f и g:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g} \overset{h}{\longrightarrow} g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции f и g. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию h, последовательно соединяя f и g:

$$x \longrightarrow \boxed{\boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g}} \xrightarrow{h} g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции f и g. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию h, последовательно соединяя f и g:

$$x \xrightarrow{\boxed{\boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g}}} \xrightarrow{h} g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

Полученная функция h называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* f и g, или *композицией функций* f и g.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется ...

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется ...

Теперь нужен термин, обозначающий более общее понятие.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется ...

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется ...

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это функция.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется ...

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это функция.

Итак, получаем: *суперпозицией функций называется функция ...*

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Теперь надо задать эту функцию.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа: *выражение*, *таблица* и *график*.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:
выражение, *таблица* и *график*.

Два последних способа применимы к довольно узкому набору функций. Поэтому следует попробовать задать функцию h выражением.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:
выражение, *таблица* и *график*.

Два последних способа применимы к довольно узкому набору функций. Поэтому следует попробовать задать функцию h выражением.

Для этого мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью значений исходных функций*.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью значений исходных функций*.

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью значений исходных функций*.

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

В математике обычно в качестве названия произвольного объекта используется либо специальный термин, либо буква.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций называется функция ...

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью значений исходных функций*.

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

В математике обычно в качестве названия произвольного объекта используется либо специальный термин, либо буква.

Обозначим исходные функции, например, через f и g.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций f и g называется функция ...

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью функций f и g.*

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

суперпозицией функций f и g называется функция ...

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента x с помощью функций f и g.*

Для этого надо сначала вычислить $f(x)$ и потом то, что получилось, подставить в качестве значения аргумента в функцию g. В результате получим $g\left(f(x)\right)$.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Определение 6. Суперпозицией *или* **композицией** *функций* f *и* g *называется функция* h*, заданная формулой* $h(x) = g(f(x))$.

III.2. Суперпозиция (композиция) функций

Определение 6. Суперпозицией *или* **композицией** *функций f и g называется функция h, заданная формулой $h(x) = g(f(x))$.*

В данной работе мы, для сокращения записей, будем обозначать суперпозицию функций символом $\circ$, то есть суперпозиция функций f и g — это функция $f \circ g$. Здесь $f \circ g$ надо воспринимать как отдельное слово, подобно тому, как мы воспринимаем обозначения $\sin$, $\log$ и т.п. То есть нельзя, например, в выражении $\dfrac{f \circ g}{g}$ «сокращать» на g.

Рассмотреть пример?

III.3. Обратная функция

До сих пор мы акцентировали внимание на проблеме нахождения *значения* функции на данном *значении аргумента*, то есть на нахождении *образа элемента*. Но, как обычно, при появлении какой-либо задачи появляется обратная, в некотором смысле, задача. В данном случае это задача нахождения *значения аргумента* функции по *значению этой функции*, то есть *прообраза* элемента.

III.3. Обратная функция

До сих пор мы акцентировали внимание на проблеме нахождения *значения* функции на данном *значении аргумента*, то есть на нахождении *образа элемента*. Но, как обычно, при появлении какой-либо задачи появляется обратная, в некотором смысле, задача. В данном случае это задача нахождения *значения аргумента* функции по *значению этой функции*, то есть *прообраза* элемента.

Естественно назвать *обратной функцией* функцию, которая каждому элементу y из $E(f)$ ставит в соответствие его прообраз, то есть такой элемент $x \in D(f)$, что $f(x) = y$. Сформулируем строгое определение обратной функции.

III.3. Обратная функция

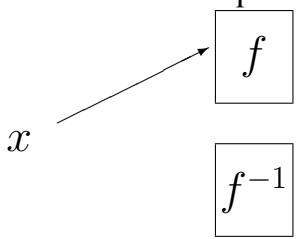
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Как записать характеристическое условие для функции f^{-1}?

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd} & \boxed{f} \arrow[dr] & \\ x \arrow[ur] & & f(x) \\ & \boxed{f^{-1}} & \end{tikzcd}$$

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x \arrow[ur] & & f(x) \arrow[dl] \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x \arrow[ur] & & f(x) \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] & \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x \arrow[ur] & & f(x) \\
f^{-1}(f(x)) \arrow[ur] & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] & \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x = & & f(x) \\
= f^{-1}(f(x)) \arrow[ur] & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

III.3. Обратная функция

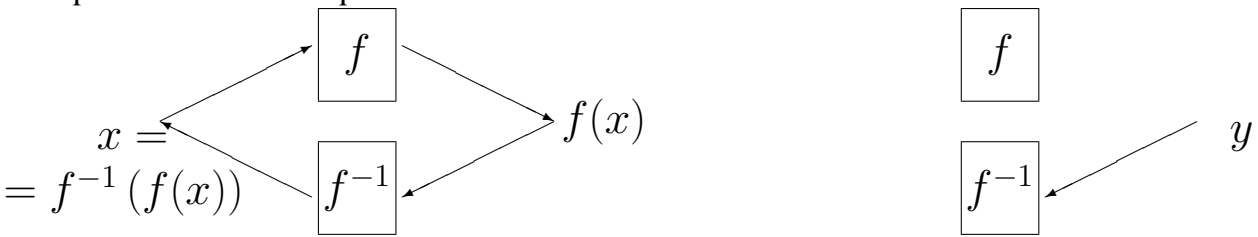
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x = \\
= f^{-1}(f(x)) \arrow[uur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f(x) \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

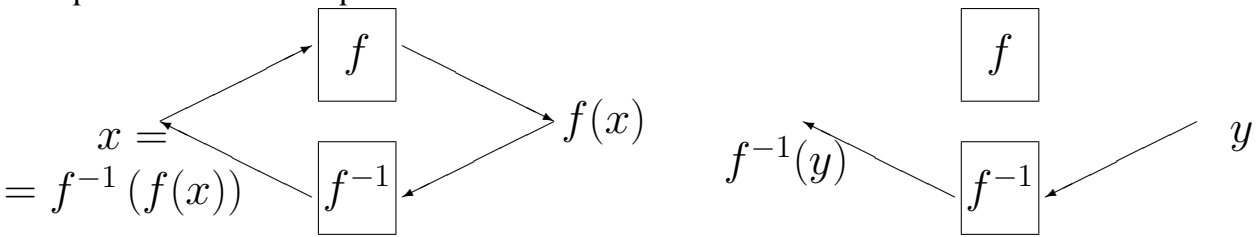
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x = & & f(x) \\
= f^{-1}(f(x)) \arrow[ur] & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} & \\
 & & y \arrow[dl] \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

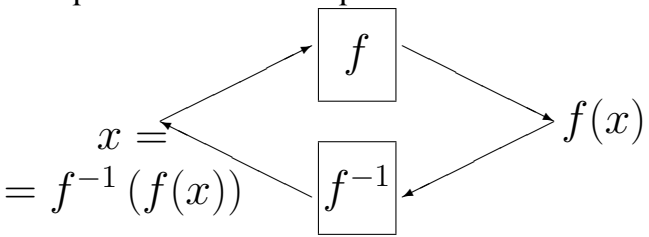
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

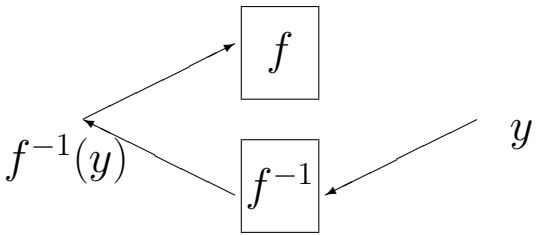


Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция f^{-1} называется обратной к функции f тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

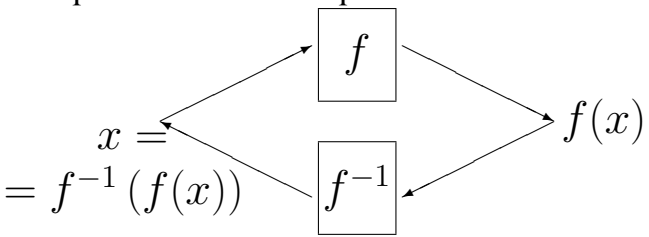


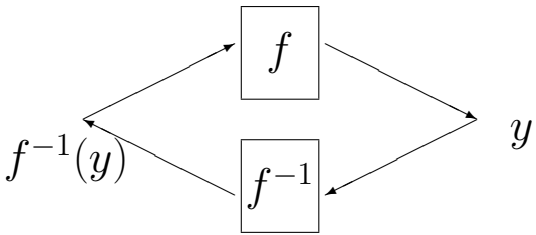


Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».





Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

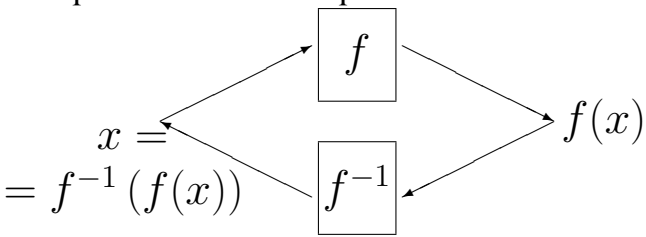
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция f^{-1} называется обратной к функции f тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

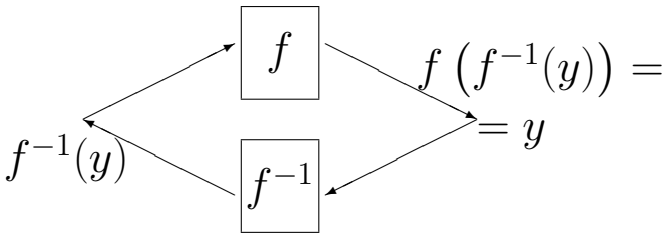
$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x = & & f(x) \\
= f^{-1}(f(x)) \arrow[ur] & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
f^{-1}(y) \arrow[ur] & & f\left(f^{-1}(y)\right) \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] & y
\end{tikzcd}$$

Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция f^{-1} называется обратной к функции f тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».





Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

III.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* f^{-1} *называется обратной к функции* f *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
x = & & f(x) \\
= f^{-1}(f(x)) \arrow[ur] & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{f} \arrow[dr] & \\
f^{-1}(y) \arrow[ur] & & f\left(f^{-1}(y)\right) = \\
 & \boxed{f^{-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] & = y
\end{tikzcd}$$

Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

III.3. Обратная функция

Приведенная выше формулировка слишком громоздкая (и к тому же некорректная). Можно предложить более короткую и корректную формулировку:

Определение 7. *Функция g называется* **обратной** *к функции f в области D, если для любого x из D и любого $y = f(x)$ имеют место тождества $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.*

Здесь f^{-1} — это, вообще говоря, не $\frac{1}{f(x)}$!

Рассмотреть пример?

IV. Теоремы об обратной функции

Все теоремы данного раздела легко доказываются с помощью **рекомендаций для поиска доказательства**.

IV.1. Теорема о взаимной обратности

Теорема 2 (о взаимной обратности). *Если функция f имеет на множестве D обратную функцию f^{-1}, то функция f^{-1} имеет обратную на множестве*[2] $\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in D \right\}$, *причем* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

[2] Точнее, обратная функция имеется у **ограничения** функции f на это множество.

IV.2. Теорема о функции, обратной к суперпозиции

Теорема 3 (о функции, обратной к суперпозиции). *Если* $h(x) = f\big(g(x)\big)$, *причем функция* g *имеет на множестве* D *обратную функцию* g^{-1}, *и функция* f *имеет обратную на множестве*

$$\Big\{ g(x) \,\Big|\, x \in D \Big\},$$

то функция h *имеет обратную* h^{-1} *на множестве* D, *причем* $h^{-1}(y) = g^{-1}\big(f^{-1}(y)\big)$.

IV.3. Критерий существования обратной функции

Теорема 4 (критерий существования обратной функции). *Функция f имеет обратную на множестве D тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначной на множестве D.*

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции

Если a — нечетное целое число, то к *степенной функции* x^a обратной является *степенная функция* $x^{1/a}$.

К *показательной функции* a^x обратной является *логарифмическая функция* $\log_a x$.

По теореме о взаимной обратности получаем, что обратной к *логарифмической функции* является *показательная функция*.

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции

К тригонометрическим функциям обратные существуют не на всей оси. Можно сформулировать принцип выбора «стандартного участка взаимной однозначности». Этот интервал или отрезок должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Его длина должна быть максимально возможной среди всех отрезков (интервалов), на которых у этой тригонометрической функции есть обратная.
2. Он должен быть смещен как можно дальше вправо.
3. Он должен или включать в себя точку $x = 0$, или граничить с этой точкой.

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таким образом, получаем следующий набор функций, обратных к тригонометрическим:

$\sin:$ обратная функция на $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — это $\arcsin$;

$\cos:$ обратная функция на $D = [0, \pi]$ — это $\arccos$;

$\mathrm{tg}:$ обратная функция на $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — это arctg;

$\mathrm{ctg}:$ обратная функция на $D = (0, \pi)$ — это arcctg.

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таблицу значений обратной функции легко получить из таблицы значений исходной функции. Действительно, то, что было *значением функции* f, для функции f^{-1} является *значением аргумента*, и наоборот. Поэтому для получения таблицы значений функции f^{-1} надо, разумеется, просто поменять местами строки таблицы значений функции f.

IV.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таблицу значений обратной функции легко получить из таблицы значений исходной функции. Действительно, то, что было *значением функции* f, для функции f^{-1} является *значением аргумента*, и наоборот. Поэтому для получения таблицы значений функции f^{-1} надо, разумеется, просто поменять местами строки таблицы значений функции f.

Не всякая функция имеет обратную во всей области определения. Например, у x^2 обратной функции в $\mathbb{R}$ нет: функция $\sqrt{y}$ является обратной к функции x^2 в области $x \geq 0$, а функция $-\sqrt{y}$ является обратной к функции x^2 в области $x \leq 0$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?