Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Кривые и поверхности второго порядка

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Полярная система координат **4**

I.1. Каноническое соответствие между полярной системой координат и прямоугольной декартовой системой координат 9

I.2. Кривые второго порядка 11

I.2.1. Эллипс 12

I.2.2. Гипербола 63

I.2.3. Парабола 70

I.3. Некоторые уравнения, параметры и линии, связанные с эллипсом, гиперболой и параболой 84

I.4. Свойство директрисы 87

I.5. Определение линий второго порядка с помощью эксцентриситета и директрисы 101

I.6. Цилиндрическая и сферическая системы координат . . 107

I.6.1. Цилиндрическая система координат 108
I.6.2. Сферическая система координат 109
I.6.3. Переход от сферической в декартову прямоугольную систему координат 110

II. Поверхности второго порядка **111**
II.1. Параболоиды 120
II.1.1. Эллиптический параболоид 121
II.1.2. Гиперболический параболоид 140
II.2. Цилиндры 154
II.2.1. Гиперболический цилиндр 155
II.2.2. Параболический цилиндр 164
II.2.3. Эллиптический цилиндр 173
II.3. Поверхность вращения 182
II.4. Линейчатые поверхности 184

I. Полярная система координат

Определение 1. Системой координат *на плоскости называется функция $\mathcal{K}$, каждой паре чисел (u, v) ставящая в соответствие точку плоскости. При этом пара чисел (u, v) называется* **координатами** *точки*[1] *$\mathcal{K}(u, v)$ в системе координат $\mathcal{K}$.*

[1] Здесь $\mathcal{K}(u, v)$ — это *значение* функции $\mathcal{K}$, это обозначение не имеет ничего общего с традиционными для геометрии обозначениями типа «точка $M(1; 2)$». То есть $\mathcal{K}(u, v)$ надо здесь воспринимать, как обозначение типа $f(x, y)$ и т.п..

I. Полярная система координат

Определение 1. Системой координат *на плоскости называется функция $\mathcal{K}$, каждой паре чисел (u, v) ставящая в соответствие точку плоскости. При этом пара чисел (u, v) называется* **координатами** *точки $\mathcal{K}(u, v)$ в системе координат $\mathcal{K}$.*

В некоторых приложениях требуется, чтобы $\mathcal{K}$ была взаимно однозначной функцией, но мы этого ограничения накладывать не будем. Таким образом, в некоторых системах координат (например, в рассматриваемой ниже **полярной системе координат**) одна и та же точка может иметь много разных пар координат.

I. Полярная система координат

Определение 1. Системой координат *на плоскости называется функция $\mathcal{K}$, каждой паре чисел (u, v) ставящая в соответствие точку плоскости. При этом пара чисел (u, v) называется* **координатами** *точки $\mathcal{K}(u, v)$ в системе координат $\mathcal{K}$.*

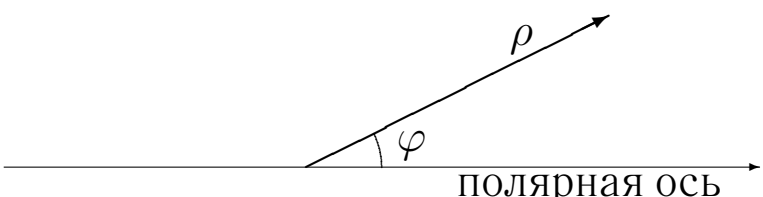
В школе Вы познакомились с *прямоугольной декартовой системой координат*. Напомним, что она введена следующим образом: на плоскости зафиксированы две взаимно перпендикулярные оси, называемые обычно осями Ox и Oy. Каждой точке оси соответствует некоторое число. Прямоугольная декартова система координат каждой паре действительных чисел (x, y) ставит в соответствие точку плоскости, проекциям которой на оси соответствуют числа x (проекция на ось Ox) и y (проекция на ось Oy).

I. Полярная система координат

Определение 1. Системой координат *на плоскости называется функция $\mathcal{K}$, каждой паре чисел (u, v) ставящая в соответствие точку плоскости. При этом пара чисел (u, v) называется* **координатами** *точки $\mathcal{K}(u, v)$ в системе координат $\mathcal{K}$.*

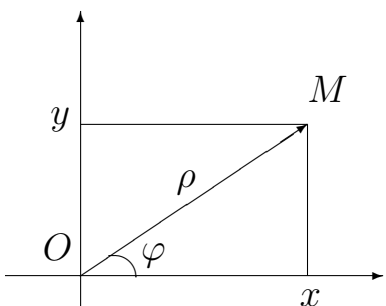
Можно сказать и так: прямоугольная декартова система координат каждой паре действительных чисел (x, y) ставит в соответствие точку плоскости с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $\overrightarrow{\mathbf{i}}$ — **орт оси** Ox, то есть вектор единичной длины, сонаправленный с осью Ox, и $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — **орт оси** Oy, то есть вектор единичной длины, сонаправленный с осью Oy.

Определение 2. *Пусть на плоскости зафиксирована ось (называемая* **полярной осью***), на которой зафиксирована точка O (называемая* **полюсом полярной системы координат***).* **Полярной системой координат** *называется система координат, каждой упорядоченной паре чисел (ρ, φ), где $\rho \geq 0$, ставящая в соответствие такую точку M плоскости, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ которой образует с полярной осью угол φ (угол, как обычно, отсчитывается против часовой стрелки) и имеет длину $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$.*

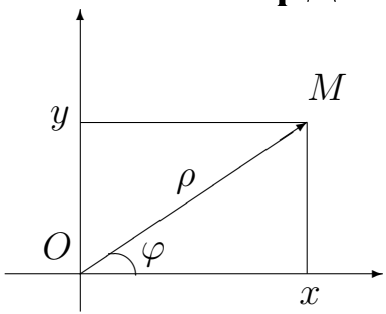


I.1. Каноническое соответствие между полярной системой координат и прямоугольной декартовой системой координат

Обычно с полярной системой координат **связывается** прямоугольная декартова система координат: ее начало совпадает с полюсом, ось Ox совпадает с полярной осью, ось Oy образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{2}$ (отсчитываемый, как обычно, против часовой стрелки!).



I.1. Каноническое соответствие между полярной системой координат и прямоугольной декартовой системой координат



При этом, очевидно, координаты (ρ, φ) точки M в полярной системе координат связаны с декартовыми координатами (x, y) этой точки соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}. \tag{1}$$

Кроме того, очень важными являются соотношения $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ (при $x \neq 0$).

I.2. Кривые второго порядка

Мы рассмотрим **эллипс**, **гиперболу** и **параболу**.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.* ***рис. 2*** *и* ***рис.9****).*

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.**рис. 2** и **рис.9**).*

Напомним, что множество точек плоскости, обладающих некоторым свойством Ф называют **геометрическим местом точек** со свойством Ф.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.**рис. 2** и **рис.9**).*

Очевидно, что окружность радиуса R является частным случаем эллипса: это эллипс, отвечающий значениям параметров $a = R$, $c = 0$.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.* ***рис. 2*** *и* ***рис.9****).*

Приближенно нарисовать эллипс можно с помощью довольно простого приспособления: воткнем в лист бумаги две булавки на расстоянии $2c$ и привяжем к ним нитку длиной $2a$. Теперь оттянем нитку острием карандаша, и проведем линию, удерживая нитку натянутой. При этом карандаш прочертит часть дуги эллипса.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.**рис. 2** и **рис.9**).*

Уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат. Вывод уравнения любой кривой надо, разумеется, начинать с введения системы координат. В данном случае мы введем прямоугольную декартову систему координат следующим образом: ее центр поместим посредине между фокусами F_1 и F_2, ось Ox будет проходить через эти фокусы, см.**рис. 2**.

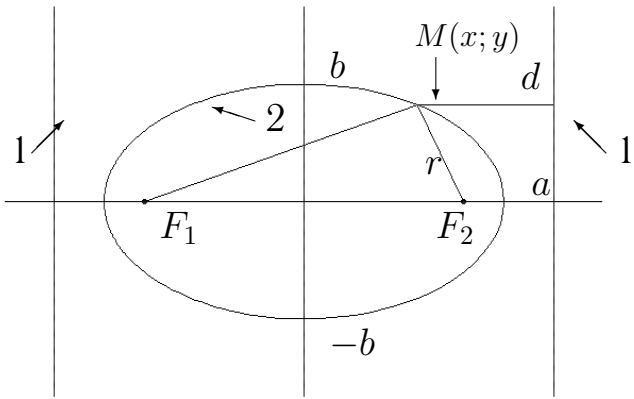


Рис. 2.

1 — директрисы эллипса, $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

2 — эллипс, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ — фокусы эллипса;

r — фокусное расстояние;

d — расстояние от M до директрисы.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Итак, мы хотим получить **уравнение кривой**. Применим **стратегию составления уравнений**.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ?

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ? Уравнение линии — это

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ? Уравнение линии — это ***утверждение о координатах ее произвольной точки.***

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ? Уравнение линии — это ***утверждение о координатах ее произвольной точки.***

Введем переменные.

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ? Уравнение линии — это ***утверждение о координатах ее произвольной точки.***

Введем переменные. Возьмем произвольную точку M на эллипсе, и обозначим ее координаты (x, y).

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнение линии.

В каком виде представим ответ? Уравнение линии — это ***утверждение о координатах ее произвольной точки.***

Введем переменные. Возьмем произвольную точку M на эллипсе, и обозначим ее координаты (x, y).

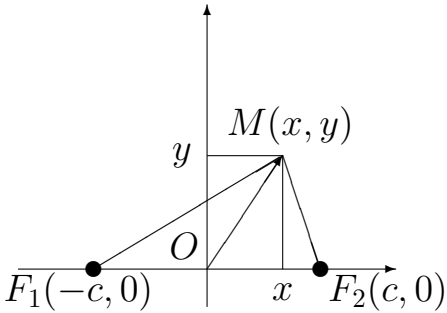
Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

I.2.1. Эллипс

Определение 3. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем* $c < a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Эллипсом** *называется множество таких точек плоскости,* **сумма** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$*.*

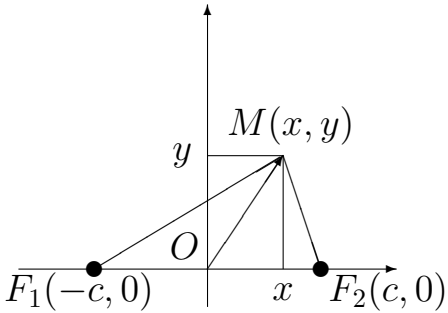
Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? По определению эллипса нам следует двум способами найти сумму расстояний от точки M до фокусов: с одной стороны, оно равно $2a$, а с другой стороны, его легко найти с помощью координат точки M.

I.2.1. Эллипс



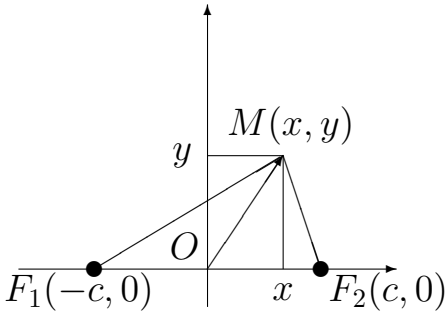
$$|\overrightarrow{F_1M}| =$$

I.2.1. Эллипс



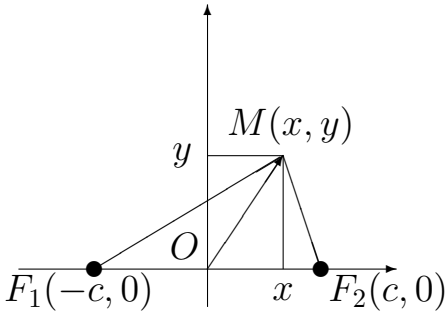
$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

I.2.1. Эллипс



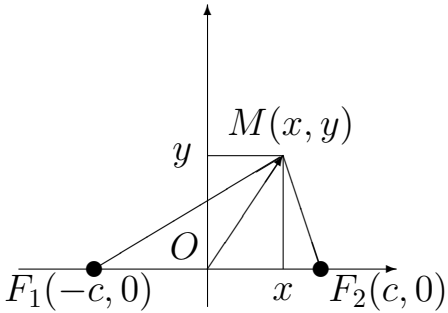
$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |\overrightarrow{F_2M}| =$$

I.2.1. Эллипс



$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

I.2.1. Эллипс

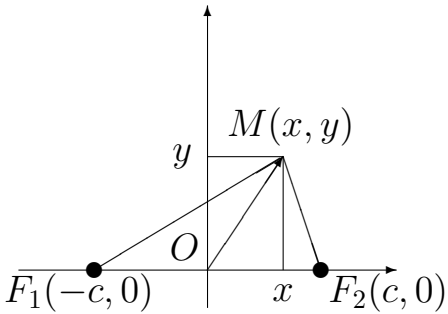


$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

I.2.1. Эллипс



$$|\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

В принципе, это уже и есть искомое уравнение. Однако него пока «не товарный вид»: громоздкий и некрасивый. Преобразуем это уравнение к более удобной форме.

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Отметим, что получившееся уравнение будет равносильно исходному уравнению (2) (что нечасто бывает при таком неэквивалентном преобразовании, как возведение в квадрат). Равносильность этого и исходного уравнений следует из следующих геометрических соображений: так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| =$

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1M}\right| \geq$$

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1M}\right| \geq a - \left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_1M}\right| >$$

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1M}\right| \geq a - \left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_1M}\right| > -\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$$

I.2.1. Эллипс

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Проведем естественные преобразования: «уединим» один из корней и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| < a$, то

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - \left|\overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1M}\right| \geq a - \left|\overrightarrow{F_2F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_1M}\right| > -\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$$

Следовательно, при возведении уравнения (2) в квадрат «посторонних» решений не возникает.

I.2.1. Эллипс

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Упростим уравнение (3):

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$

I.2.1. Эллипс

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Упростим уравнение (3):

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2} = a^2 - xc.$$

I.2.1. Эллипс

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Вновь возведем обе части получившегося уравнения в квадрат. При этом, вопреки опасениям (которые мы развеивать не станем), мы получим равносильное уравнение

I.2.1. Эллипс

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Вновь возведем обе части получившегося уравнения в квадрат. При этом, вопреки опасениям (которые мы развеивать не станем), мы получим равносильное уравнение

$$a^2\left(c^2-2cx+x^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2,$$

I.2.1. Эллипс

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Вновь возведем обе части получившегося уравнения в квадрат. При этом, вопреки опасениям (которые мы развеивать не станем), мы получим равносильное уравнение

$$a^2\left(c^2-2cx+x^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2,$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

I.2.1. Эллипс

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Вновь возведем обе части получившегося уравнения в квадрат. При этом, вопреки опасениям (которые мы развеивать не станем), мы получим равносильное уравнение

$$a^2\left(c^2-2cx+x^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2,$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Введем обозначение: $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Тогда получим, что **уравнение (2)** эквивалентно уравнению

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{4}$$

I.2.1. Эллипс

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{4}$$

Оно называется **каноническим уравнением эллипса** в декартовых координатах.

I.2.1. Эллипс

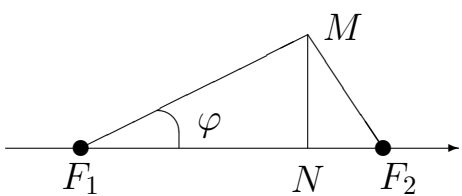
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{4}$$

Оно называется **каноническим уравнением эллипса** в декартовых координатах.

Отметим, что параметр b имеет простой геометрический смысл: это, очевидно, ордината точки пересечения эллипса с осью Oy. Действительно, ось Oy имеет уравнение $x = 0$. Но при $x = 0$ получаем $\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, откуда $y = \pm b$. Числа a и b называются, соответственно, **большой полуосью эллипса** и **малой полуосью эллипса**.

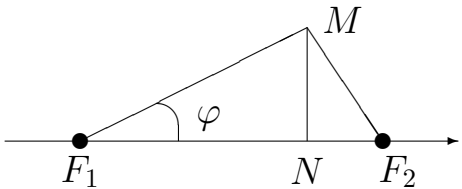
I.2.1. Эллипс

Уравнение эллипса в полярной системе координат. Полярную систему координат введем следующим образом: полюс поместим в один из фокусов, например, в *левый* фокус F_1, а полярную ось пустим через фокус F_2.



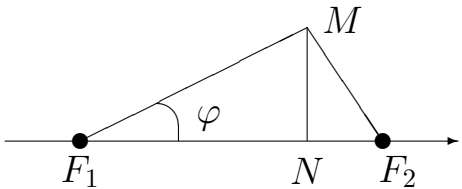
Отметим, что декартова прямоугольная система координат, в которой мы получали уравнение этого эллипса в предыдущем разделе, $\boxed{\text{не является}}$ ***канонически связанной*** *с введенной сейчас нами системой координат.*

I.2.1. Эллипс



Во введенной нами полярной системе координат $|\overrightarrow{F_1M}| = \rho$. Длину вектора $\overrightarrow{F_2M}$ можно вычислить с помощью теоремы косинусов:

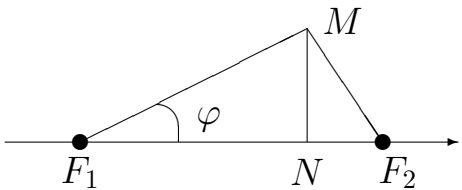
I.2.1. Эллипс



Во введенной нами полярной системе координат $|\overrightarrow{F_1M}| = \rho$. Длину вектора $\overrightarrow{F_2M}$ можно вычислить с помощью теоремы косинусов:

$$|\overrightarrow{F_2M}|^2 = (2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi.$$

I.2.1. Эллипс

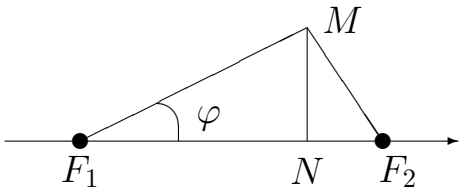


Во введенной нами полярной системе координат $|\overrightarrow{F_1M}| = \rho$. Длину вектора $\overrightarrow{F_2M}$ можно вычислить с помощью теоремы косинусов:

$$|\overrightarrow{F_2M}|^2 = (2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi.$$

Таким образом, из **определения эллипса** получаем, сравнивая сумму расстояний от M до фокусов с числом $2a$:

I.2.1. Эллипс



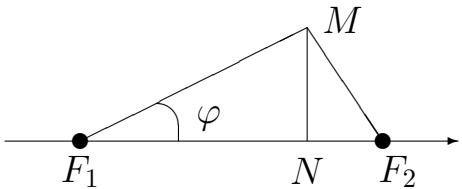
Во введенной нами полярной системе координат $|\overrightarrow{F_1M}| = \rho$. Длину вектора $\overrightarrow{F_2M}$ можно вычислить с помощью теоремы косинусов:

$$|\overrightarrow{F_2M}|^2 = (2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi.$$

Таким образом, из **определения эллипса** получаем, сравнивая сумму расстояний от M до фокусов с числом $2a$:

$$2a = \rho + \sqrt{(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi}.$$

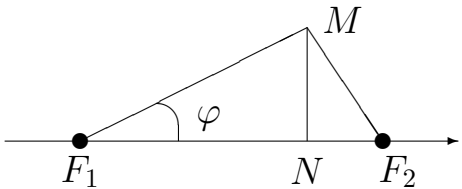
I.2.1. Эллипс



$$2a = \rho + \sqrt{(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi}.$$

«Уединим» корень и возведем это уравнение в квадрат. Получим уравнение (эквивалентность этого уравнения исходному мы проверять не будем)

I.2.1. Эллипс

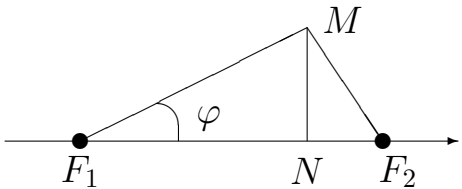


$$2a = \rho + \sqrt{(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi}.$$

«Уединим» корень и возведем это уравнение в квадрат. Получим уравнение (эквивалентность этого уравнения исходному мы проверять не будем)

$$(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi = (2a - \rho)^2,$$

I.2.1. Эллипс



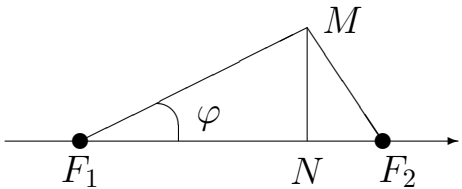
$$2a = \rho + \sqrt{(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi}.$$

«Уединим» корень и возведем это уравнение в квадрат. Получим уравнение (эквивалентность этого уравнения исходному мы проверять не будем)

$$(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi = (2a - \rho)^2,$$

$$(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2.$$

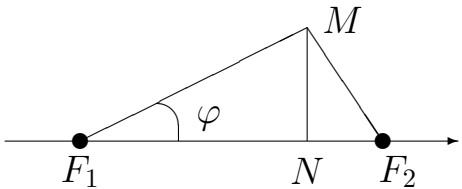
I.2.1. Эллипс



$$(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2.$$

Выражая из последнего уравнения ρ, получаем

I.2.1. Эллипс

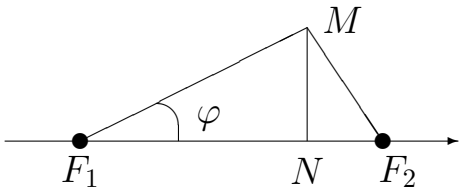


$$(2c)^2 + \rho^2 - 2 \cdot 2c \cdot \rho \cdot \cos\varphi = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2.$$

Выражая из последнего уравнения ρ, получаем

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi},$$

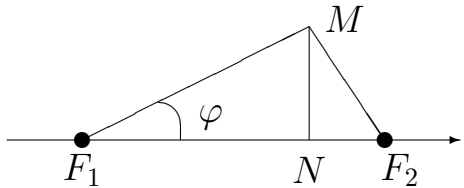
I.2.1. Эллипс



$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi},$$

Положим $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Число ε называется **эксцентриситетом** эллипса. Это число характеризует «вытянутость» эллипса: для окружности (то есть при $c = 0$) это число равно 0, с ростом этого числа отношение большой полуоси к малой увеличивается. Итак, получаем **каноническое уравнение эллипса** в полярных координатах (если полюс в левом фокусе):

I.2.1. Эллипс

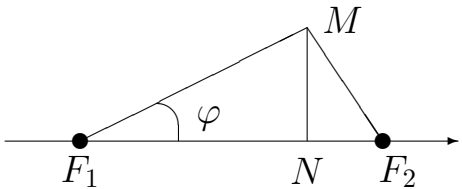


$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi},$$

Положим $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Число ε называется **эксцентриситетом** эллипса. Это число характеризует «вытянутость» эллипса: для окружности (то есть при $c = 0$) это число равно 0, с ростом этого числа отношение большой полуоси к малой увеличивается. Итак, получаем **каноническое уравнение эллипса** в полярных координатах (если полюс в левом фокусе):

$$\boxed{\rho = \frac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 - \varepsilon\cos\varphi}} \tag{5}$$

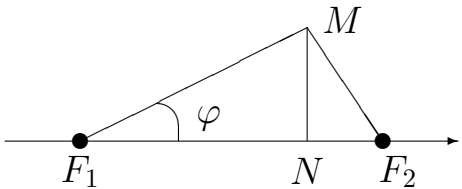
I.2.1. Эллипс



$$\boxed{\rho = \frac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 - \varepsilon \cos\varphi}} \tag{5}$$

Если полярную ось направить в противоположную сторону, или переместить полюс в *правый* фокус, то уравнение будет иметь вид:

I.2.1. Эллипс



$$\boxed{\rho = \frac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 - \varepsilon \cos\varphi}} \tag{5}$$

Если полярную ось направить в противоположную сторону, или переместить полюс в *правый* фокус, то уравнение будет иметь вид:

$$\rho = \frac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

I.2.2. Гипербола

Определение 4. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем (в отличие от определения эллипса)* $c > a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Гиперболой** *называется множество таких точек плоскости,* **абсолютная величина разности** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.* ***рис.5****, а также* ***рис.9****).*

I.2.2. Гипербола

Определение 4. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем (в отличие от определения эллипса)* $c > a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Гиперболой** *называется множество таких точек плоскости,* **абсолютная величина разности** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.* ***рис.5****, а также* ***рис.9****).*

Уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой и полярной системах координат. Выкладки в этом случае почти повторяют соответствующие вычисления, проведенные при получении формул (4) и (5).

I.2.2. Гипербола

Определение 4. *Пусть a, c — два положительных числа, причем (в отличие от определения эллипса) $c > a$, и на плоскости зафиксированы две точки F_1 и F_2 (называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно $2c$.* **Гиперболой** *называется множество таких точек плоскости,* **абсолютная величина разности** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна $2a$ (см.* ***рис.5****, а также* ***рис.9****).*

Уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой и полярной системах координат. Поэтому приведем только сами формулы, отметив, во-первых, что, в отличие от эллипса, через b обозначено число $\sqrt{c^2 - a^2}$, и, во-вторых, что в полярной системе координат получим уравнение только одной ветви гиперболы.

I.2.2. Гипербола

Определение 4. *Пусть* a, c *— два положительных числа, причем (в отличие от определения эллипса)* $c > a$*, и на плоскости зафиксированы две точки* F_1 *и* F_2 *(называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно* $2c$*.* **Гиперболой** *называется множество таких точек плоскости,* **абсолютная величина разности** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$ *(см.* ***рис.5****, а также* ***рис.9****).*

Уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой и полярной системах координат. В декартовой прямоугольной системе координат получаем

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{6}$$

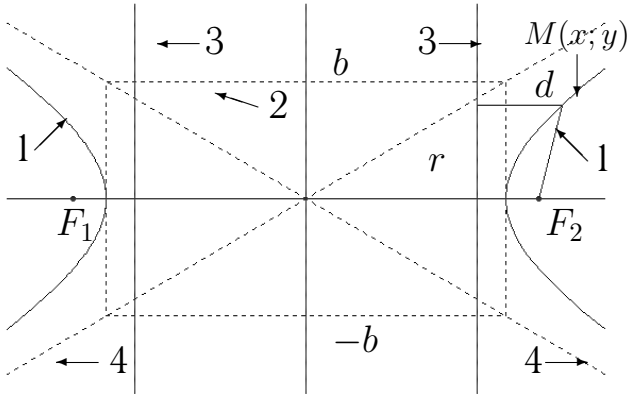


Рис. 5.

1 — гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

2 — основной прямоугольник $\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases}$;

3 — директрисы гиперболы, $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$;

4 — асимптоты гиперболы, $y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ — фокусы гиперболы;

r — фокусное расстояние;

d — расстояние от M до директрисы.

I.2.2. Гипербола

Определение 4. *Пусть a, c — два положительных числа, причем (в отличие от определения эллипса) $c > a$, и на плоскости зафиксированы две точки F_1 и F_2 (называемые* **фокусами***), расстояние между которыми равно $2c$.* **Гиперболой** *называется множество таких точек плоскости,* **абсолютная величина разности** *расстояний от каждой из которых до фокусов равна $2a$ (см.* ***рис.5****, а также* ***рис.9****).*

Уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой и полярной системах координат. Вид уравнения левой и правой ветвей гиперболы в полярной системе координат в случае, когда полюс помещен в один из фокусов и полярная ось проходит через оба фокуса имеем (предполагая, что полярная ось горизонтальна и положительное направление — слева-направо), приведен в **таблице 1**.

Таблица 1

Полюс в левом фокусе	
Левая ветвь гиперболы $\rho = -\dfrac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$	Правая ветвь гиперболы $\rho = \dfrac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$
Полюс в правом фокусе	
Левая ветвь гиперболы $\rho = \dfrac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$	Правая ветвь гиперболы $\rho = -\dfrac{\left(a^2 - c^2\right)/a}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$

Здесь, как и для эллипса, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — эксцентриситет, однако, если для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$, то для гиперболы имеем $\varepsilon > 1$.

I.2.3. Парабола

Определение 5. *Пусть p — положительное число, и на плоскости зафиксирована точка F (называемая* **фокусом***), и прямая L (называемая* **директрисой***), расстояние между которыми равно p.* **Параболой** *называется множество таких точек плоскости, расстояния от каждой из которых до фокуса и до директрисы совпадают (см.* ***рис. 7****).*

I.2.3. Парабола

Определение 5. *Пусть p — положительное число, и на плоскости зафиксирована точка F (называемая* **фокусом***), и прямая L (называемая* **директрисой***), расстояние между которыми равно p.* **Параболой** *называется множество таких точек плоскости, расстояния от каждой из которых до фокуса и до директрисы совпадают (см.* ***рис. 7****).*

Уравнение параболы в прямоугольной декартовой системе координат. Введем прямоугольную декартову систему координат следующим образом: ось Ox пустим через фокус F перпендикулярно директрисе, начало координат поместим на расстоянии $\frac{p}{2}$ от директрисы, посредине между фокусом и точкой пересечения оси Ox с директрисой.

I.2.3. Парабола

Определение 5. *Пусть p — положительное число, и на плоскости зафиксирована точка F (называемая* **фокусом***), и прямая L (называемая* **директрисой***), расстояние между которыми равно p.* **Параболой** *называется множество таких точек плоскости, расстояния от каждой из которых до фокуса и до директрисы совпадают (см.* ***рис. 7****).*

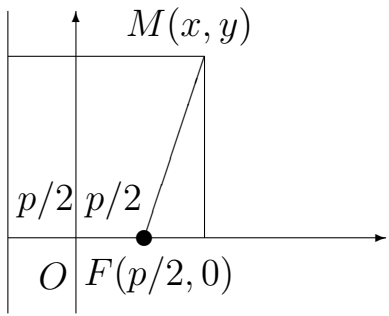


Рис. 6.

I.2.3. Парабола

В соответствии со **стратегией составления уравнений**, возьмем на параболе произвольную точку M, и обозначим ее координаты (x, y) (см.**рис.6**).

I.2.3. Парабола

В соответствии со **стратегией составления уравнений**, возьмем на параболе произвольную точку M, и обозначим ее координаты (x, y) (см.**рис.6**).

По определению параболы можно двумя способами вычислить расстояние от точки M до фокуса: с одной стороны, оно равно расстоянию до директрисы, то есть $x + \frac{p}{2}$, а с другой стороны, оно равно $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Таким образом, получаем уравнение

I.2.3. Парабола

В соответствии со **стратегией составления уравнений**, возьмем на параболе произвольную точку M, и обозначим ее координаты (x, y) (см.**рис.6**).

По определению параболы можно двумя способами вычислить расстояние от точки M до фокуса: с одной стороны, оно равно расстоянию до директрисы, то есть $x + \frac{p}{2}$, а с другой стороны, оно равно $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Таким образом, получаем уравнение

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

I.2.3. Парабола

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

I.2.3. Парабола

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведем левую и правую части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

I.2.3. Парабола

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведем левую и правую части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Равносильность полученных уравнений проверять не будем. После простых преобразований получим **каноническое уравнение параболы** в декартовых координатах:

I.2.3. Парабола

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведем левую и правую части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Равносильность полученных уравнений проверять не будем. После простых преобразований получим **каноническое уравнение параболы** в декартовых координатах:

$$\boxed{y^2 = 2px} \tag{7}$$

I.2.3. Парабола

Уравнение параболы в полярной системе координат. Введем полярную систему координат следующим образом: полюс поместим в фокус, полярную ось направим перпендикулярно директрисе, направление на полярной оси — от директрисы к фокусу. Возьмем произвольную точку M на параболе, обозначим ее полярные координаты через ρ, φ (см.рис.8).

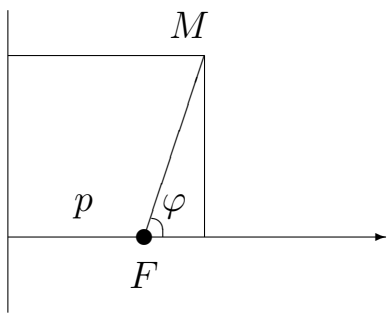


Рис. 8.

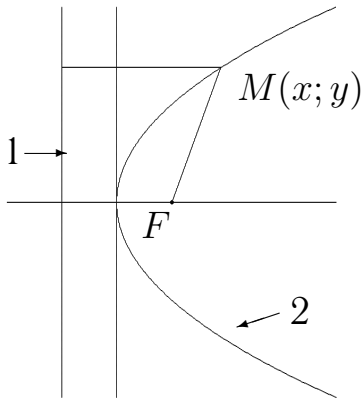


Рис. 7.

1 — директриса параболы, $x = -\frac{p}{2}$;

2 — парабола, $2px = y^2$;

$F(p/2;0)$ — фокус параболы.

I.2.3. Парабола

Сравнивая расстояния от M до фокуса и до директрисы, получим уравнение

$$\rho = p + \rho \cos \varphi.$$

I.2.3. Парабола

Сравнивая расстояния от M до фокуса и до директрисы, получим уравнение

$$\rho = p + \rho \cos \varphi.$$

Это уравнение легко преобразовать к виду

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}} \tag{8}$$

называемому **каноническим уравнением параболы** в полярных координатах.

I.3. Некоторые уравнения, параметры и линии, связанные с эллипсом, гиперболой и параболой

В этом разделе мы резюмируем все изложенное выше и приведем несколько новых характеристик. По поводу уравнений гиперболы в полярных координатах см. также **таблицу 1**.

I.3. Некоторые уравнения, параметры и линии, связанные с эллипсом, гиперболой и параболой

Таблица 2

Кривая	*Каноническое уравнение в координатах*		
	в декартовых	в полярных	
		полюс в левом фокусе	полюс в правом фокусе
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rho=\frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	$\rho=\frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1+\varepsilon\cos\varphi}$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rho=\begin{cases}\frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1-\varepsilon\cos\varphi} & \text{правая ветвь}\\ -\frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1+\varepsilon\cos\varphi} & \text{левая ветвь}\end{cases}$	$\rho=\begin{cases}-\frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1-\varepsilon\cos\varphi} & \text{правая ветвь}\\ \frac{\left(a^2-c^2\right)/a}{1+\varepsilon\cos\varphi} & \text{левая ветвь}\end{cases}$
Парабола	$y^2=2px$	$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$	

Здесь декартова и полярная системы координат *не являются* канонически связанными: центр декартовой системы координат лежит в центре симметрии для эллипса и гиперболы, и в вершине параболы, а полюс полярной системы координат — в одном из фокусов.

I.3. Некоторые уравнения, параметры и линии, связанные с эллипсом, гиперболой и параболой

Для уравнения эллипса $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, а для гиперболы имеем $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. При этом для эллипса a называется **большой полуосью**, b — **малой полуосью**.

Эксцентриситет эллипса и гиперболы равен $\frac{c}{a}$, причем для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Для параболы иногда удобно положить $\varepsilon = 1$.

Для эллипса и гиперболы **директрисой** называются прямые с уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, где $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ — левая директриса эллипса или гиперболы, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ правая директриса (см.**рис.2**, и **рис.5**).

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство.

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку на эллипсе. Пусть ее координаты — (x, y) и, для определенности, $x \geq 0$ (случай $x \leq 0$ рассматривается аналогично). Тогда ближайший к этой точке фокус имеет координаты $(c, 0)$, поэтому расстояние от этой точки эллипса до фокуса равно $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Директриса, ближайшая к данной точке, имеет уравнение $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Расстояние от этой точки до этой директрисы равно $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$.

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на линии, для определенности, $x \geq 0$. Ближайший к этой точке фокус имеет координаты $(c, 0)$, расстояние до него равно $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Ближайшая директриса имеет уравнение $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Расстояние от этой точки до этой директрисы равно $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$. Поэтому, учитывая

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на линии, для определенности, $x \geq 0$. Ближайший к этой точке фокус имеет координаты $(c, 0)$, расстояние до него равно $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Ближайшая директриса имеет уравнение $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Расстояние от этой точки до этой директрисы равно $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$. Поэтому, учитывая

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на линии, для определенности, $x \geq 0$. Ближайший к этой точке фокус имеет координаты $(c, 0)$, расстояние до него равно $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Ближайшая директриса имеет уравнение $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Расстояние от этой точки до этой директрисы равно $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$. Поэтому, учитывая

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на линии, для определенности, $x \geq 0$. Ближайший к этой точке фокус имеет координаты $(c, 0)$, расстояние до него равно $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Ближайшая директриса имеет уравнение $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Расстояние от этой точки до этой директрисы равно $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$. Поэтому, учитывая

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) =$$

$$= \left(1 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - x^2\right),$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Поэтому, учитывая

$$y^2 = \left(1 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - x^2\right),$$

получаем

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Поэтому, учитывая

$$y^2 = \left(1 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - x^2\right),$$

получаем

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \frac{\sqrt{\left(x - \varepsilon a\right)^2 + \left(1 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - x^2\right)}}{a - \varepsilon x} =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство.

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \frac{\sqrt{(x - \varepsilon a)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)}}{a - \varepsilon x} =$$

$$= \varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a + a^2}}{a - \varepsilon x} =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство.

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \frac{\sqrt{(x - \varepsilon a)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)}}{a - \varepsilon x} =$$

$$= \varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a + a^2}}{a - \varepsilon x} = \varepsilon \frac{|a - \varepsilon x|}{a - \varepsilon x} =$$

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство.

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \frac{\sqrt{(x - \varepsilon a)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)}}{a - \varepsilon x} =$$

$$= \varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a + a^2}}{a - \varepsilon x} = \varepsilon \frac{|a - \varepsilon x|}{a - \varepsilon x} = \varepsilon,$$

так как $a - \varepsilon x \geq 0$.

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Для гиперболы это утверждение доказывается аналогично, а для параболы оно следует непосредственно из ее **определения 5**.

I.4. Свойство директрисы

Теорема 1 (свойство директрисы). *Если M — точка на эллипсе, гиперболе или параболе, и через r обозначено расстояние от нее до ближайшего фокуса, а через d — расстояние до ближайшей директрисы, то имеет место равенство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где для параболы $\varepsilon = 1$.*

Уравнение всех этих трех кривых в полярных координатах можно записать единообразно: $\rho = \dfrac{k}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, где для параболы $\varepsilon = 1$. При этом параметр k для каждой из этих кривых имеет весьма прозрачный геометрический смысл: это расстояние от фокуса до точки пересечения соответствующей кривой с прямой, проходящей через фокус параллельно директрисе.

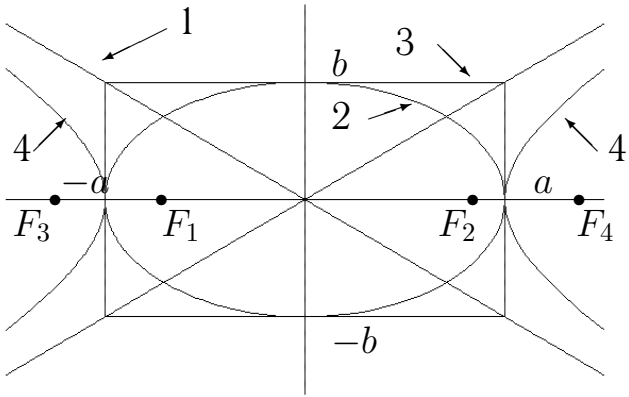


Рис. 9.

1 — асимптоты гиперболы, $y = \pm\frac{b}{a}x$;

2 — эллипс, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

3 — основной прямоугольник эллипса и гиперболы;

4 — гипербола, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (левая и правая ветви).

F_1, F_2 — фокусы эллипса, F_3, F_4 — фокусы гиперболы.

I.5. Определение линий второго порядка с помощью эксцентриситета и директрисы

Иногда рассмотренные нами линии второго порядка вводятся не определениями 3, 4, 5, а с помощью определений, основанных на **теореме 1 о свойстве директрисы**.

I.5. Определение линий второго порядка с помощью эксцентриситета и директрисы

А именно, рассматриваются линии, определенные следующим образом: пусть ε — неотрицательное число (эксцентриситет), F — точка на плоскости (фокус), $\mathbf{P}$ — прямая на плоскости (директриса), тогда соответствующая линия представляет собой геометрическое место точек, для которых $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где d — расстояние от точки до директрисы, r — расстояние от точки до фокуса.

I.5. Определение линий второго порядка с помощью эксцентриситета и директрисы

Из материала предыдущих разделов следует, что при $0 \leq \varepsilon < 1$ получается эллипс, при $\varepsilon = 1$ — парабола, при $\varepsilon > 1$ — ветвь гиперболы, ближайшая к данному фокусу. Изменение формы линии в зависимости от значения ε (при фиксированных фокусе и директрисе) изображено на **рис.10**.

I.5. Определение линий второго порядка с помощью эксцентриситета и директрисы

Нам показалось полезным на **рис. 11** привести изменение формы линии второго порядка $\rho = \dfrac{k}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ при изменении значения ε в случае, когда фиксировано значение параметра k (а не расстояние от фокуса до директрисы, как на **рис.10**).

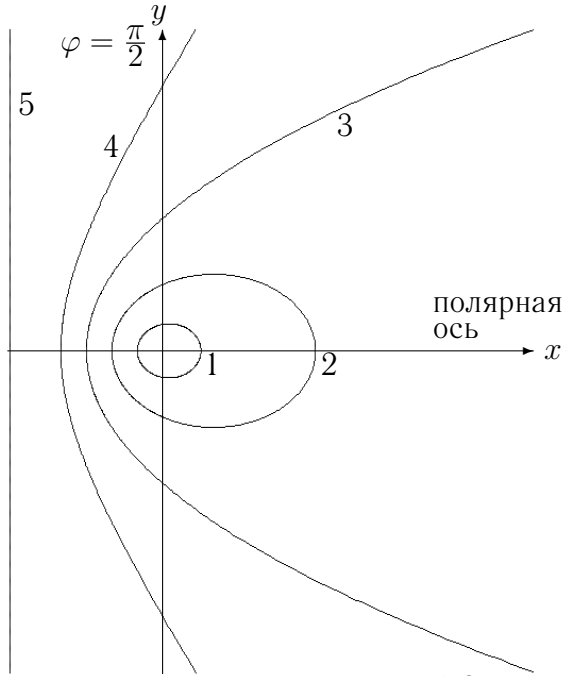


Рис. 10. Зависимость формы линии второго порядка $\rho = \dfrac{m\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ от эксцентриситета (зафиксировано расстояние m от фокуса до директрисы).

1 — эллипс $\rho = \dfrac{1}{1 - 0.2\cos\varphi}$, $\varepsilon = 0.2$; 2 — эллипс $\rho = \dfrac{1}{1 - 0.5\cos\varphi}$, $\varepsilon = 0.5$;

3 — парабола $\rho = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$, $\varepsilon = 1$; 4 — гипербола $\rho = \dfrac{1}{1 - 2\cos\varphi}$, $\varepsilon = 2$;

5 — директриса.

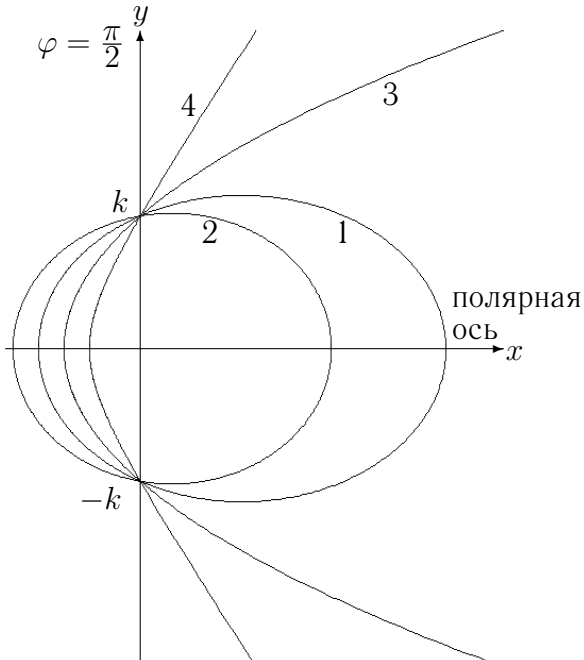


Рис. 11. Зависимость формы линии второго порядка $\rho = \dfrac{k}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$ от эксцентриситета (зафиксировано число k, директриса имеет уравнение $x = -\dfrac{k}{\varepsilon}$ в системе координат Oxy и уравнение $\rho = -\dfrac{k}{\varepsilon \cos\varphi}$ в полярной системе координат).

1 — эллипс $\rho = \dfrac{1}{1 - 0.2\cos\varphi}$, $\varepsilon = 0.2$; 2 — эллипс $\rho = \dfrac{1}{1 - 0.5\cos\varphi}$, $\varepsilon = 0.5$;

3 — парабола $\rho = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$, $\varepsilon = 1$; 4 — гипербола $\rho = \dfrac{1}{1 - 2\cos\varphi}$, $\varepsilon = 2$.

I.6. Цилиндрическая и сферическая системы координат

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $\mathcal{K}(x, y, z)$.

I.6.1. Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат тройке чисел $(\rho; \varphi; z)$ ставит в соответствие точку пространства с прямоугольными декартовыми координатами $(x; y; z)$, где $(x; y)$ — координаты точки на плоскости с полярными координатами $(\rho; \varphi)$, где полярная ось совпадает с осью абсцисс, а полюс — с началом координат. Нетрудно вычислить, что переход от цилиндрической в декартову систему координат осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ x = z \end{cases}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{9}$$

I.6.2. Сферическая система координат

Сферическая система координат тройке чисел $(r; \varphi; \theta)$ ставит в соответствие точку пространства, радиус-вектор которой имеет длину r и образует с осью аппликат[2] угол θ, а проекция этого радиуса-вектора на плоскость xOy образует с осью Ox угол φ. При фиксированных значениях переменных $r = r_0$ и $\varphi = \varphi_0$ получаются круги, называемые на глобусе радиуса r_0 *параллелями*, при фиксированных значениях переменных r и θ получаются круги, называемые на глобусе *меридианами* (но в последнем случае угол отсчитывается от северного полюса, а не от экватора[3]). При фиксированных значениях переменных $\varphi = \varphi_0$ и $\theta = \theta_0$ получаем луч, выходящий из начала координат.

---

[2] Иногда под θ понимают угол между радиусом-вектором точки и *плоскостью* xOy.

[3] Угол отсчитывается от экватора в случае, когда под θ понимают угол между радиусом-вектором точки и *плоскостью* xOy.

I.6.3. Переход от сферической в декартову прямоугольную систему координат

Переход от сферической в декартову прямоугольную систему координат осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ x = r\cos\theta \end{cases}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{10}$$

II. Поверхности второго порядка

Определение 6. *Поверхность* Π *называется* **поверхностью второго порядка** *тогда и только тогда, когда в некоторой прямоугольной системе координат* $Oxyz$ *она имеет уравнение*

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + pxy + qxz + ryz + ux + vy + wz + \tau = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ *отличен от нуля.*

II. Поверхности второго порядка

Определение 6. *Поверхность* Π *называется* **поверхностью второго порядка** *тогда и только тогда, когда в некоторой прямоугольной системе координат* $Oxyz$ *она имеет уравнение*

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + pxy + qxz + ryz + ux + vy + wz + \tau = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ *отличен от нуля.*

Можно показать, что любая поверхность второго порядка является либо цилиндрической поверхностью, либо для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов:

II. Поверхности второго порядка

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид;
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид;
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — двуполостный гиперболоид;
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — конус;
- $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ — эллиптический параболоид;
- $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ — гиперболический параболоид;

II. Поверхности второго порядка

Для построения этих поверхностей обычно применяется *метод сечений*. Например, рассмотрим эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Сечения этой поверхности плоскостями $x = x_0$ являются эллипсами $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$. Эти эллипсы «скользят» по эллипсам $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}$. Следовательно, получается фигура, подобная изображенной на рисунке 12. Внешний вид остальных фигур изображен на рисунках 13, 14, 15.

II. Поверхности второго порядка

Обратите внимание на рис. 13, из которого видно, как изменяется фигура $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=d$ при изменении параметра d. При $d>0$ получаем однополостный гиперболоид. С уменьшением d «перетяжка»[4] постепенно «стягивается». При $d=0$ эта «перетяжка» превращается в точку — начало координат. Когда d становится отрицательным, «связь» между верхней и нижней частью фигуры разрывается, и эта фигура превращается в двуполостный гиперболоид. Например, при $d=-1$ получаем двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, каноническое уравнение которого получается из этого уравнения умножением обеих частей равенства на -1: $\quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

---

[4]Имеется в виду эллипс $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=d \\ z=0 \end{cases}$.

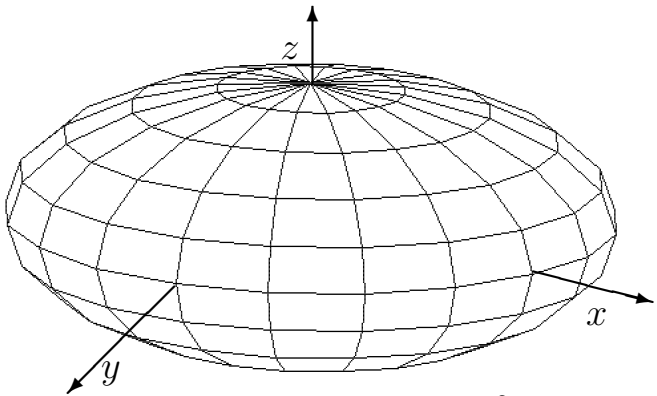


Рис. 12. Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

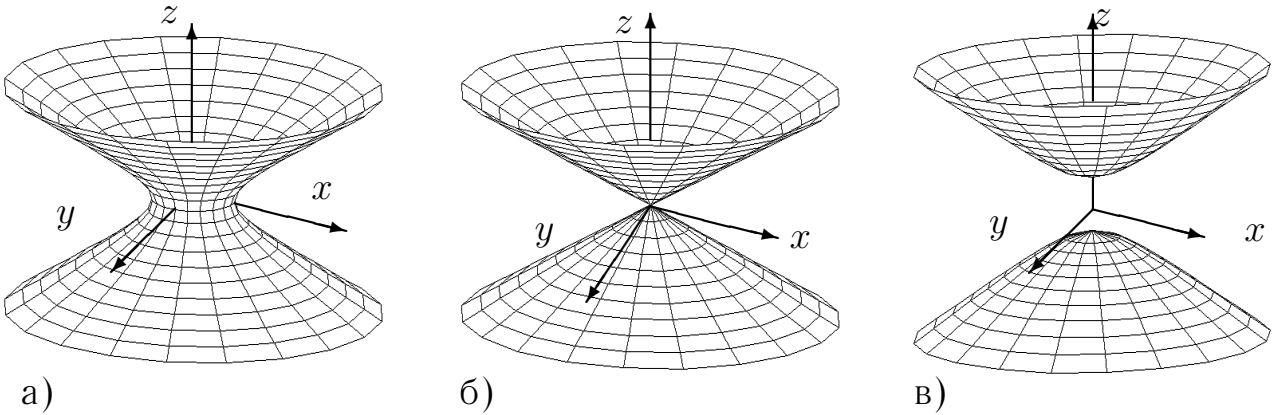


Рис. 13.

а) Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;

в) Двуполостный гиперболоид $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

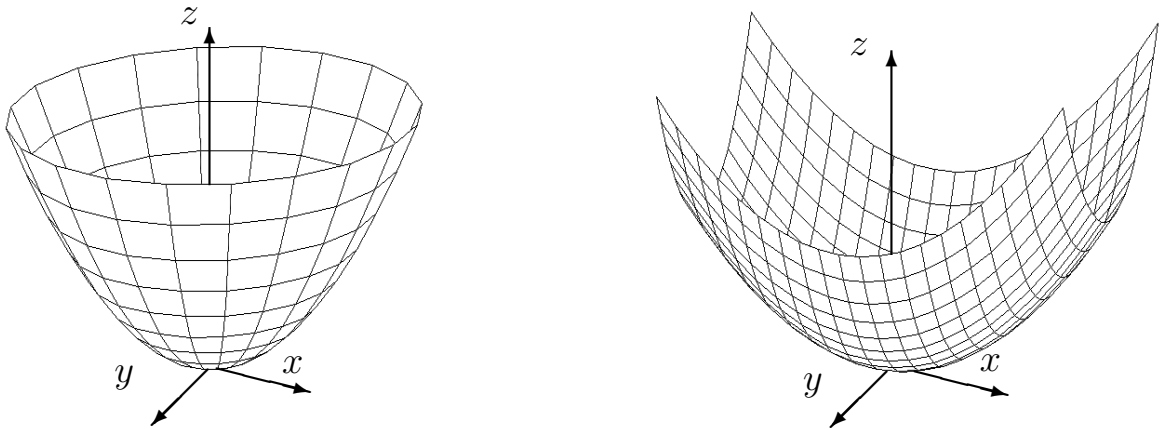


Рис. 14. Эллиптический параболоид $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (изображена одна и та же поверхность)

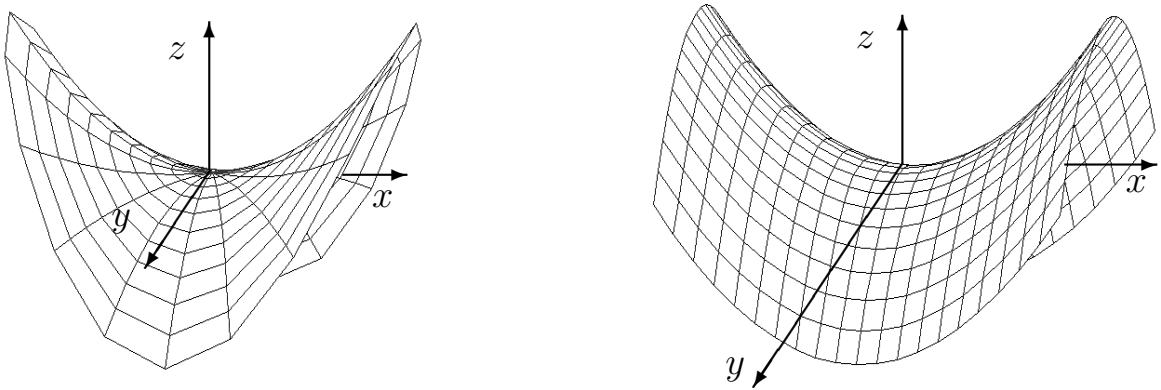
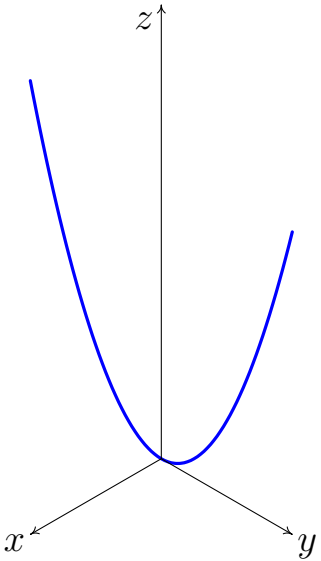


Рис. 15. Гиперболический параболоид $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (изображена одна и та же поверхность)

II.1. Параболоиды

Рассмотрим поверхности вида $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ и $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

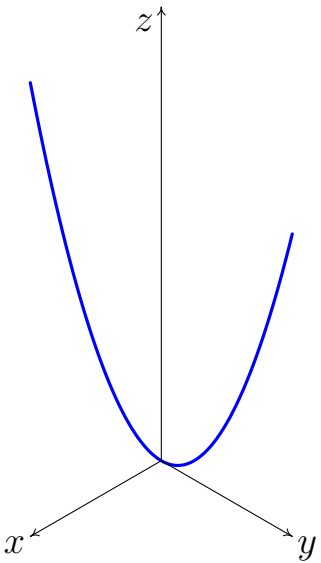
II.1.1. Эллиптический параболоид



В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $x = 0$.

В сечении получим _____ $\begin{cases} x = 0, \\ z = \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$

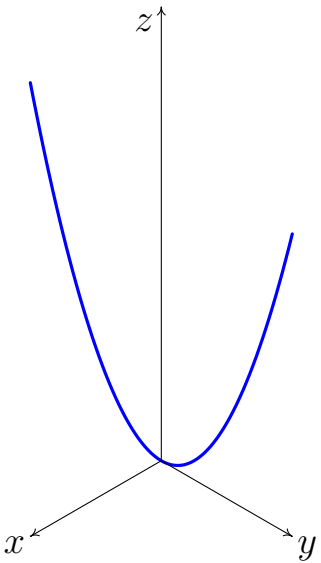
II.1.1. Эллиптический параболоид



В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $x = 0$.

В сечении получим *параболу*: $\begin{cases} x = 0, \\ z = \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$

II.1.1. Эллиптический параболоид

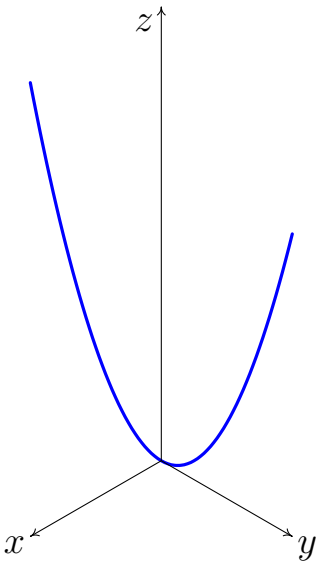


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим _____

$$\begin{cases} z = 1, \\ 1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

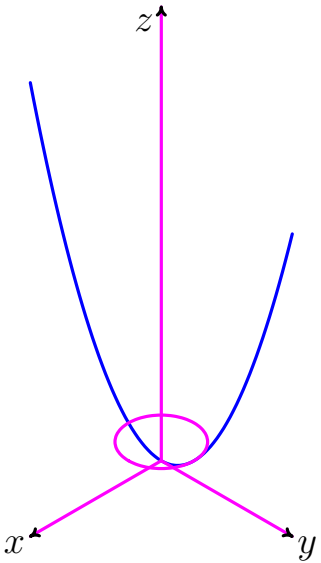


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим *эллипс*:

$$\begin{cases} z = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

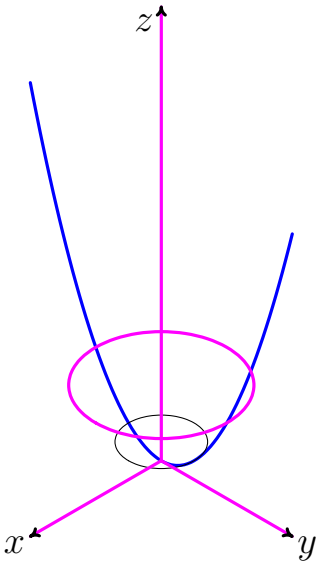


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим *эллипс*:

$$\begin{cases} z = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

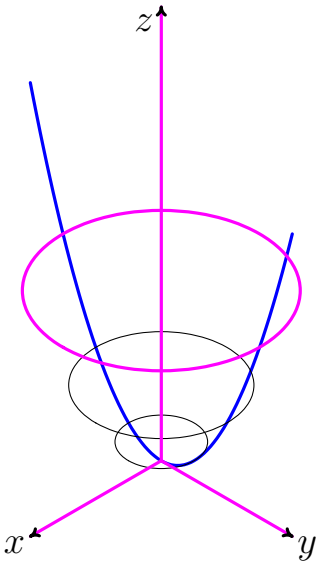


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим *эллипс*:

$$\begin{cases} z = 2, \\ \dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{y^2}{2b^2} = 1. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

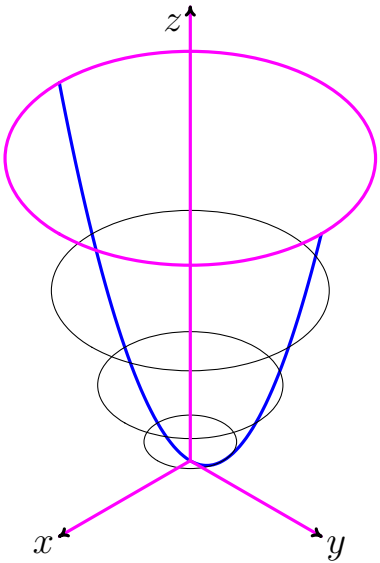


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим *эллипс*:

$$\begin{cases} z = 3, \\ \dfrac{x^2}{3a^2} + \dfrac{y^2}{3b^2} = 1. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

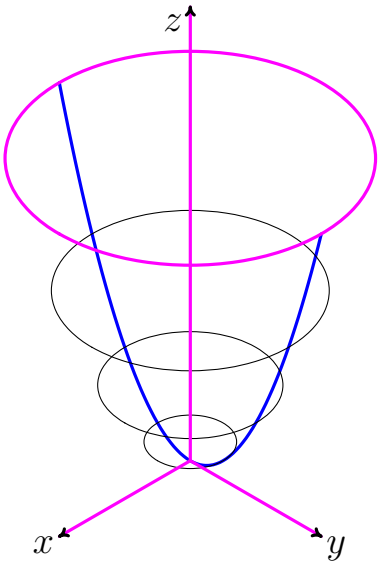


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $z = const$.

В сечении получим *эллипс*:

$$\begin{cases} z = 4, \\ \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

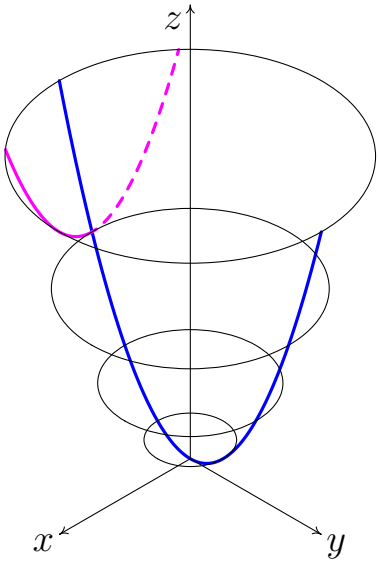


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим _____

$$\begin{cases} y = -1,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{2,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

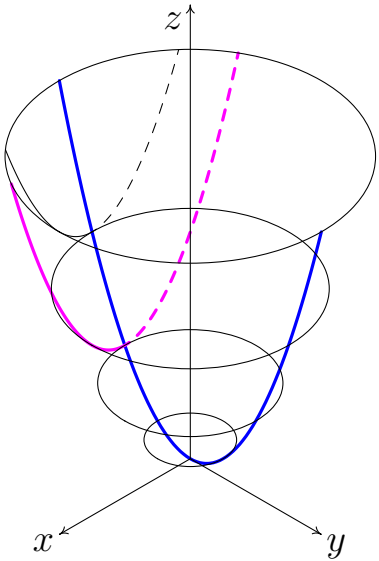


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -1,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{2,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

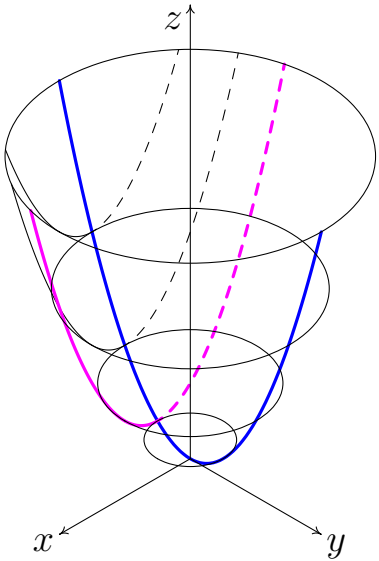


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -1, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

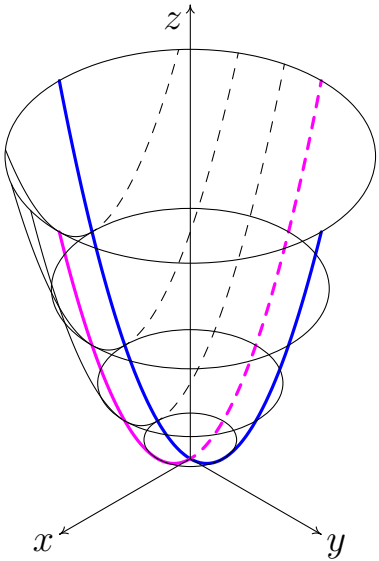


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -0,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{0,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

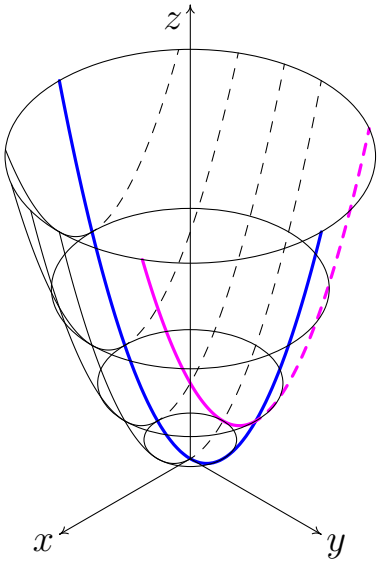


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

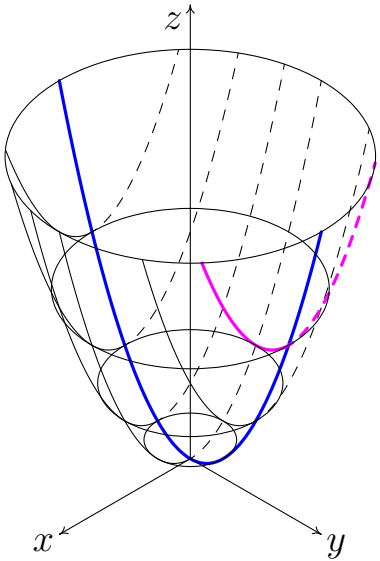


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = 1, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид

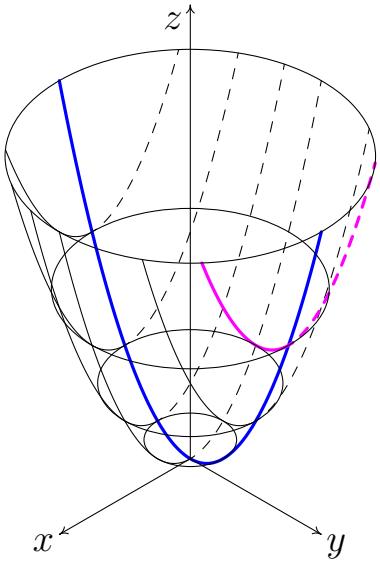


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

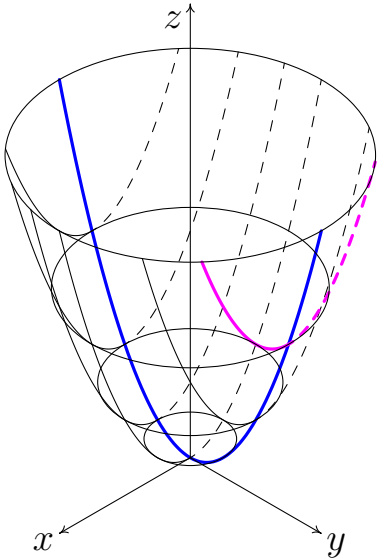
$$\begin{cases} y = 1,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{2,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.1. Эллиптический параболоид



Определение 7. Эллиптическим параболоидом *мы назовем поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

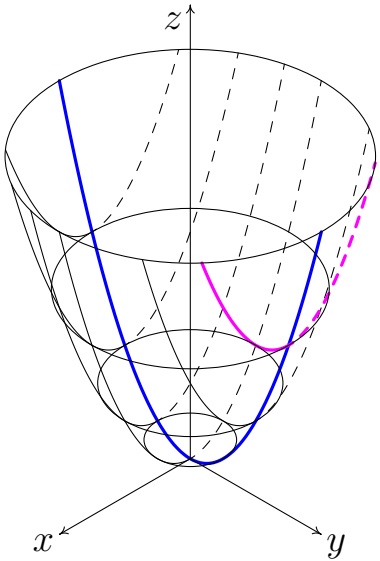
II.1.1. Эллиптический параболоид



Определение 7. Эллиптическим параболоидом *мы назовем поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Очевидно, что при $a = b$ в сечениях $z = const$ будут получаться окружности.

II.1.1. Эллиптический параболоид

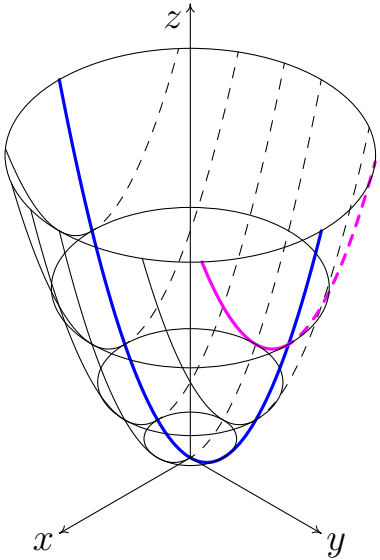


Определение 7. Эллиптическим параболоидом *мы назовем поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Очевидно, что при $a = b$ в сечениях $z = const$ будут получаться окружности.

Таким образом, параболоид $z = \dfrac{x^2}{\mathbf{a}^2} + \dfrac{y^2}{\mathbf{a}^2}$ может быть получен вращением параболы $\begin{cases} y = 0, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} \end{cases}$ вокруг оси аппликат, т.е. оси Oz.

II.1.1. Эллиптический параболоид



Определение 7. Эллиптическим параболоидом *мы назовем поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

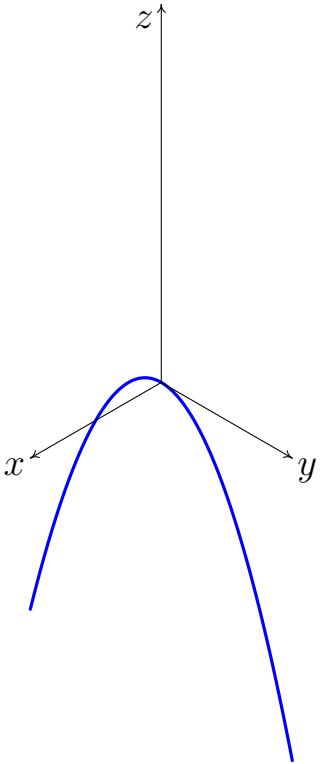
Очевидно, что при $a = b$ в сечениях $z = const$ будут получаться окружности.

Таким образом, параболоид $z = \dfrac{x^2}{\mathbf{a}^2} + \dfrac{y^2}{\mathbf{a}^2}$ является частным случаем **поверхности вращения**.

II.1.2. Гиперболический параболоид

Теперь построим поверхность $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

II.1.2. Гиперболический параболоид

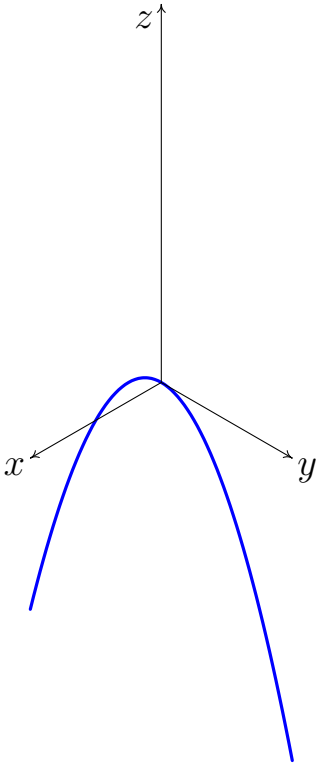


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $x = 0$.

В сечении получим _____

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = -\dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

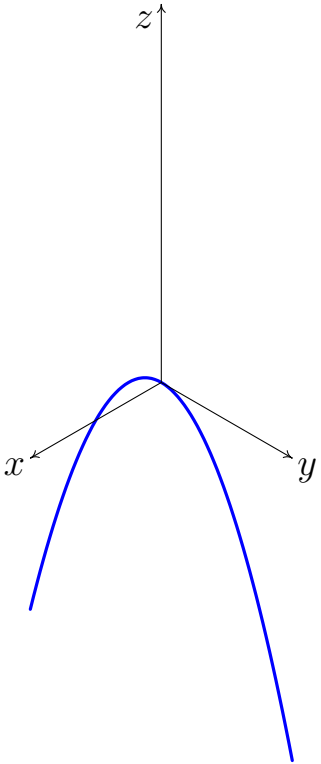


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $x = 0$.

В сечении получим *параболу:*

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = -\dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

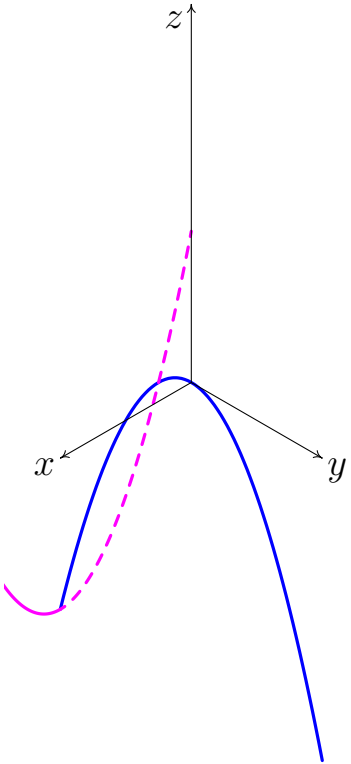


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим _____

$$\begin{cases} y = -2, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{4}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

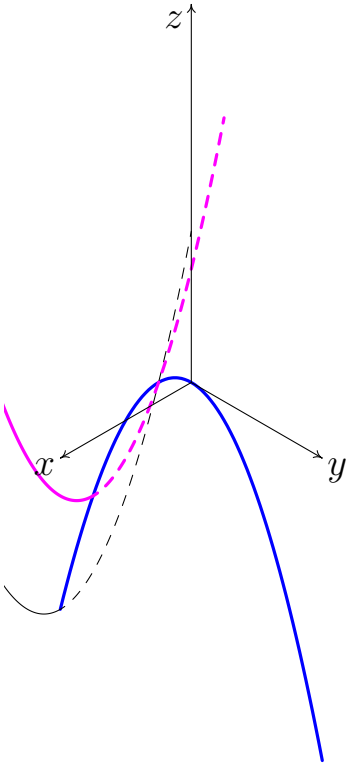


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -2, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{4}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

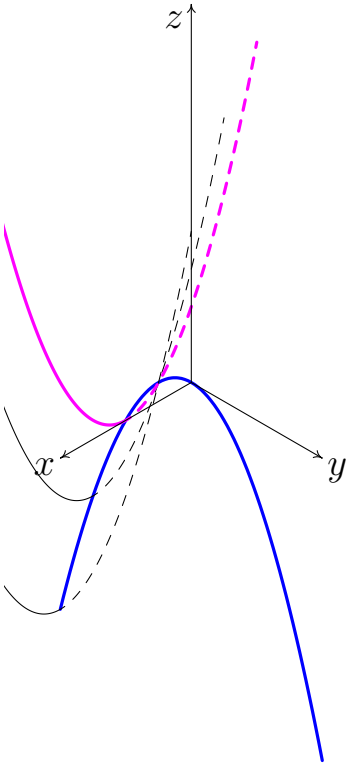


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -1,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

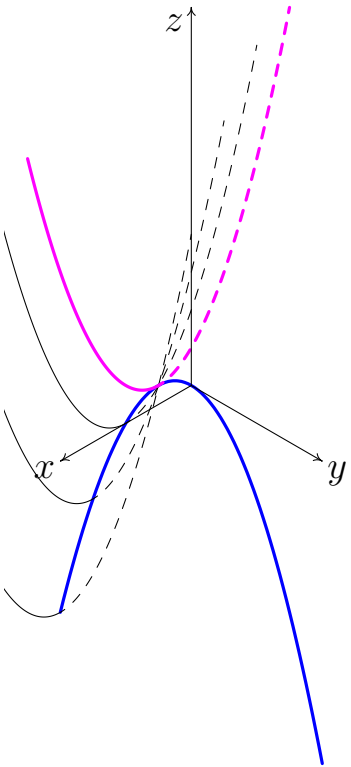


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -1, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

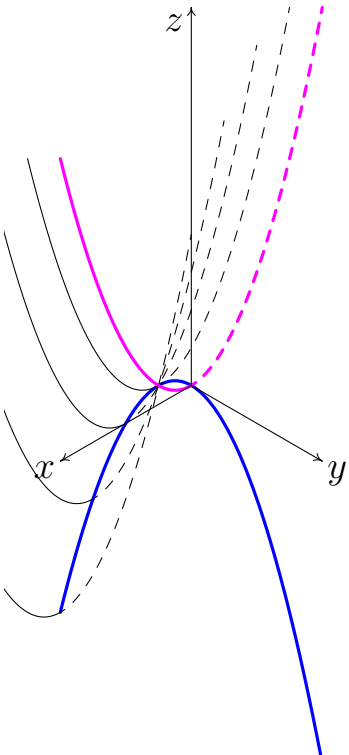


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = -0,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{0,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

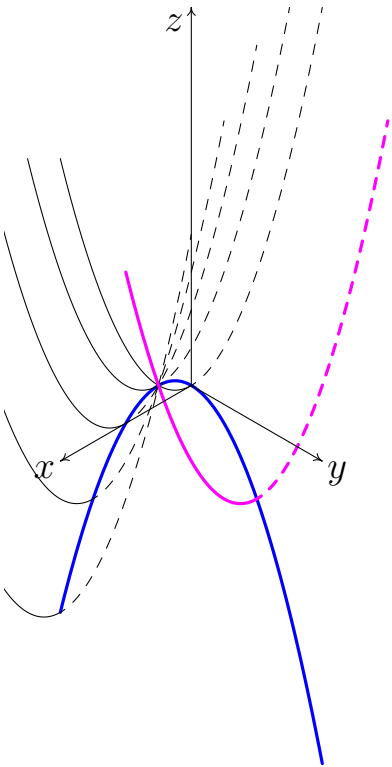


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

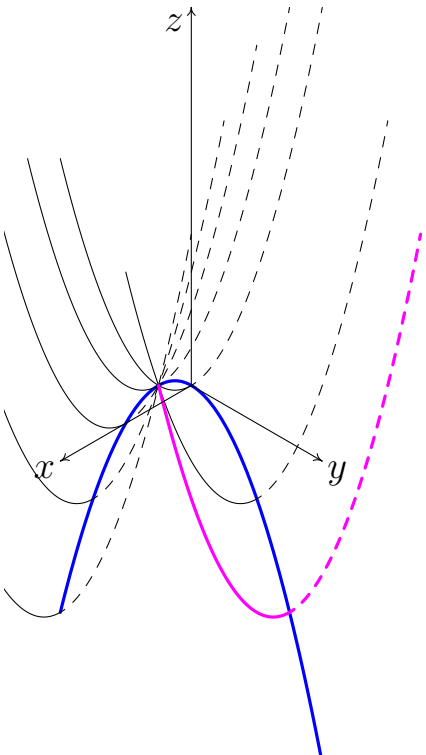


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = 1, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

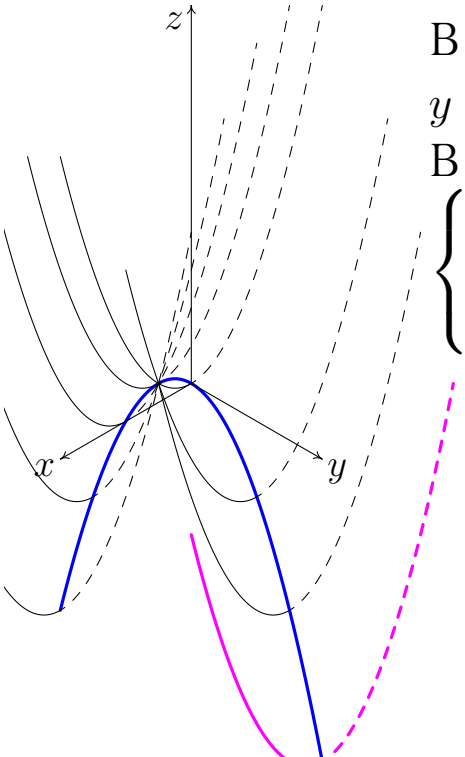


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

$$\begin{cases} y = 1,5, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2,25}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид

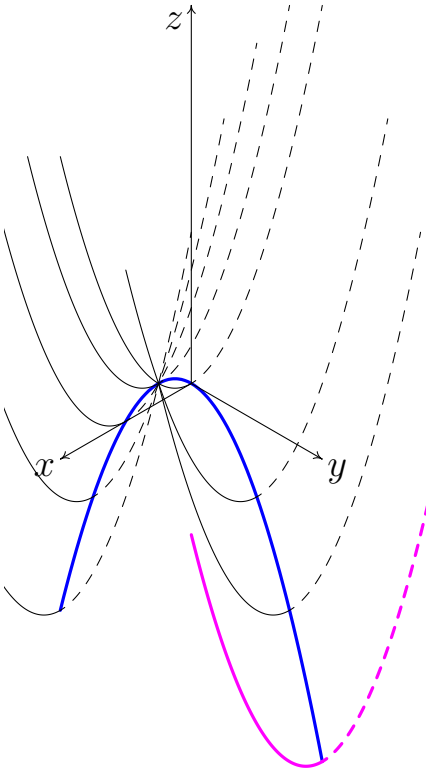


В уравнении $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ положим $y = const$.

В сечении получим *параболу*:

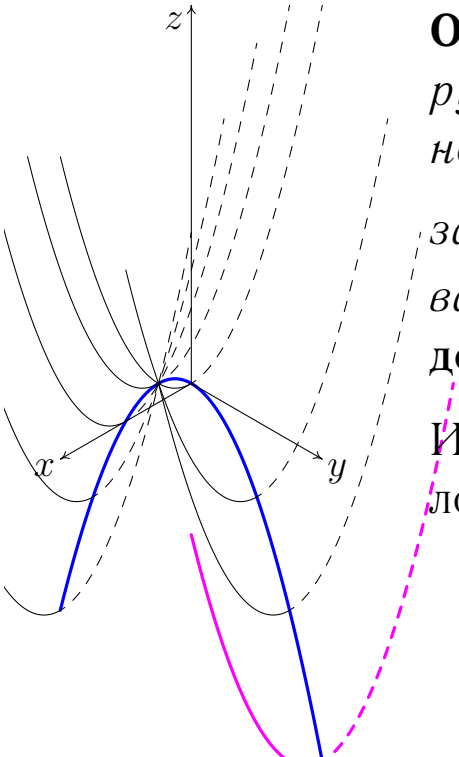
$$\begin{cases} y = 2, \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{4}{b^2}. \end{cases}$$

II.1.2. Гиперболический параболоид



Определение 8. *Поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, *называется* **гиперболическим параболоидом.**

II.1.2. Гиперболический параболоид



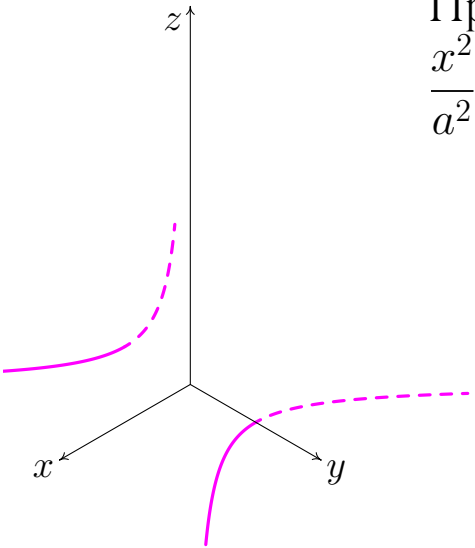
Определение 8. *Поверхность, которую можно в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задать уравнением* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, *называется* **гиперболическим параболоидом.**

Иногда эту поверхность называют «седлом».

II.2. Цилиндры

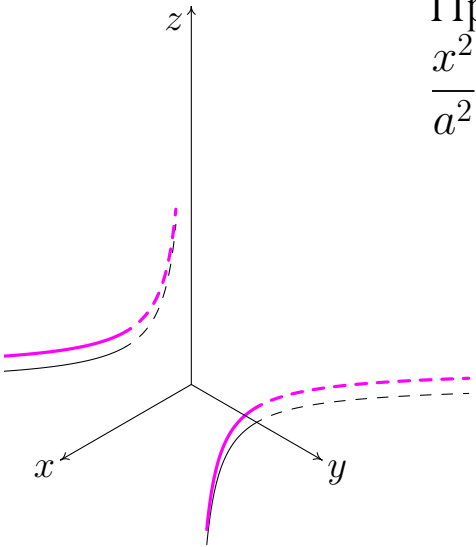
Рассмотрим поверхности, заданные уравнениями вида $f(x; y) = 0$, т.е. уравнениями, в которых отсутствует явная зависимость от z.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



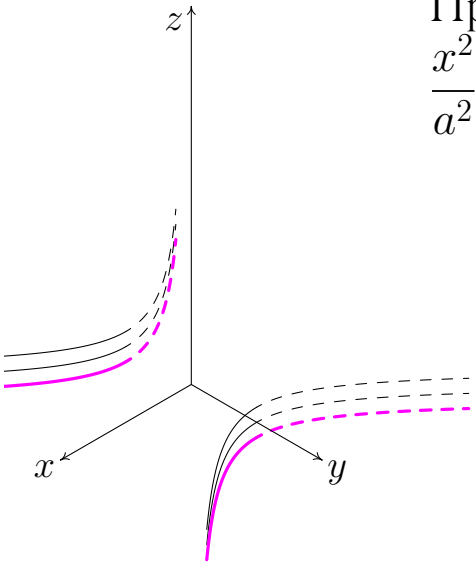
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



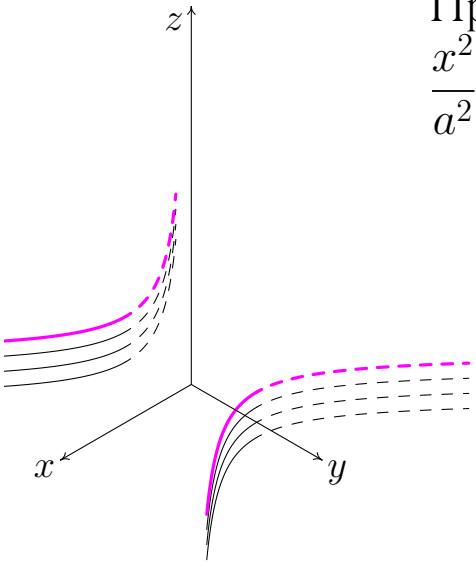
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 2$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



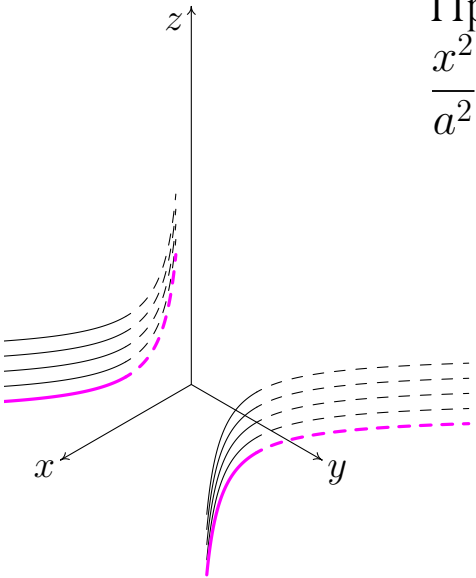
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0, 2$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



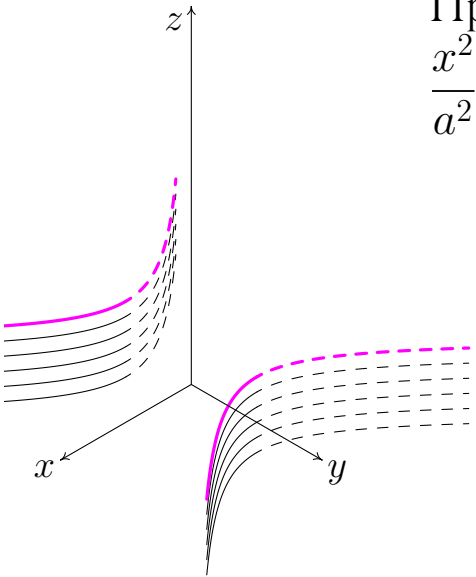
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 4$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



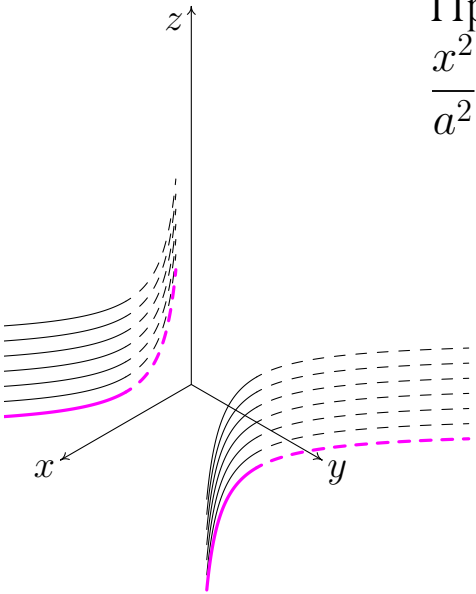
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,4$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



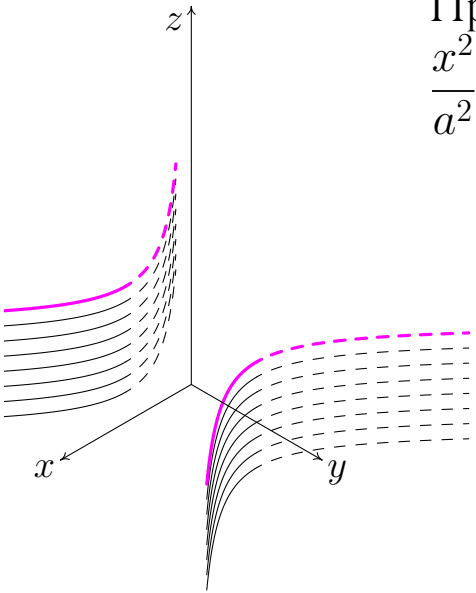
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 6$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



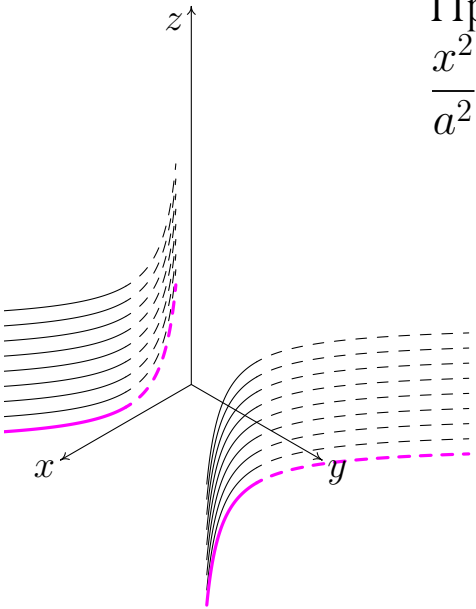
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,6$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



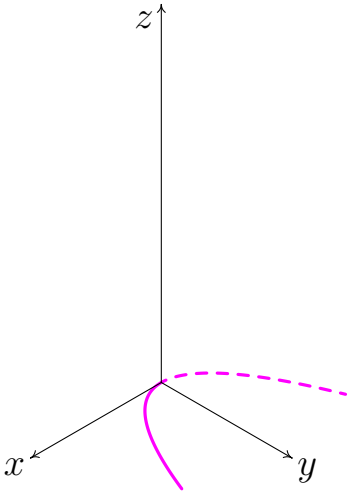
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 8$.

II.2.1. Гиперболический цилиндр



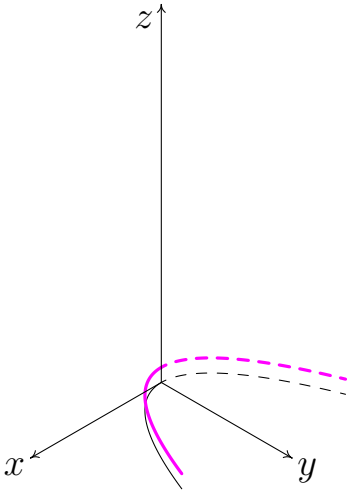
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,8$.

II.2.2. Параболический цилиндр



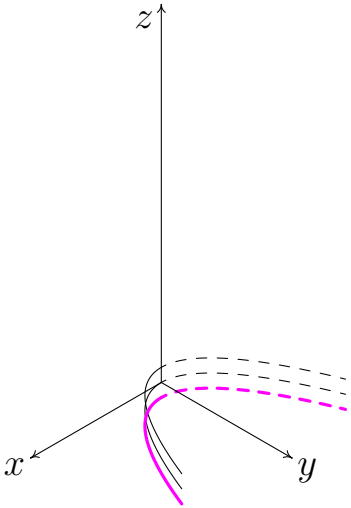
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = 0$.

II.2.2. Параболический цилиндр



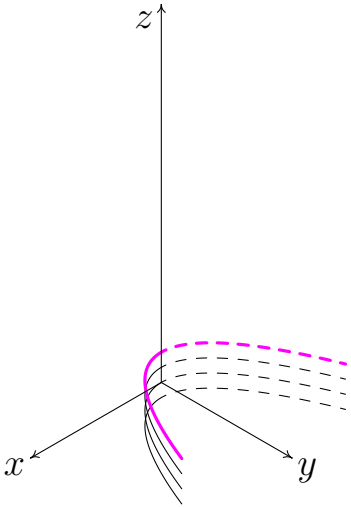
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = 0, 2$.

II.2.2. Параболический цилиндр



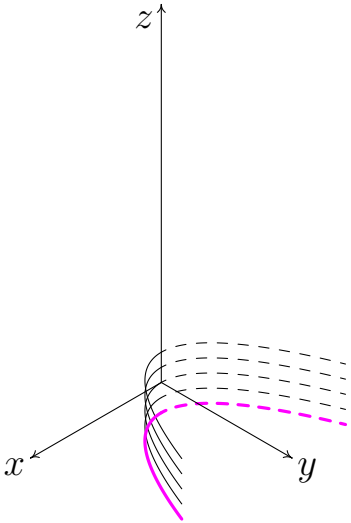
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = -0,2$.

II.2.2. Параболический цилиндр



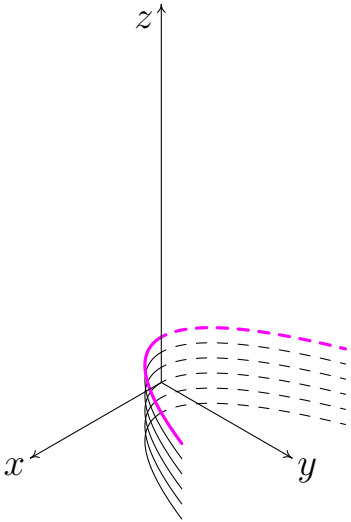
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = 0, 4$.

II.2.2. Параболический цилиндр



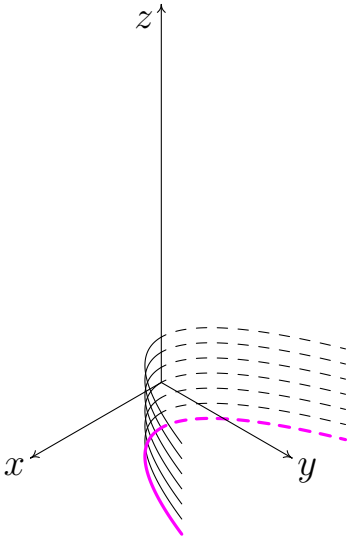
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = -0,4$.

II.2.2. Параболический цилиндр



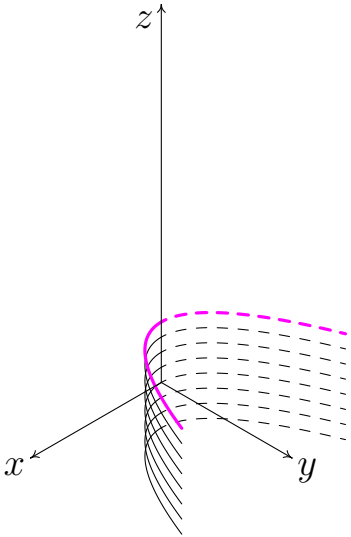
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = 0, 6$.

II.2.2. Параболический цилиндр



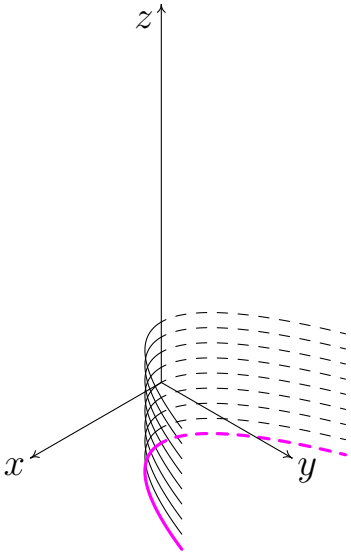
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = -0,6$.

II.2.2. Параболический цилиндр



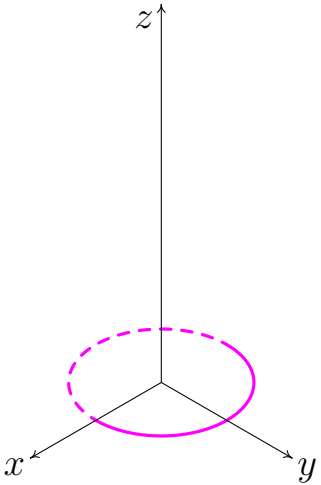
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = 0,8$.

II.2.2. Параболический цилиндр



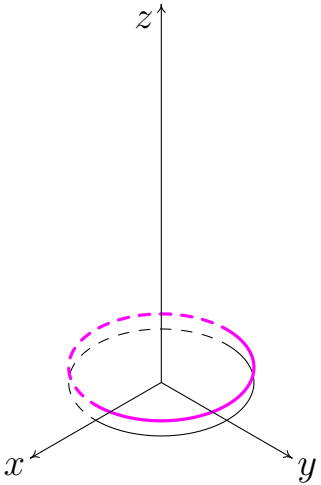
Проведем сечение поверхности $y = px^2$ плоскостью $z = -0,8$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



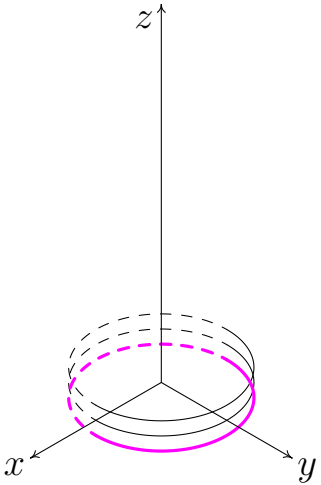
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



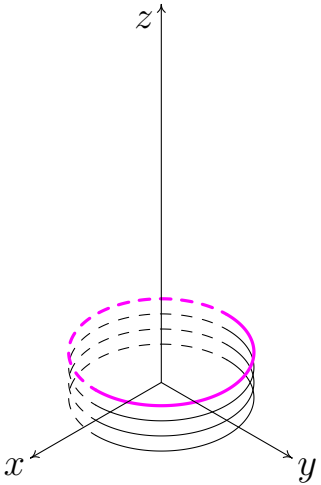
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 2$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



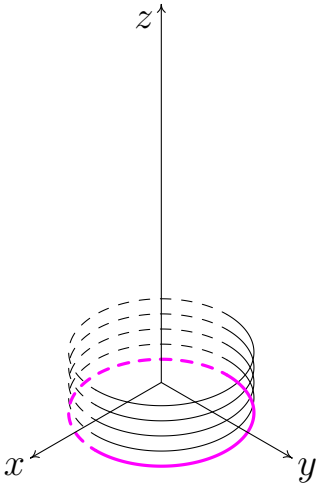
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,2$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



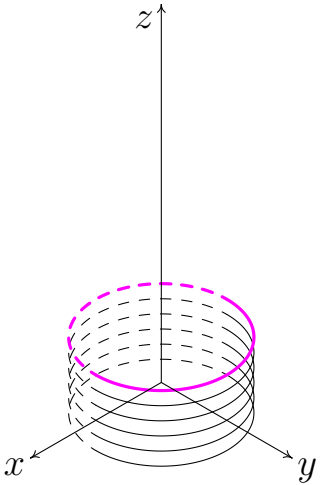
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 4$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



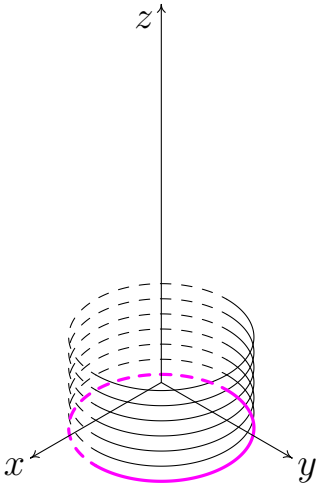
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,4$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



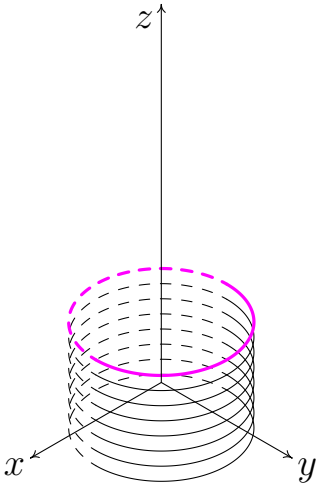
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 6$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



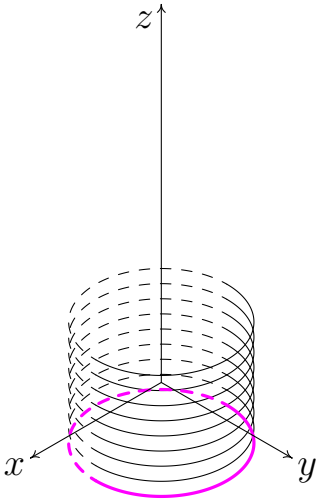
Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,6$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = 0, 8$.

II.2.3. Эллиптический цилиндр



Проведем сечение поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостью $z = -0,8$.

II.3. Поверхность вращения

Определение 9. Поверхностью вращения *называется поверхность, полученная вращением линии относительно какой-либо оси в случае, когда либо линия не является плоской, либо ось* не перпендикулярна *плоскости, в которой лежит эта линия.*

II.3. Поверхность вращения

Определение 9. Поверхностью вращения *называется поверхность, полученная вращением линии относительно какой-либо оси в случае, когда либо линия не является плоской, либо ось* не перпендикулярна *плоскости, в которой лежит эта линия.*

Примерами поверхностей вращения являются цилиндр $x^2 + y^2 = R^2$, конус $\dfrac{z^2}{c^2} = x^2 + y^2$, параболоид $pz = x^2 + y^2$ и др.

II.4. Линейчатые поверхности

Поверхность называется **линейчатой**, если ее можно образовать движением прямой линии (образующей). Из поверхностей второго порядка линейчатыми являются цилиндры и конусы. А также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются **линейчатыми** поверхностями.

Поверхность, образуемая движением прямой линии (образующей), параллельной неподвижной прямой, называется **цилиндрической**. Всякая линия, которую образующая пересекает в любом своем положении, называется направляющей.

Поверхность, образуемая движением прямой линии (образующей), проходящей через неподвижную точку (вершина поверхности), называется **конической**. Всякая (не проходящая через вершину) линия, которую образующая пересекает в любом своем положении, называется направляющей.

II.4. Линейчатые поверхности

Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются **линейчатыми поверхностями**, т.е. могут быть представлены в виде объединения прямых линий. Для этого покажем, что можно представить x и y, как линейные функции от z: $\begin{cases} x(z) = k_1 z + b_1, \\ y(z) = k_2 z + b_2, \end{cases}$

причем будет выполняться равенство $\dfrac{x^2(z)}{a^2} + \dfrac{y^2(z)}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

II.4. Линейчатые поверхности

Преобразуем уравнение гиперболоида к виду

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Последнее равенство будет выполняться, например, при каждом из условий, представленных одной из следующих систем уравнений (здесь α, β — числовые константы):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\[2ex] \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\[2ex] \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

II.4. Линейчатые поверхности

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

II.4. Линейчатые поверхности

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2}+\dfrac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)a}{c\left(\beta^2+\alpha^2\right)}\cdot z, \\ \\ y=\dfrac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)b}{\beta^2+\alpha^2}+\dfrac{2b\alpha\beta}{c\left(\beta^2+\alpha^2\right)}\cdot z, \\ \\ z=z \end{cases}$$

II.4. Линейчатые поверхности

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \Rightarrow$$

II.4. Линейчатые поверхности

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2a\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)a}{c\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\cdot z, \\ \\ y=\dfrac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)b}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{2b\alpha\beta}{c\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\cdot z, \\ \\ z=z. \end{cases}$$

II.4. Линейчатые поверхности

Таким образом, однополостный гиперболоид можно представить в виде объединения прямых, заданных этими уравнениями.

II.4. Линейчатые поверхности

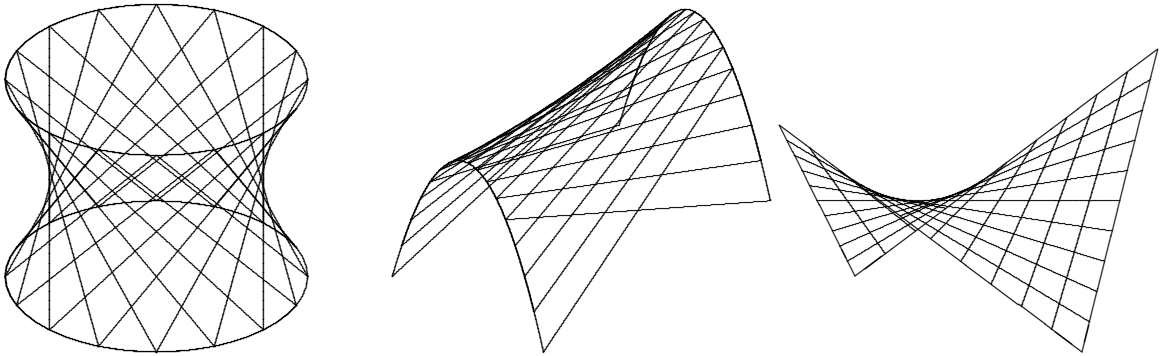
Аналогичная ситуация с гиперболическим параболоидом: его уравнение можно представить в виде

$$z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Поэтому, если положить $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \alpha$ или $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \alpha$, то получим, что гиперболический параболоид включает в себя прямые, заданные, например, следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\alpha + \dfrac{a}{b} \cdot y, \\ y = y, \\ z = \alpha^2 + \dfrac{2\alpha}{b} \cdot y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\alpha - \dfrac{a}{b} \cdot y, \\ y = y, \\ z = \alpha^2 - \dfrac{2\alpha}{b} \cdot y. \end{cases}$$

II.4. Линейчатые поверхности



а **б** **в**

Гиперболоид: а — однополостный; б,в — гиперболический параболоид (изображена одна и та же поверхность) как линейчатые поверхности

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?