Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет-УПИ

Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников, Н. В. Мельникова

# Элементы аналитической геометрии

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практических занятий

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург

2009

Пример 1 получения параметрических уравнений прямой 5

Пример 2 получения уравнения плоскости 37

Пример 3 нахождения расстояния от точки до плоскости 63

Пример 4 нахождения уравнений прямой на плоскости 82

Пример 5 нахождения уравнений плоскости 124

Пример 6 нахождения уравнений прямой в пространстве 178

Пример 7 преобразования типовых уравнений прямой на плоскости 218

Пример 8 преобразования типовых уравнений прямой в пространстве 234

Пример 9 нахождения угла между плоскостями 247

Пример 10 нахождения угла между прямыми на плоскости 261

Пример 11 нахождения угла между прямыми в пространстве 296

Пример 12 нахождения угла между прямой и плоскостью 329

*Нахождение расстояния* 349

Задача I.1 349

*Нахождение углов* 350

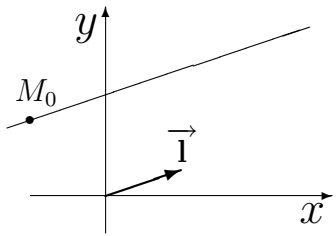
Задача II.2 350

Задача II.3 351

Ответы и решения 352

**Пример 1.**

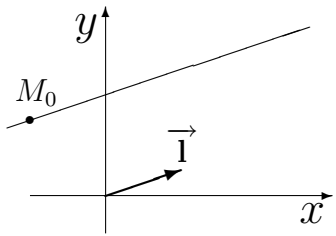
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.**

**Пример 1.**

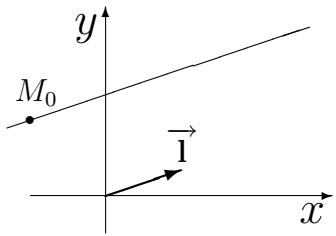
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

**Пример 1.**

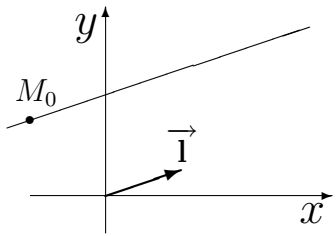
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?*

**Пример 1.**

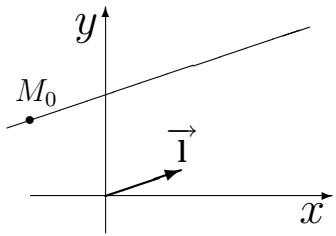
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

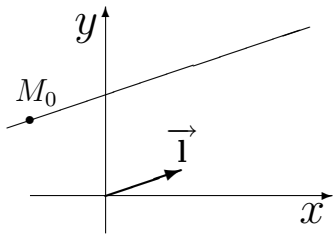



**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?*

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

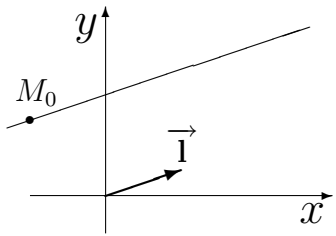



**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?* В виде системы параметрических уравнений (см. **таблицу**).

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



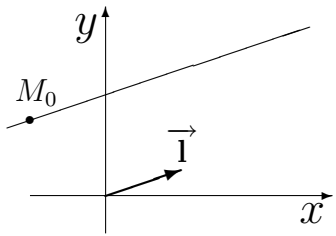

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?* В виде системы параметрических уравнений (см. **таблицу**).

*Введем переменные.*

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



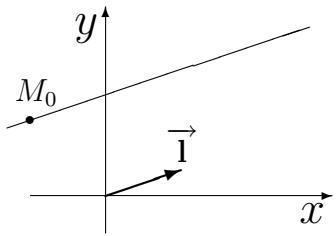

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?* В виде системы параметрических уравнений (см. **таблицу**).

*Введем переменные.* Уравнение искомой системы представляет собой высказывание о координатах произвольной точки на прямой.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*



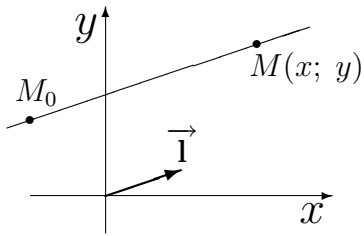

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?* В виде системы параметрических уравнений (см. **таблицу**).

*Введем переменные.* Возьмем произвольную точку $M$ на этой прямой и обозначим ее координаты буквами, например, $(x; y)$.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



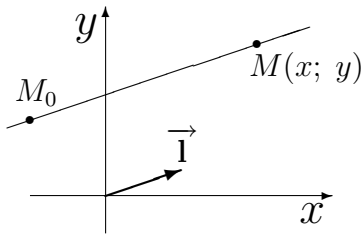

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**. *Что надо найти?* Уравнения прямой.

*В каком виде представим ответ?* В виде системы параметрических уравнений (см. **таблицу**).

*Введем переменные.* Возьмем произвольную точку $M$ на этой прямой и обозначим ее координаты буквами, например, $(x; y)$.

**Пример 1.**

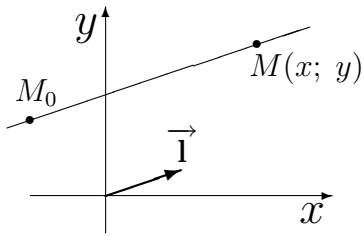
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.*

**Пример 1.**

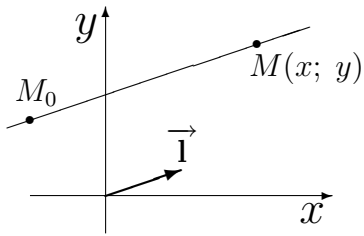
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин:

**Пример 1.**

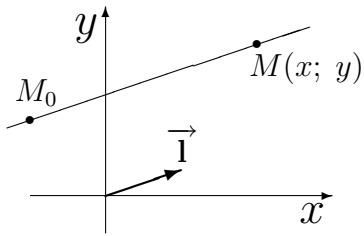
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора;

**Пример 1.**

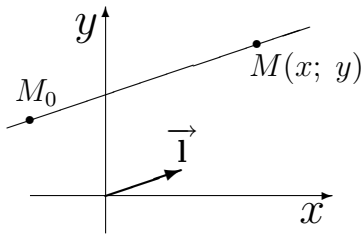
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора;
2) координаты вектора;

**Пример 1.**

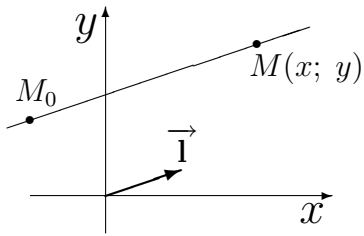
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора; 2) координаты вектора; 3) скалярное произведение;

**Пример 1.**

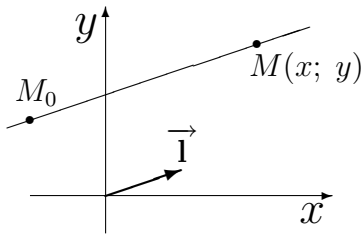
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора; 2) координаты вектора; 3) скалярное произведение; 4) величина угла;

**Пример 1.**

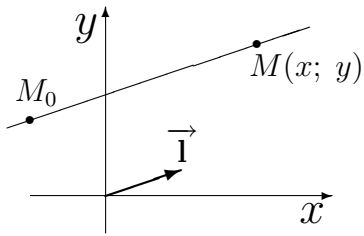
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора;
2) координаты вектора; 3) скалярное произведение;
4) величина угла;
5) отношение одноименных величин (отношение длин, величин углов и т.п.);

**Пример 1.**

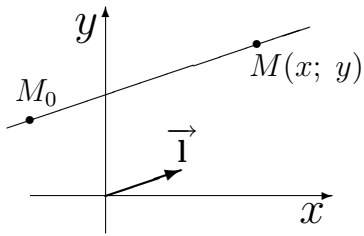
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* В векторной алгебре рассматривается не так уж много величин: 1) длина вектора;
2) координаты вектора; 3) скалярное произведение;
4) величина угла;
5) отношение одноименных величин (отношение длин, величин углов и т.п.);
6) величины, «доставшиеся в наследство» от классической геометрии: площадь и объем.

**Пример 1.**

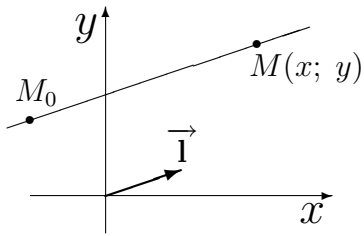
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Теперь внимательно читаем условие.

**Пример 1.**

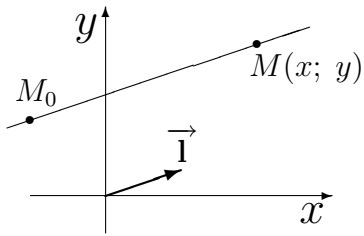
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* У нас имеется вектор, *параллельный* прямой, поэтому напрашивается каким-то образом использовать **критерий коллинеарности векторов**.

**Пример 1.**

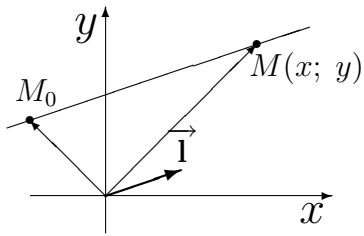
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* У нас имеется вектор, *параллельный* прямой, поэтому напрашивается каким-то образом использовать **критерий коллинеарности векторов**. Для этого надо, используя введенную нами точку $M$, построить вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}}$.

**Пример 1.**

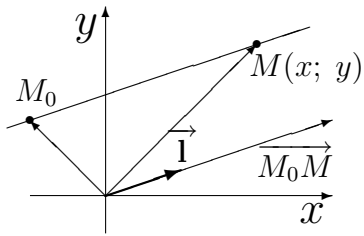
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* У нас имеется вектор, *параллельный* прямой, поэтому напрашивается каким-то образом использовать **критерий коллинеарности векторов**. Для этого надо, используя введенную нами точку $M$, построить вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}}$.

**Пример 1.**

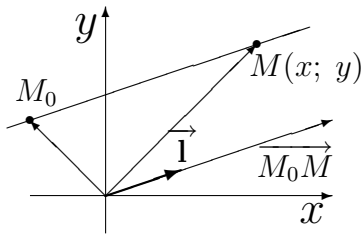
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* У нас имеется вектор, *параллельный* прямой, поэтому напрашивается каким-то образом использовать **критерий коллинеарности векторов**. Для этого надо, используя введенную нами точку $M$, построить вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}}$.

**Пример 1.**

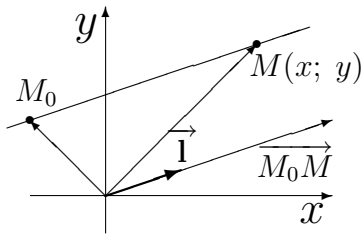
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* У нас имеется вектор, *параллельный* прямой, поэтому напрашивается каким-то образом использовать **критерий коллинеарности векторов**. Для этого надо, используя введенную нами точку $M$, построить вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}}$. Из рис. видно, что в качестве такого вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M}$.

**Пример 1.**

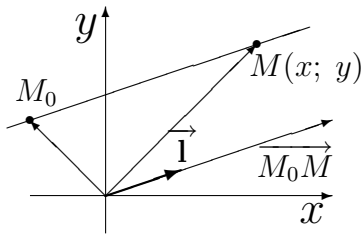
*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\,(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Из **критерия коллинеарности векторов** следует, что $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ для некоторого действительного числа $t$.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*

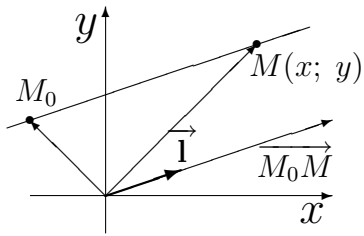



**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Из **критерия коллинеарности векторов** следует, что $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ для некоторого действительного числа $t$.

Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, получаем

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*



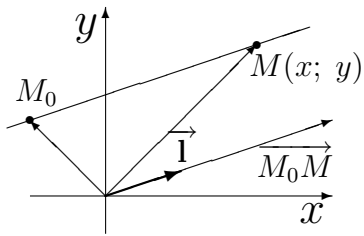

**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Из **критерия коллинеарности векторов** следует, что $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ для некоторого действительного числа $t$.

Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow$$

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Из **критерия коллинеарности векторов** следует, что $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ для некоторого действительного числа $t$.

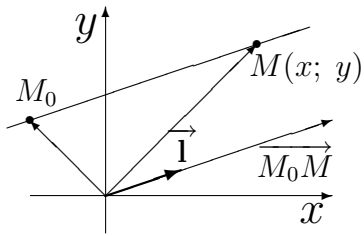
Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases}$$

где последняя система уравнений представляет собой «перевод на координатный язык» соответствующего векторного уравнения.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



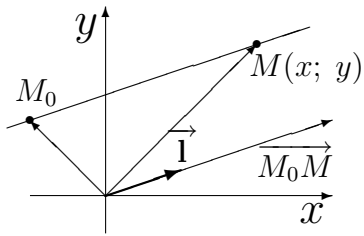

**Решение.**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases}$$

Здесь $x = x_0 + ut$ — это утверждение о первой координате векторов из левой и, соответственно, правой частей равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$,

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*




**Решение.**

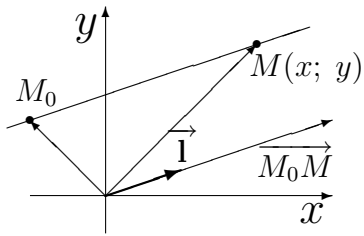
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases}$$

Здесь $x = x_0 + ut$ — это утверждение о первой координате векторов из левой и, соответственно, правой частей равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$,

$y = y_0 + vt$ — это утверждение о второй координате векторов из левой и, соответственно, правой частей этого векторного равенства.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



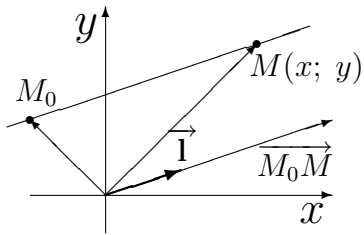

**Решение.**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases}$$

Очевидно, что все эти рассуждения остаются верными не только для векторов и прямых в плоскости, но и в пространстве, только в этом случае в системе уравнений появляется утверждение о равенстве третьей координаты.

**Пример 1.**

*Вывести параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.*




**Решение.**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases}$$

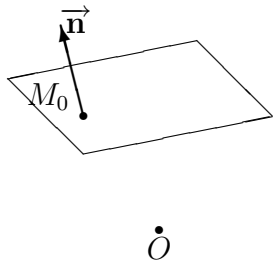
Аналогичны уравнения прямой в пространстве:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \\ z = z_0 + wt, \end{cases}$$

где $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + w\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ (см. **таблицу**).

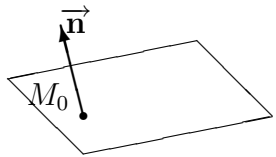
**Вернуться к лекции** или рассмотреть **другой пример**?

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.**

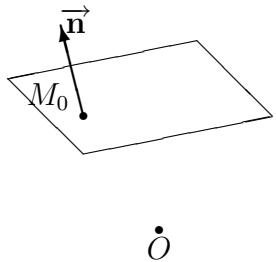
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




$\dot{O}$

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

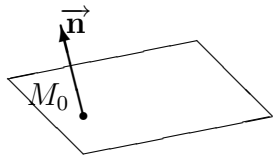
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?*

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

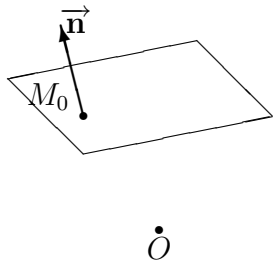



$\dot{O}$

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

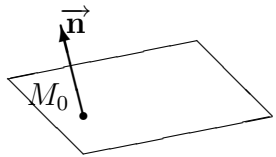



**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?*

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



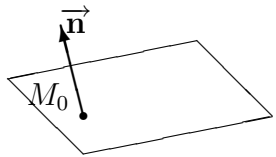

$\dot{O}$

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?* В виде соответствующего уравнения плоскости.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




$\dot{O}$

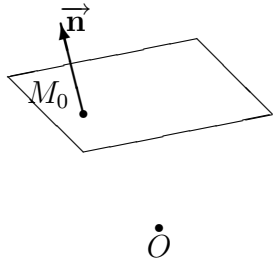
**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?* В виде соответствующего уравнения плоскости.

*Введем переменные.*

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



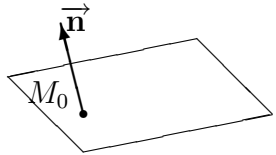

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?* В виде соответствующего уравнения плоскости.

*Введем переменные.* Как мы уже отмечали, уравнение линии и поверхности представляет собой утверждение о координатах произвольной точки этой фигуры.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



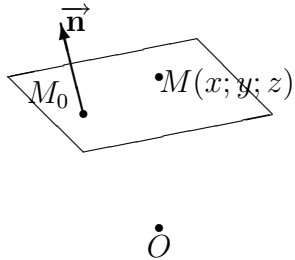

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?* В виде соответствующего уравнения плоскости.

*Введем переменные.* Как мы уже отмечали, уравнение линии и поверхности представляет собой утверждение о координатах произвольной точки этой фигуры. Поэтому возьмем произвольную точку $M$ на этой плоскости и обозначим ее координаты буквами, например, пусть $M(x; y; z)$.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



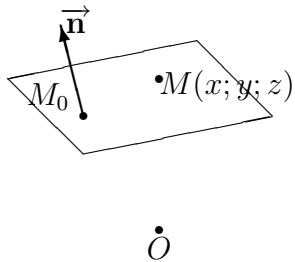

**Решение.** Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

*Что надо найти?* Уравнение плоскости.

*В каком виде представим ответ?* В виде соответствующего уравнения плоскости.

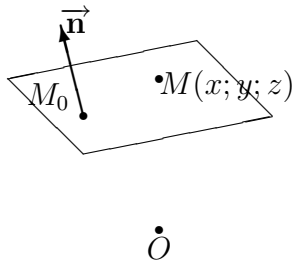
*Введем переменные.* Как мы уже отмечали, уравнение линии и поверхности представляет собой утверждение о координатах произвольной точки этой фигуры. Поэтому возьмем произвольную точку $M$ на этой плоскости и обозначим ее координаты буквами, например, пусть $M(x; y; z)$.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



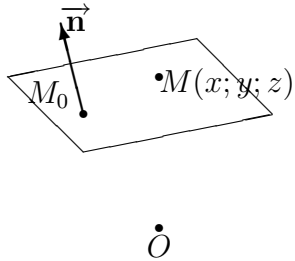

**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.*

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



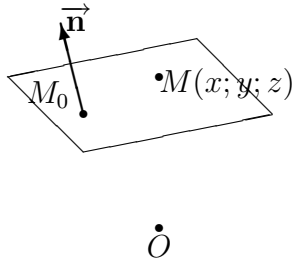

**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Теперь внимательно читаем условие, мы ищем

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Теперь внимательно читаем условие, мы ищем ***величину, значение которой будем вычислять разными способами***.

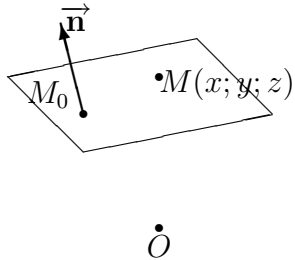
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Теперь внимательно читаем условие, мы ищем ***величину, значение которой будем вычислять разными способами***.

При решении **примера 1** мы перечислили **величины, рассматриваемые в векторной алгебре**.

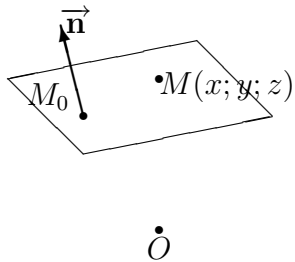
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** *Составим систему уравнений, для чего некоторую величину вычислим разными способами.* Теперь внимательно читаем условие, мы ищем ***величину, значение которой будем вычислять разными способами***.

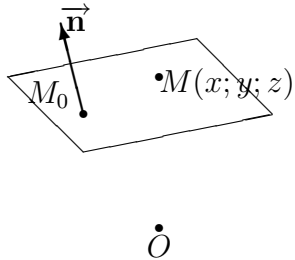
В условии рассматриваемого примера «волшебным» словом является слово «перпендикулярно», поскольку у нас имеется эффективный **критерий ортогональности векторов**, позволяющий двумя способами вычислить соответствующее скалярное произведение.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Поэтому нам надо каким-то образом с помощью точки $M$ «сконструировать» вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, то есть параллельный данной плоскости.

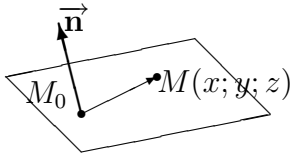
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Поэтому нам надо каким-то образом с помощью точки $M$ «сконструировать» вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, то есть параллельный данной плоскости.

Из рисунка видно, что в качестве такого вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M}$.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

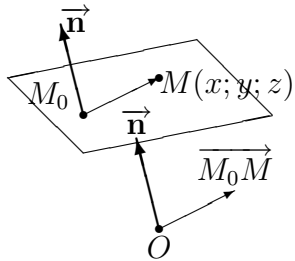



$\dot{O}$

**Решение.** Поэтому нам надо каким-то образом с помощью точки $M$ «сконструировать» вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, то есть параллельный данной плоскости.

Из рисунка видно, что в качестве такого вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M}$.

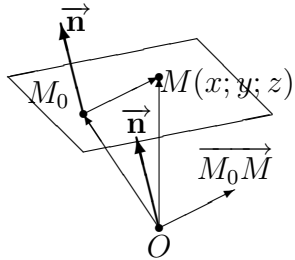
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Поэтому нам надо каким-то образом с помощью точки $M$ «сконструировать» вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, то есть параллельный данной плоскости.

Из рисунка видно, что в качестве такого вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M}$.

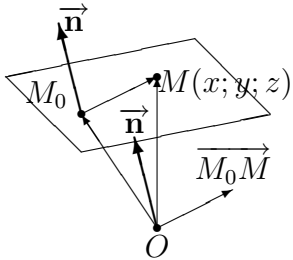
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Поэтому нам надо каким-то образом с помощью точки $M$ «сконструировать» вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, то есть параллельный данной плоскости.

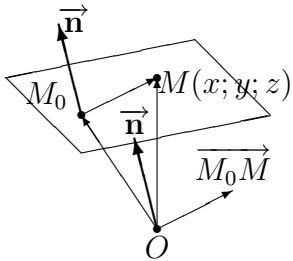
Из рисунка видно, что в качестве такого вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M}$.

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора** $\overrightarrow{M_0M}$,

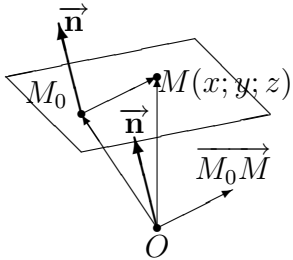
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора** $\overrightarrow{M_0M}$,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \;\Rightarrow$$

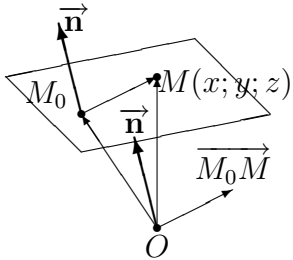
**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора** $\overrightarrow{M_0M}$,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

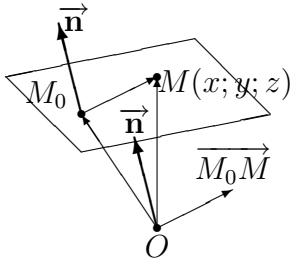



**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора $\overrightarrow{M_0M}$**,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ не зависит от координат точки $M$, поэтому оно представляет собой число. Обозначим его через $D$, и получим уравнение (см. **таблицу**)

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*



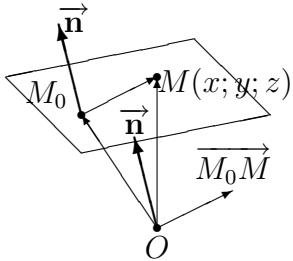

**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора $\overrightarrow{M_0M}$**,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ не зависит от координат точки $M$, поэтому оно представляет собой число. Обозначим его через $D$, и получим уравнение (см. **таблицу**)

$$\begin{cases} A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \end{cases} \Rightarrow$$

**Пример 2.**
*Вывести общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*




**Решение.** Согласно **критерию ортогональности векторов**, получаем, в силу **формулы для координат вектора** $\overrightarrow{M_0M}$,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ не зависит от координат точки $M$, поэтому оно представляет собой число. Обозначим его через $D$, и получим уравнение (см. **таблицу**)

$$\begin{cases} A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \end{cases} \Rightarrow\; Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

**Вернуться к лекции** или рассмотреть **следующий пример**?

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.**

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?*

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?*

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?* Выражением, содержащим координаты точки и коэффициенты уравнения плоскости.

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?* Выражением, содержащим координаты точки и коэффициенты уравнения плоскости.

*Введем переменные или найдем искомую величину конструктивно.*

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?* Выражением, содержащим координаты точки и коэффициенты уравнения плоскости.

*Введем переменные или найдем искомую величину конструктивно.* Обозначим искомую величину буквой, например, $d$.

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?* Выражением, содержащим координаты точки и коэффициенты уравнения плоскости.

*Введем переменные или найдем искомую величину конструктивно.* Обозначим искомую величину буквой, например, $d$. Кроме того, предполагается, что плоскость задана уравнением, а исходная точка — координатами.

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

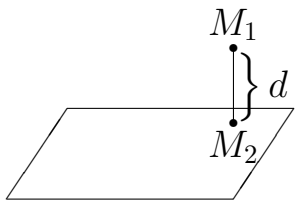
**Решение.** *Что надо найти?* Расстояние.

*В каком виде представим ответ?* Выражением, содержащим координаты точки и коэффициенты уравнения плоскости.

*Введем переменные или найдем искомую величину конструктивно.* Обозначим искомую величину буквой, например, $d$. Кроме того, предполагается, что плоскость задана уравнением, а исходная точка — координатами. Введем обозначения для этих коэффициентов и координат: пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, и $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — исходная точка.

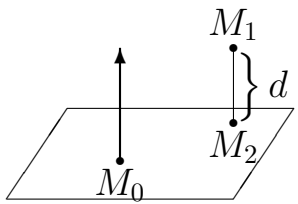
**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** Итак, мы ищем расстояние $d$ от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

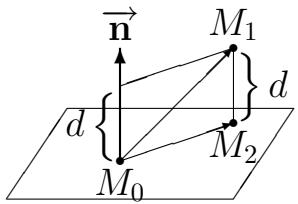


**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** Итак, мы ищем расстояние $d$ от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — произвольная фиксированная точка плоскости, $\overrightarrow{\mathbf{n}}(A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости.



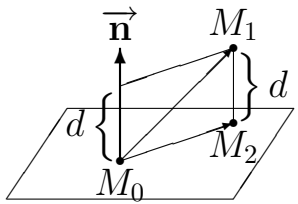
**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*




**Решение.** Итак, мы ищем расстояние $d$ от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — произвольная фиксированная точка плоскости, $\overrightarrow{\mathbf{n}}(A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости.

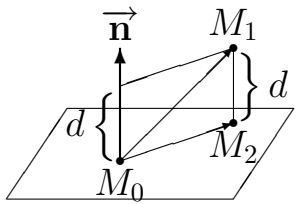
**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** Искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на нормальный вектор плоскости, то есть на вектор $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** Искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на нормальный вектор плоскости, то есть на вектор $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

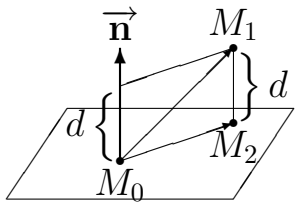



Согласно свойствам скалярного произведения получаем

$$d = \left| \frac{\left(A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{M_0M_1}\right)}{\left|A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|} \right| =$$

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.** Искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на нормальный вектор плоскости, то есть на вектор $\overrightarrow{\mathbf{n}} = A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.




Согласно свойствам скалярного произведения получаем

$$d = \left| \frac{\left(A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{M_0M_1}\right)}{\left|A\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + B\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + C\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|} \right| =$$

$$= \frac{|A\,(x_1 - x_0) + B\,(y_1 - y_0) + C\,(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.**

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $M_0$ принадлежит плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$,

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.**

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $M_0$ принадлежит плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, поэтому $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Следовательно,

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.**

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $M_0$ принадлежит плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, поэтому $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Пример 3.** *Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.*

**Решение.**

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $M_0$ принадлежит плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, поэтому $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кстати, величина $\dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, называемая **отклонением** точки от прямой, оказывается весьма полезной характеристикой.

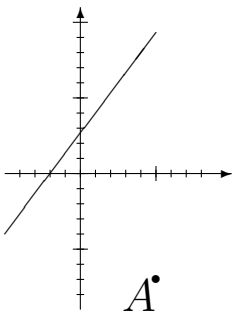
**Вернуться к лекции?**

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$; ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$; ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой* $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$ ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$

**Решение.**

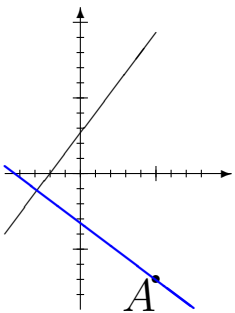
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$;

**Решение.**



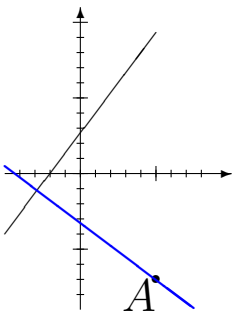
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$;

**Решение.**



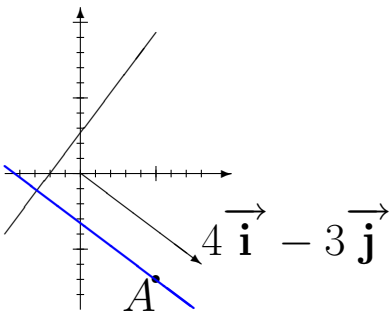
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $\mathbf{4}x + (-\mathbf{3})y + 8 = 0$;

**Решение.**



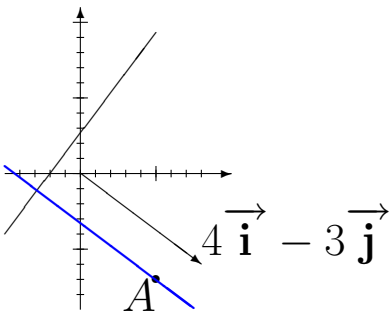
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $\mathbf{4}x + (-\mathbf{3})y + 8 = 0$;

**Решение.**



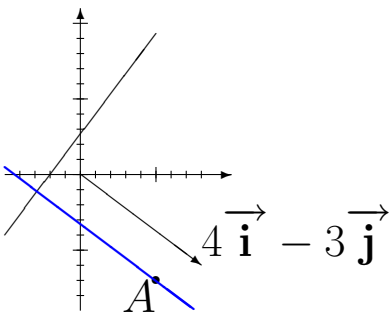
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $\mathbf{4}x + (-\mathbf{3})y + 8 = 0$;

**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(\mathbf{5};\ \mathbf{-7})$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$;

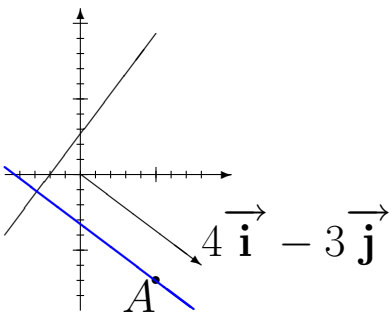
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(\mathbf{5};\ \mathbf{-7})$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$;

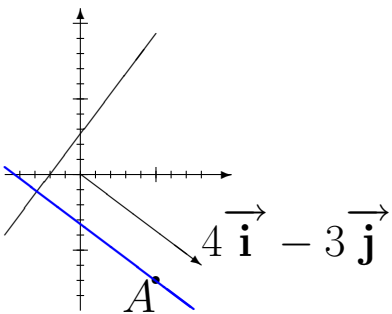
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = \mathbf{5} + \\ y = (\mathbf{-7}) + \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $\mathbf{4}x + (-\mathbf{3})y + 8 = 0$;

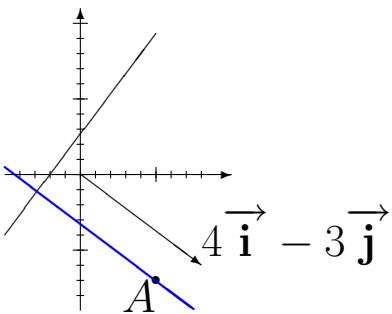
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = 5 + \\ y = -7 + \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $\mathbf{4}x + (-\mathbf{3})y + 8 = 0$;

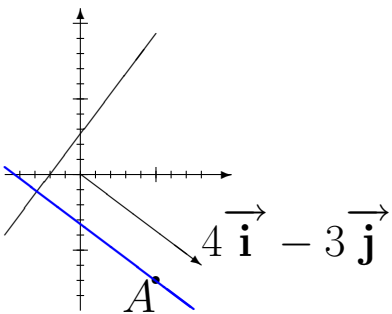
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = 5 + \mathbf{4}t, \\ y = -7 + (-\mathbf{3})t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(5;\ -7)$ *перпендикулярно прямой* $4x - 3y + 8 = 0$;

**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.



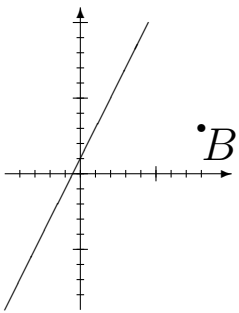

$$\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -7 + (-3)t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

**Решение.**

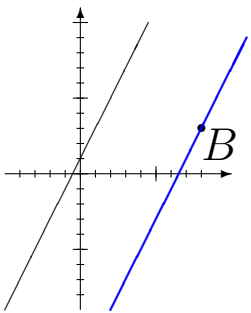
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

**Решение.**



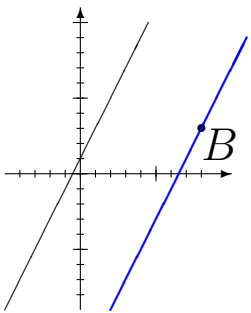
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

**Решение.**



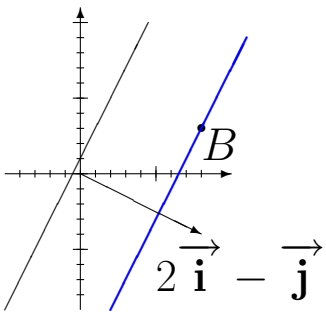
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + 1 = 0$;

**Решение.**



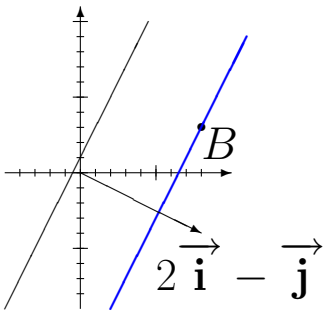
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $\mathbf{2}x + (-\mathbf{1})y + 1 = 0$;

**Решение.**



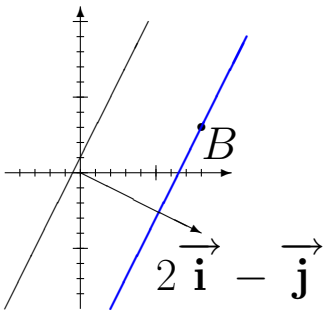
**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + 1 = 0$;

**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(8;\ 3)$ *параллельно прямой* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + 1 = 0$;

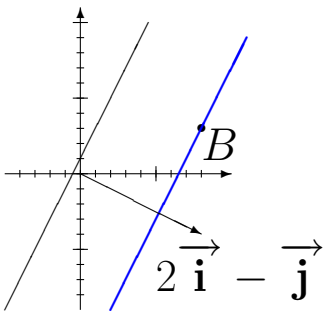
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$2(x - \quad) - (y - \quad) = 0$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(\mathbf{8};\ \mathbf{3})$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

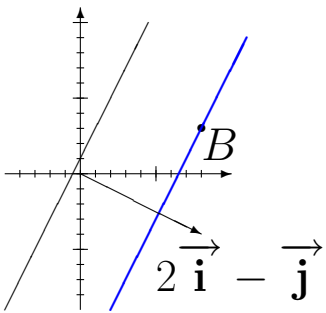
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$2(x - \quad) - (y - \quad) = 0$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(\mathbf{8};\ \mathbf{3})$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

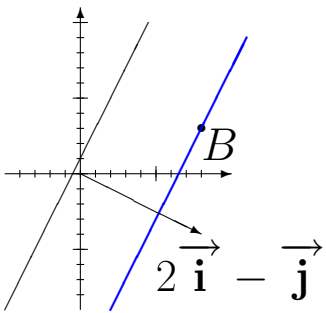
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$2(x-8) - (y-3) = 0 \ \Rightarrow$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(\mathbf{8};\ \mathbf{3})$ *параллельно прямой* $2x - y + 1 = 0$;

**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$2(x-8) - (y-3) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - y - 13 = 0.$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

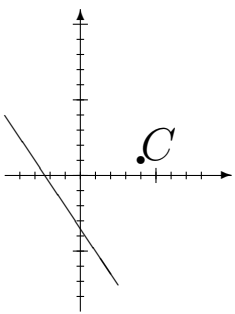
$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$$

**Решение.**

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$$

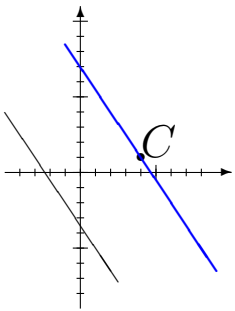
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$$

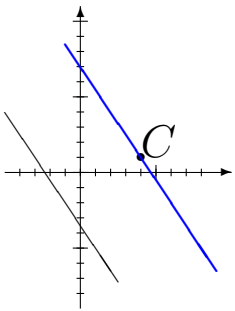
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = -8 + \mathbf{3}t; \end{cases}$$

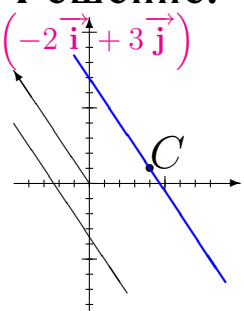
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = -8 + \mathbf{3}t; \end{cases}$$

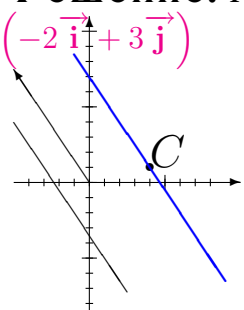
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = -8 + \mathbf{3}t; \end{cases}$$

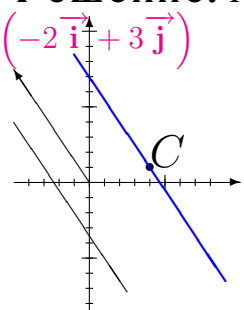
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = -8 + \mathbf{3}t; \end{cases}$$

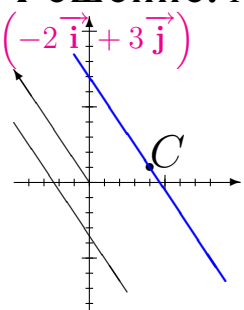
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = \quad + (-\mathbf{2})t, \\ y = \quad + \mathbf{3}t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой* $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$

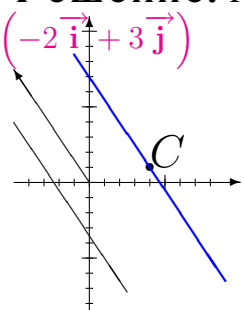
**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = \quad -2t, \\ y = \quad +3t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(\mathbf{4};\ \mathbf{1})$ *параллельно прямой* $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$

**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.

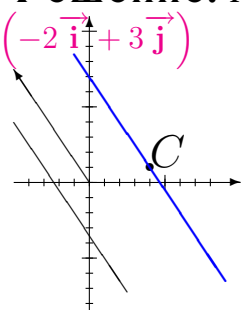



$$\begin{cases} x = \mathbf{4} - 2t, \\ y = \mathbf{1} + 3t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *через точку* $C(4;\ 1)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -8 + 3t; \end{cases}$$

**Решение.** Мы знаем *направляющий вектор* искомой прямой.




$$\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 1 + 3t; \end{cases}$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

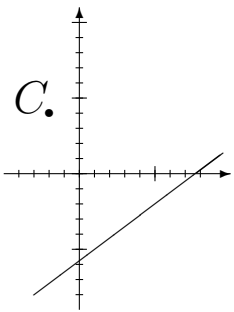
**Решение.**

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

**Решение.**

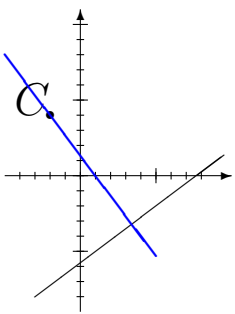
$C$.



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

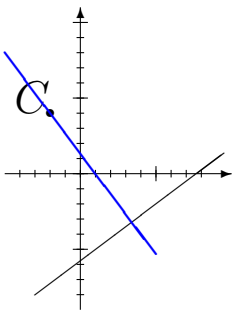
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t. \end{cases}$$

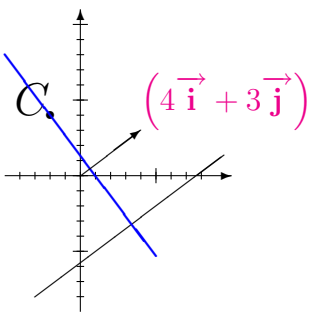
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t. \end{cases}$$

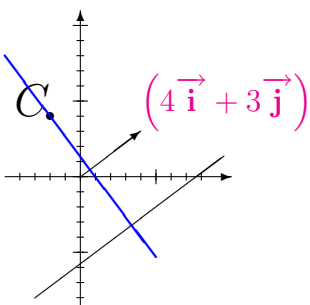
**Решение.**



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t. \end{cases}$$

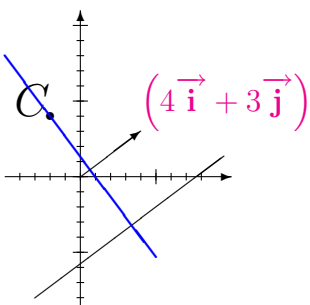
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.



**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t. \end{cases}$$

**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.

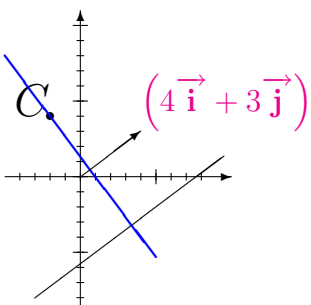



$$\mathbf{4}(x - \qquad) + \mathbf{3}(y - \quad) = 0$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-\mathbf{2};\ \mathbf{4})$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.

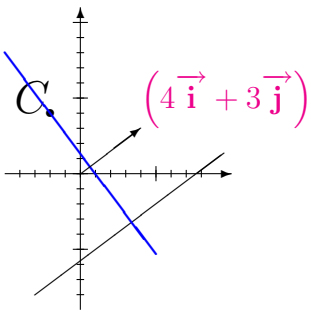



$$4(x - \qquad) + 3(y - \quad) = 0$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-\mathbf{2};\ \mathbf{4})$ *перпендикулярно прямой*

$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

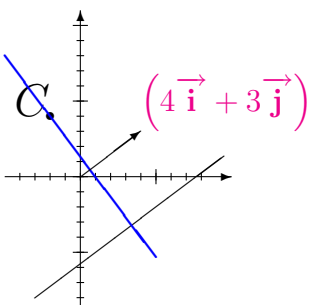
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$4(x - (-\mathbf{2})) + 3(y - \mathbf{4}) = 0$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*
$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

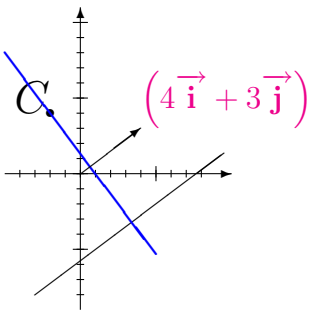
**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$4(x - (-2)) + 3(y - 4) = 0 \ \Rightarrow$$

**Пример 4.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***г)*** *через точку* $D(-2;\ 4)$ *перпендикулярно прямой*
$$\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t. \end{cases}$$

**Решение.** Мы знаем *вектор, нормальный* к искомой прямой.




$$4(x - (-2)) + 3(y - 4) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4x + 3y - 4 = 0.$$

**Вернуться к лекции?**

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

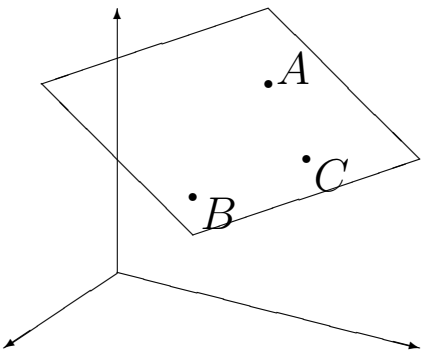
***в)*** *через точку* $S(-1;\ 3;\ -3)$ *параллельно плоскости* $3x + 4y + 2z - 3 = 0$;

***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.**

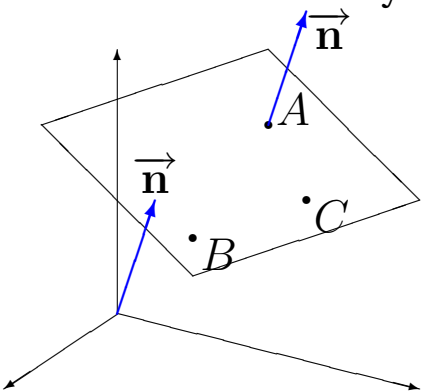
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



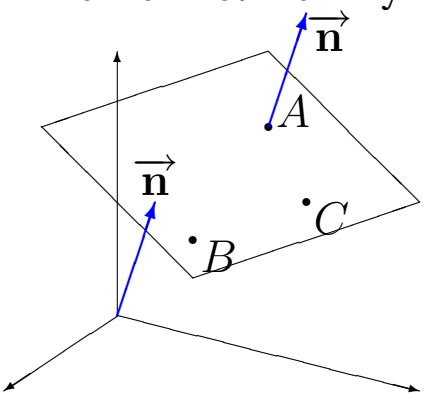
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

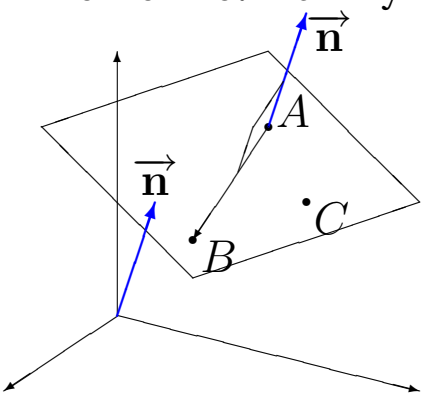
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{2};\ \mathbf{-2})$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

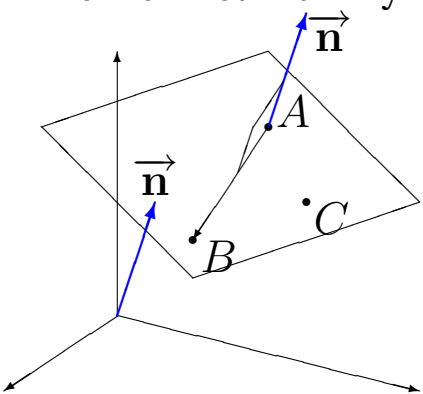



Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$\overrightarrow{AB} =$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{2};\ \mathbf{-2})$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

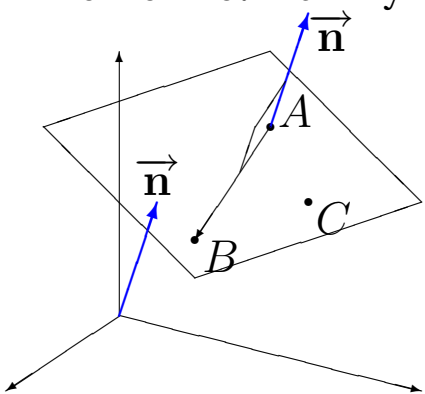



Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{2};\ \mathbf{-2})$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

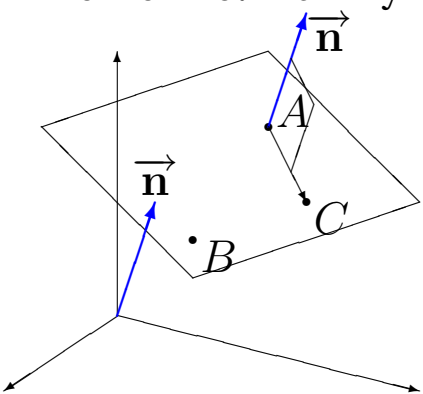



Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(\mathbf{0};\ \mathbf{3};\ \mathbf{-1})$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



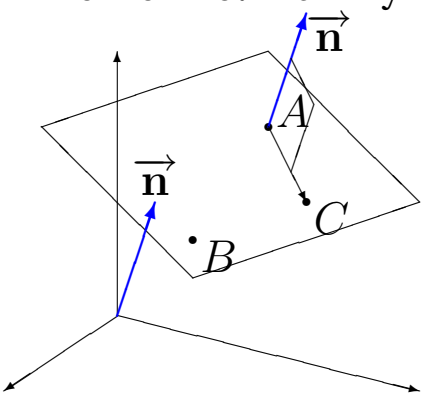

Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$\overrightarrow{AC} =$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(\mathbf{0};\ \mathbf{3};\ \mathbf{-1})$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



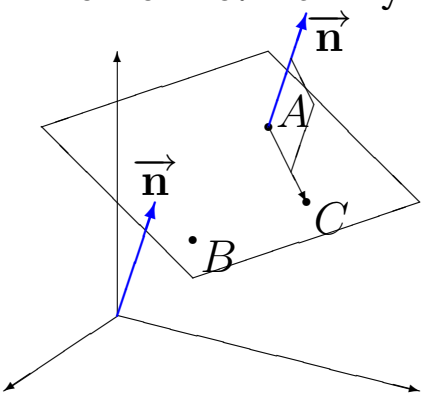

Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:*
***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(\mathbf{0};\ \mathbf{3};\ \mathbf{-1})$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

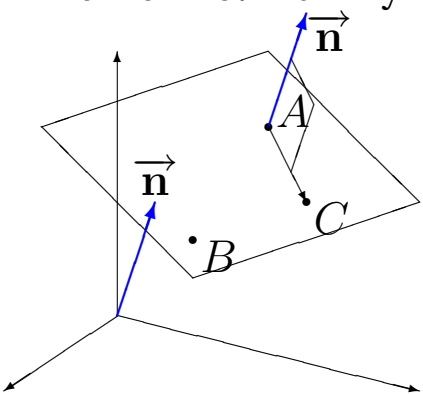



Достаточно найти два неколлинеарных направляющих вектора плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

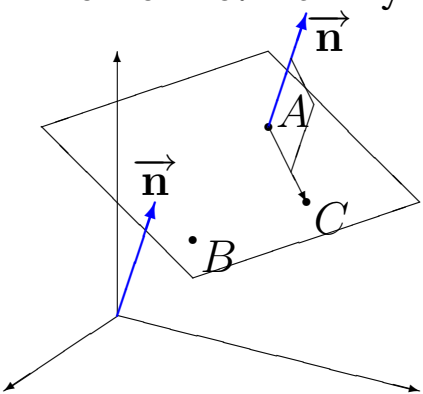



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



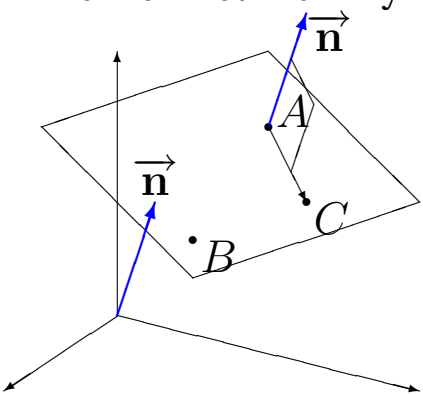

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

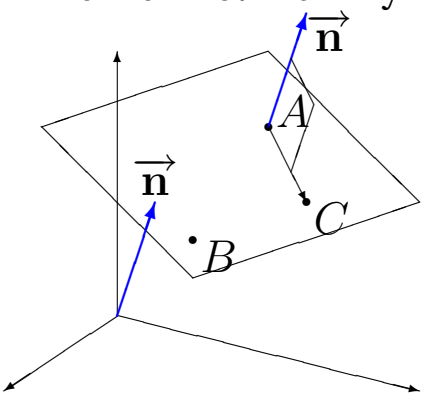
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 10\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и **нормальный вектор плоскости**.

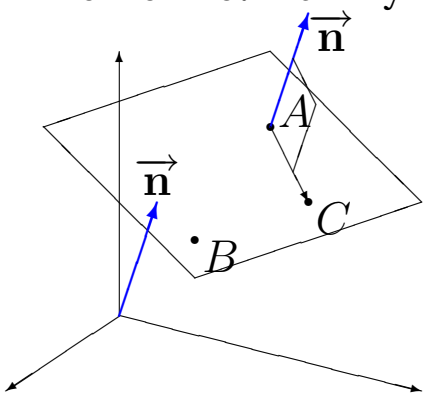



$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (-\mathbf{4})\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{10}\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и **нормальный вектор плоскости**.



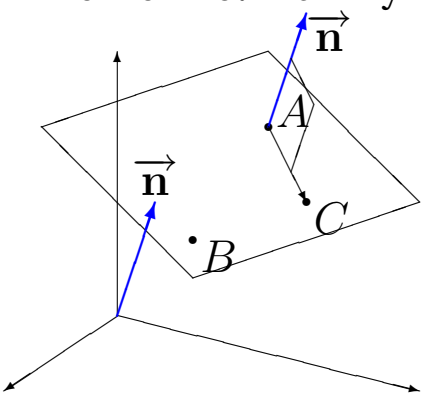

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\mathbf{-4})\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{10}\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\mathbf{2}(x - \quad) + (\mathbf{-4})(y - \qquad) + \mathbf{10}(z - \qquad) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



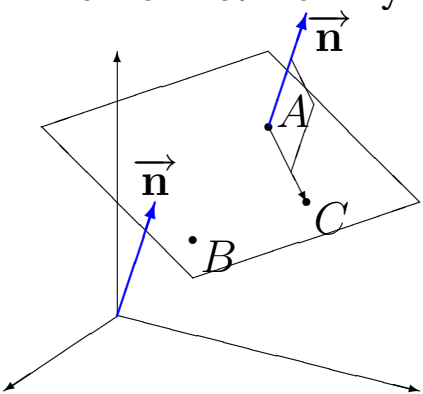

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 10\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$2(x - \quad) - 4(y - \qquad) + 10(z - \qquad) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



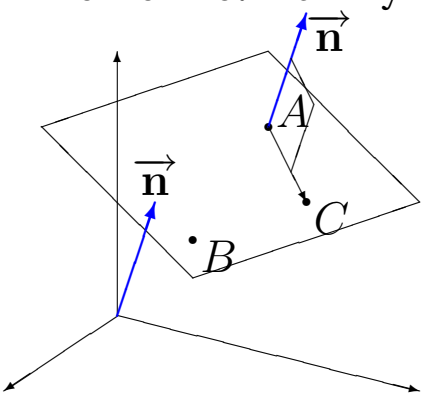

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 10\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$2(x - \mathbf{2}) - 4(y - (\mathbf{-1})) + 10(z - (\mathbf{-3})) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***а)*** *через точки* $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(0;\ 3;\ -1)$;

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

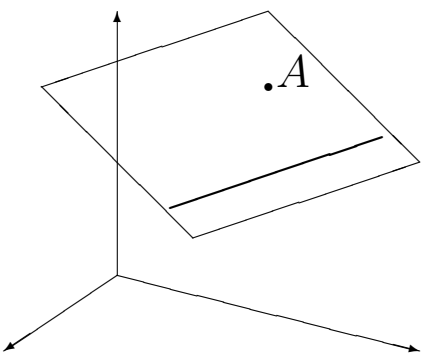
$$= 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 10\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$2(x-2) - 4(y-(-1)) + 10(z-(-3)) = 0,$$

$$x - 2y + 5z + 11 = 0.$$

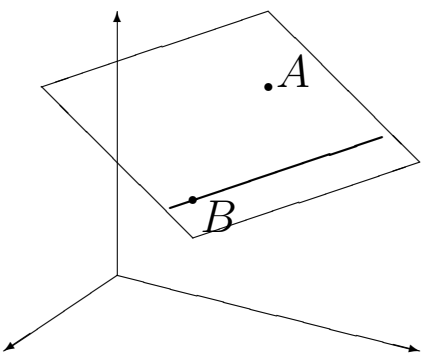
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



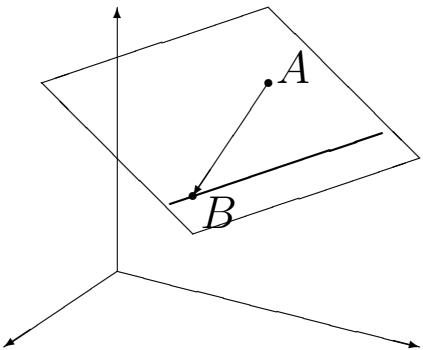
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{3} - 6t, \\ y = \mathbf{2} + 2t, \\ z = \mathbf{-2} + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$ *и прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{3} - 6t, \\ y = \mathbf{2} + 2t, \\ z = \mathbf{-2} + 2t; \end{cases}$

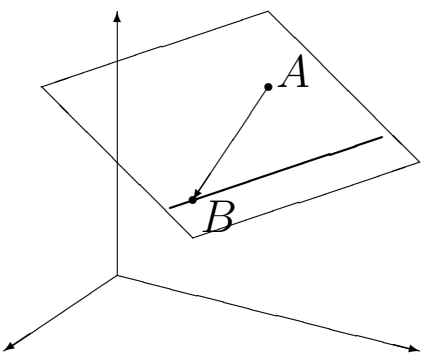
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$ *и прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{3} - 6t, \\ y = \mathbf{2} + 2t, \\ z = \mathbf{-2} + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

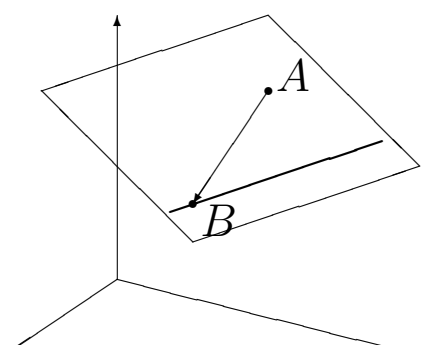
$\overrightarrow{AB} =$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$ *и прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{3} - 6t, \\ y = \mathbf{2} + 2t, \\ z = \mathbf{-2} + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

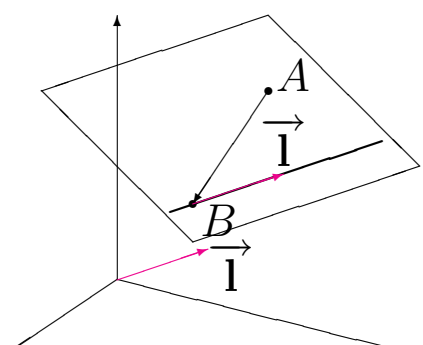
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{6})t, \\ y = 2 + \mathbf{2}t, \\ z = -2 + \mathbf{2}t; \end{cases}$

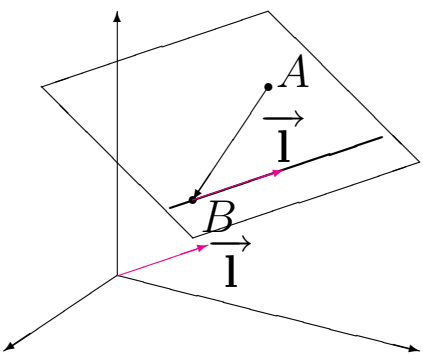
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{6})t, \\ y = 2 + \mathbf{2}t, \\ z = -2 + \mathbf{2}t; \end{cases}$

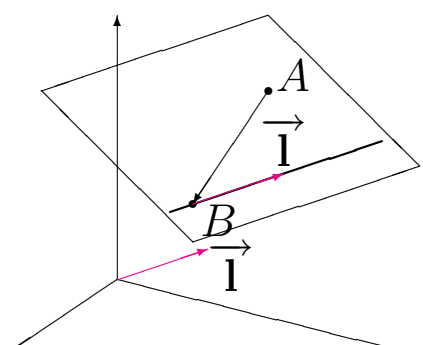
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$
$$\overrightarrow{\mathbf{l}} = (-6)\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{6})t, \\ y = 2 + \mathbf{2}t, \\ z = -2 + \mathbf{2}t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



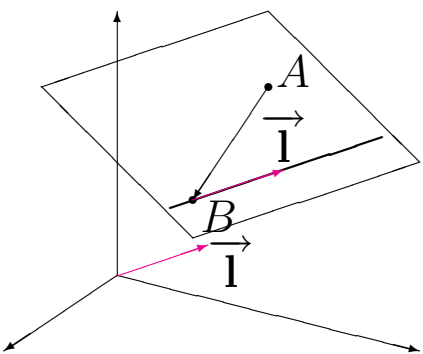

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{l}} = (-6)\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{\mathbf{l}}\right] =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{6})t, \\ y = 2 + \mathbf{2}t, \\ z = -2 + \mathbf{2}t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



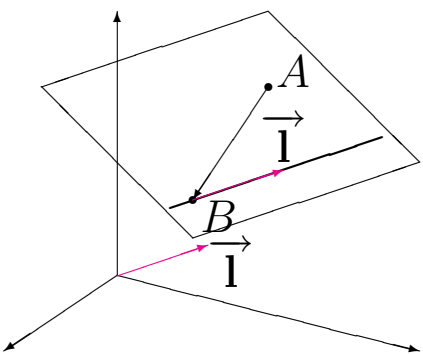

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{l}} = (-6)\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{6})t, \\ y = 2 + \mathbf{2}t, \\ z = -2 + \mathbf{2}t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

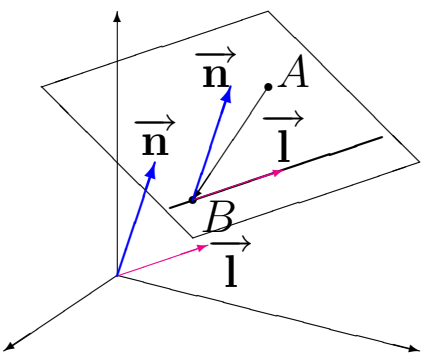
$$\overrightarrow{\mathbf{l}} = (-6)\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\overrightarrow{\mathbf{i}} - 8\overrightarrow{\mathbf{j}} + 20\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



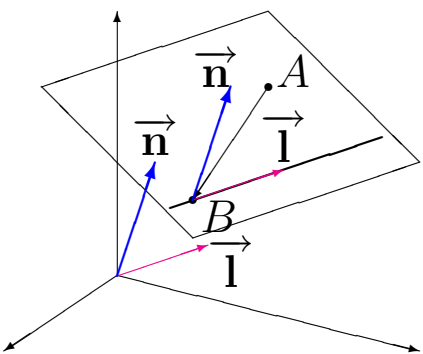

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{4}\,\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{-8})\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{20}\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{4}(x - \quad) + (\mathbf{-8})(y - \qquad) + \mathbf{20}(z - \qquad) = 0$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



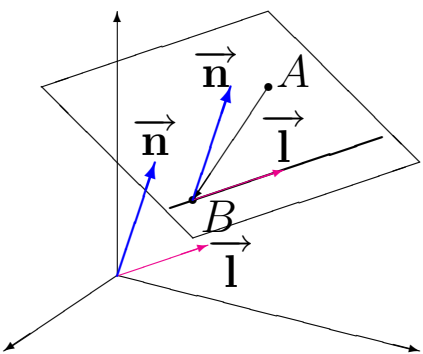

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,\vec{\mathbf{i}} - 8\,\vec{\mathbf{j}} + 20\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$4(x - \quad) - 8(y - \qquad) + 20(z - \qquad) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{-3})$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



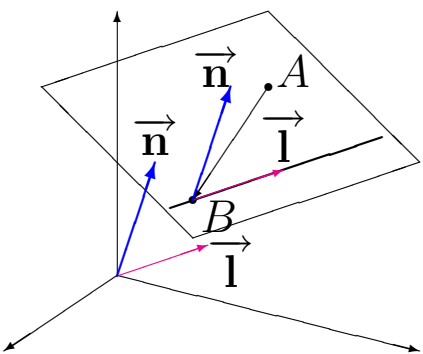

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,\vec{\mathbf{i}} - 8\,\vec{\mathbf{j}} + 20\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$4(x - \mathbf{2}) - 8(y - (\mathbf{-1})) + 20(z - (\mathbf{-3})) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $A(2;\ -1;\ -3)$ *и прямую* $\begin{cases} x = 3 - 6t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\left[\overrightarrow{AB},\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

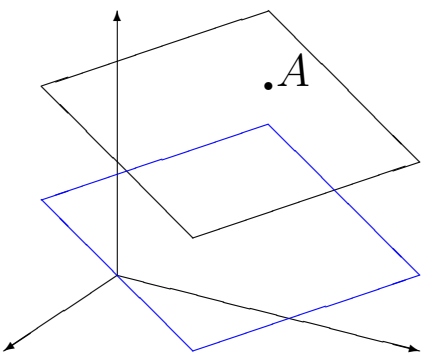
$$= 4\,\vec{\mathbf{i}} - 8\,\vec{\mathbf{j}} + 20\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$4(x-2) - 8(y-(-1)) + 20(z-(-3)) = 0,$$

$$x - 2y + 5z + 11 = 0.$$

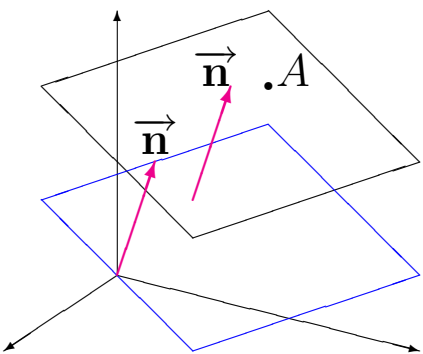
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***в)*** *через точку* $S(-1;\ 3;\ -3)$ *параллельно плоскости* $3x + 4y + 2z - 3 = 0$*;*

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***в)*** *через точку* $S(-1;\ 3;\ -3)$ *параллельно плоскости* $\mathbf{3}x + \mathbf{4}y + \mathbf{2}z - 3 = 0$*;*

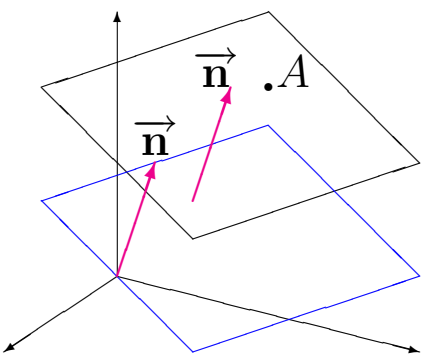
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***в)*** *через точку* $S(-1;\ 3;\ -3)$ *параллельно плоскости* $\mathbf{3}x + \mathbf{4}y + \mathbf{2}z - 3 = 0$*;*

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

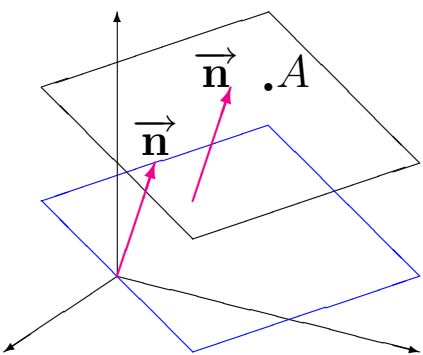
$$\mathbf{3}(x - \qquad) + \mathbf{4}(y - \quad) + \mathbf{2}(z - \qquad) = 0$$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***в)*** *через точку* $S(-\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ -\mathbf{3})$ *параллельно плоскости* $3x + 4y + 2z - 3 = 0$*;*

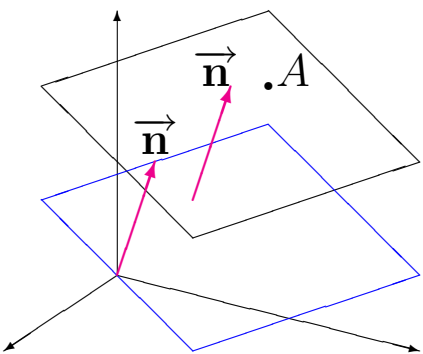
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

$$3(x - (-\mathbf{1})) + 4(y - \mathbf{3}) + 2(z - (-\mathbf{3})) = 0$$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***в)*** *через точку* $S(-1;\ 3;\ -3)$ *параллельно плоскости* $3x + 4y + 2z - 3 = 0$*;*

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

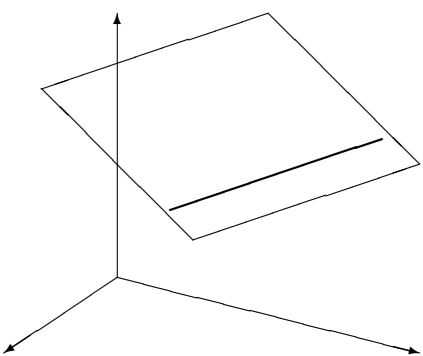



$$3(x - (-1)) + 4(y - 3) + 2(z - (-3)) = 0$$

$$3x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

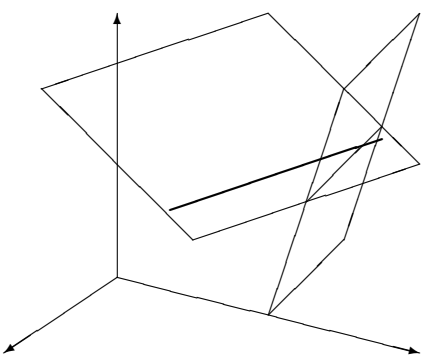
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



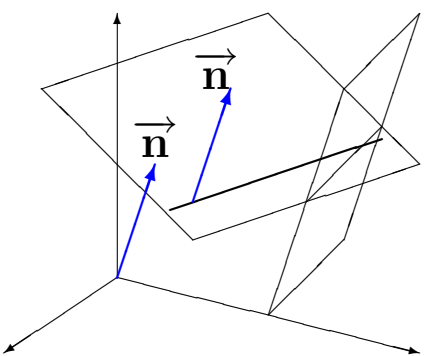
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



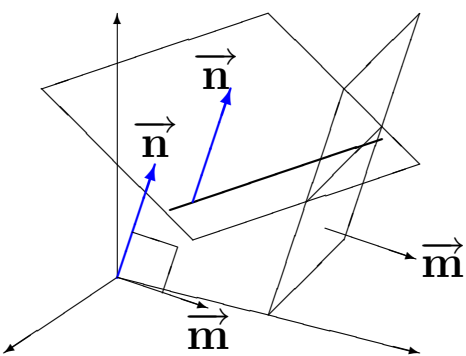
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



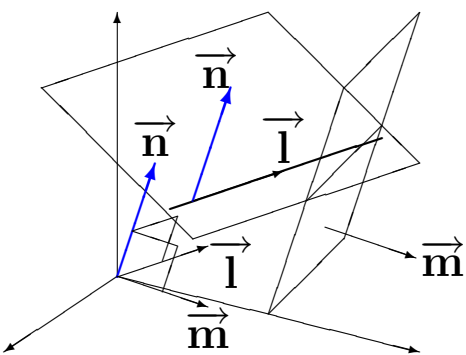
**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

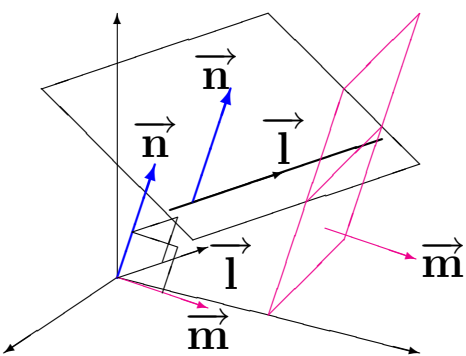
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $\mathbf{1}x + (-\mathbf{3})y + \mathbf{0}z + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

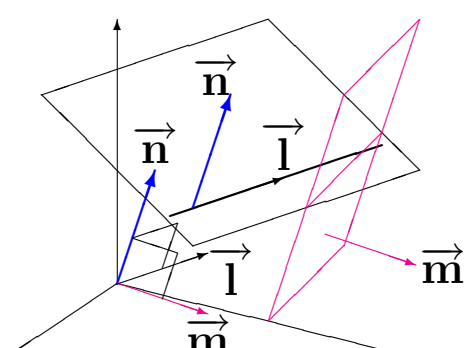
$\overrightarrow{\mathbf{m}} =$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $\mathbf{1}x + (-\mathbf{3})y + \mathbf{0}z + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

$$\overrightarrow{\mathbf{m}} = \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (-\mathbf{3})\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{0}\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

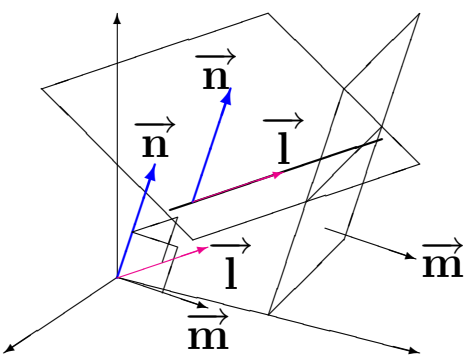


**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t, \\ z = 2 + (\mathbf{-2})t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

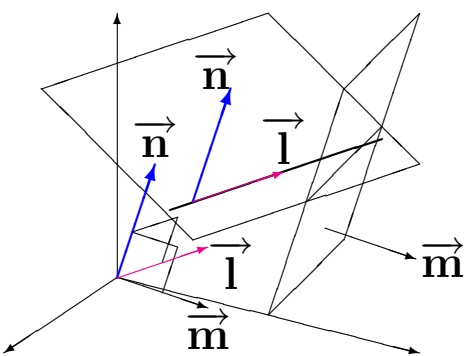
$\overrightarrow{\mathbf{m}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{l}} =$



**Пример 5.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений плоскости***, *найдите уравнения* ***плоскостей***, *проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = \mathbf{4}t + 1, \\ y = -5 + \mathbf{3}t, \\ z = 2 + (\mathbf{-2})t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

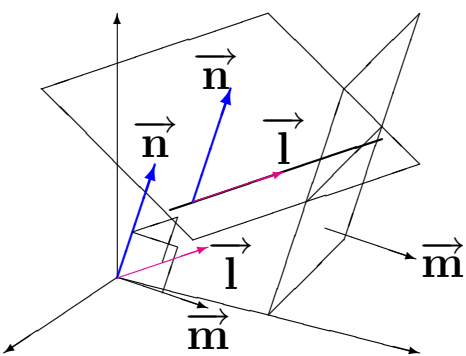
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{i}} - 3\,\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{l}} = \mathbf{4}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{3}\,\vec{\mathbf{j}} + (\mathbf{-2})\,\vec{\mathbf{k}},$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

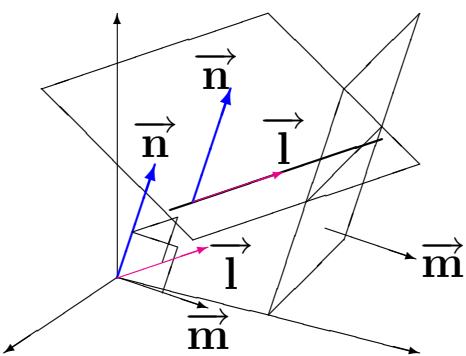



$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{i}} - 3\,\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{l}} = 4\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}} - 2\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

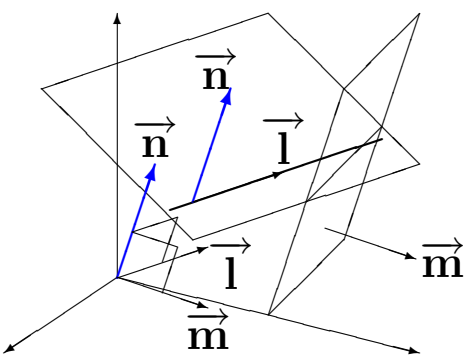
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{i}} - 3\,\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{l}} = 4\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}} - 2\,\vec{\mathbf{k}},$$
$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

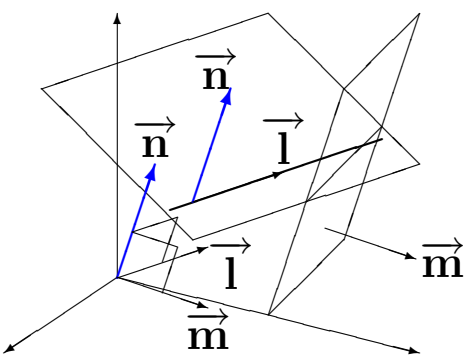
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{l}} = 4\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}},$$
$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 15\vec{\mathbf{k}},$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

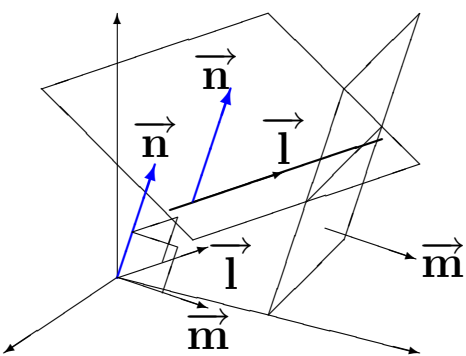
**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{6}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{2}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{15}\,\vec{\mathbf{k}},$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

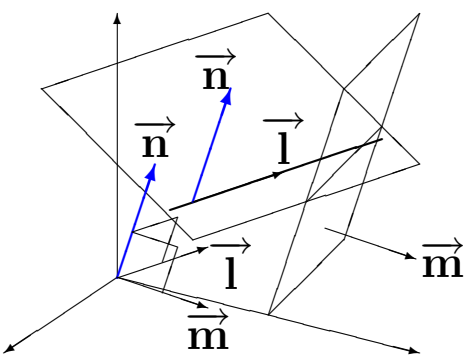



$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{6}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{2}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{15}\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{6}(x - \quad) + \mathbf{2}(y - \qquad) + \mathbf{15}(z - \quad) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + \mathbf{1}, \\ y = \mathbf{-5} + 3t, \\ z = \mathbf{2} - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

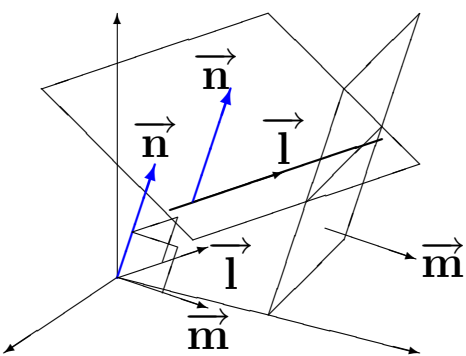



$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6\,\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}} + 15\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$6(x - \quad) + 2(y - \qquad) + 15(z - \quad) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + \mathbf{1}, \\ y = \mathbf{-5} + 3t, \\ z = \mathbf{2} - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.

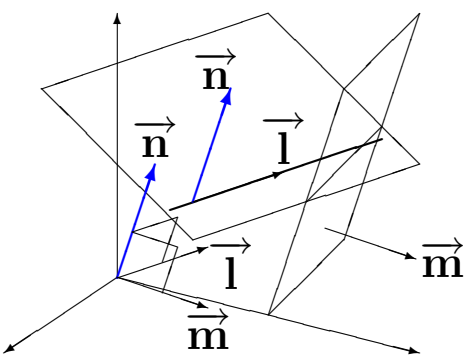



$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6\,\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}} + 15\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$6(x - \mathbf{1}) + 2(y - (\mathbf{-5})) + 15(z - \mathbf{2}) = 0,$$

**Пример 5.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений плоскости****, найдите уравнения* ***плоскостей****, проходящих:* ***г)*** *через прямую* $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *перпендикулярно плоскости* $x - 3y + 4 = 0$.

**Решение.** Нам нужны точка и нормальный вектор плоскости.




$$\left[\vec{\mathbf{m}};\ \vec{\mathbf{l}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6\,\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}} + 15\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$6(x-1) + 2(y-(-5)) + 15(z-2) = 0,$$

$$6x + 2y + 15z - 26 = 0.$$

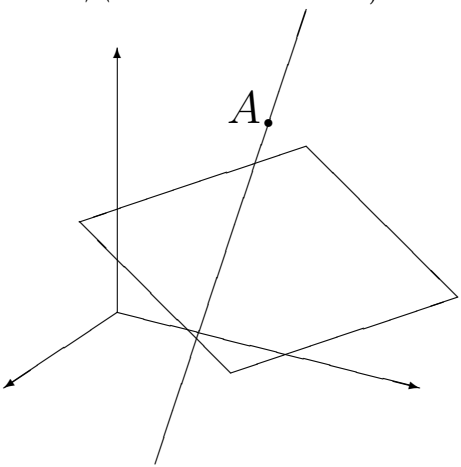
**Вернуться к лекции?**

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$; ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой* $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$ ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.**

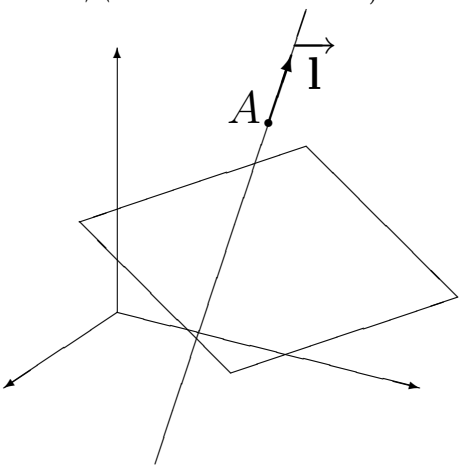
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$;

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



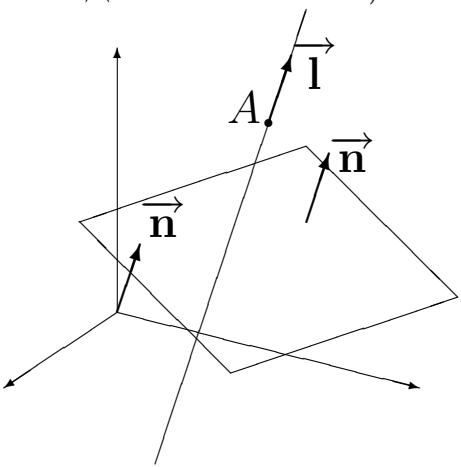
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$*;*

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



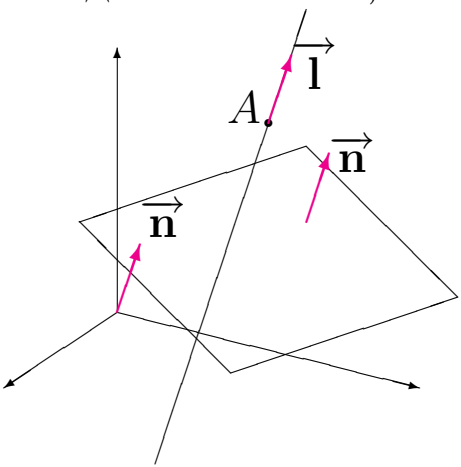
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$;

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



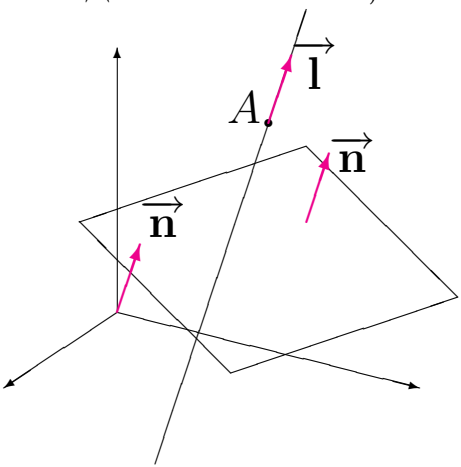
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $\mathbf{4}x + (\mathbf{-3})y + (\mathbf{-1})z + 8 = 0$;

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $\mathbf{4}x + (\mathbf{-3})y + (\mathbf{-1})z + 8 = 0$;

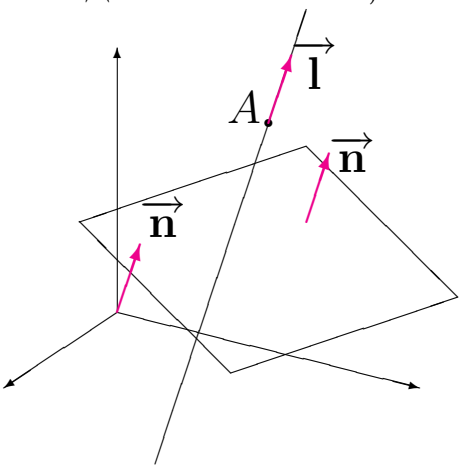
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} x = _ + \mathbf{4}t, \\ y = ___ + (\mathbf{-3})t, \\ z = _ + (\mathbf{-1})t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$;

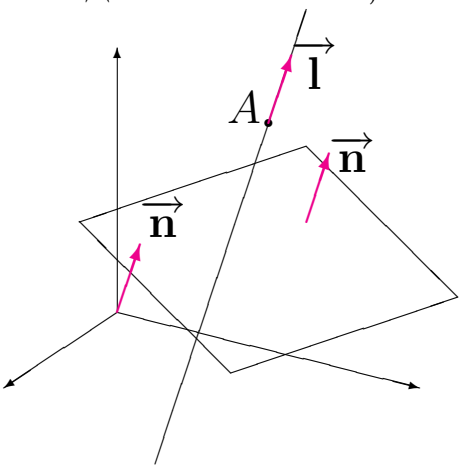
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} x = _ + 4t, \\ y = ___ - 3t, \\ z = _ - t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$;

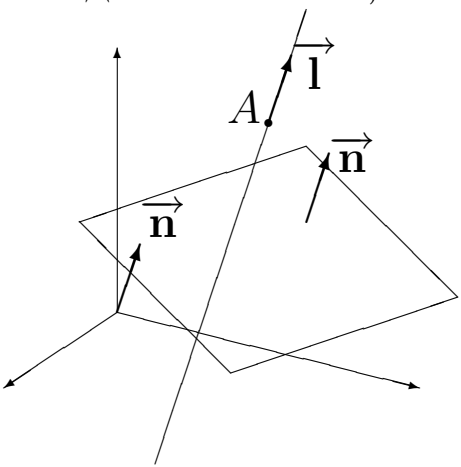
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} x = \mathbf{2} + 4t, \\ y = \mathbf{-4} - 3t, \\ z = \mathbf{3} - t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***а)*** *через точку* $A(2;\ -4;\ 3)$ *перпендикулярно к плоскости* $4x - 3y - z + 8 = 0$;

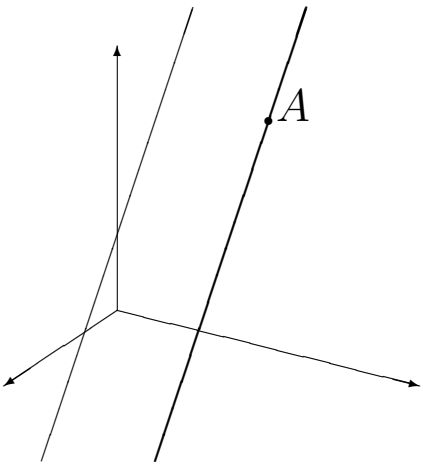
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -4 - 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

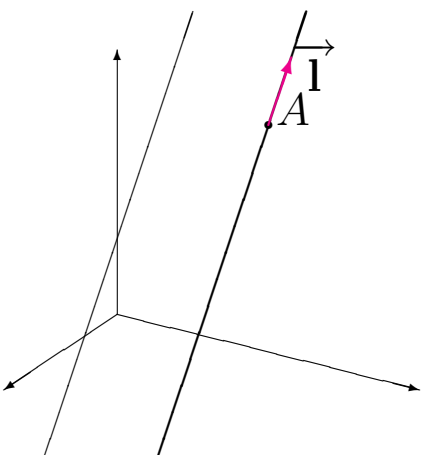
$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$




**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

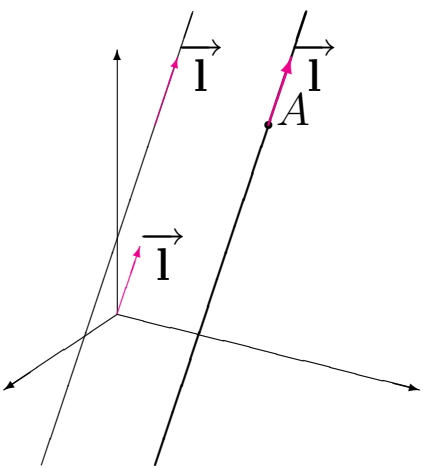
$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$




**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

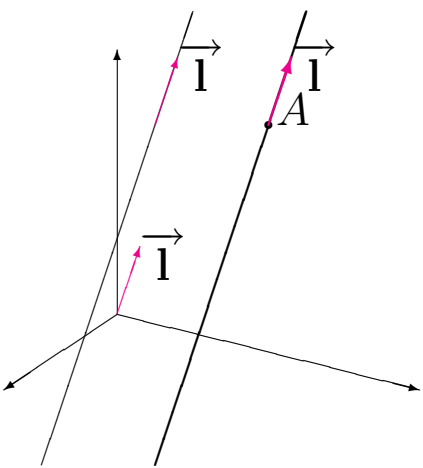
$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$




**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = 2 + \mathbf{1}t, \\ z = 4 + \mathbf{5}t; \end{cases}$$

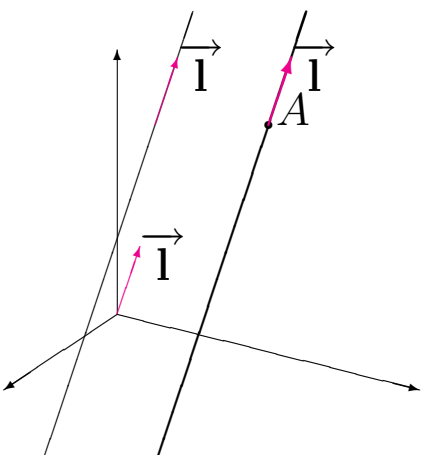



**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

$$\begin{cases} x = _ + \underline{\quad\quad}t, \\ y = _ + _t, \\ z = \underline{\quad} + _t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 + (-\mathbf{2})t, \\ y = 2 + \mathbf{1}t, \\ z = 4 + \mathbf{5}t; \end{cases}$$

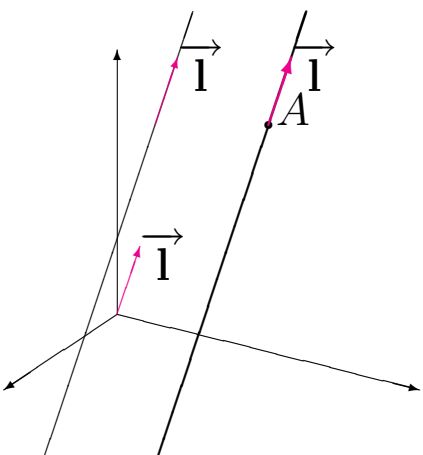



**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

$$\begin{cases} x = _ + (-\mathbf{2})t, \\ y = _ + \mathbf{1}t, \\ z = ___ + \mathbf{5}t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ \mathbf{-2})$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$

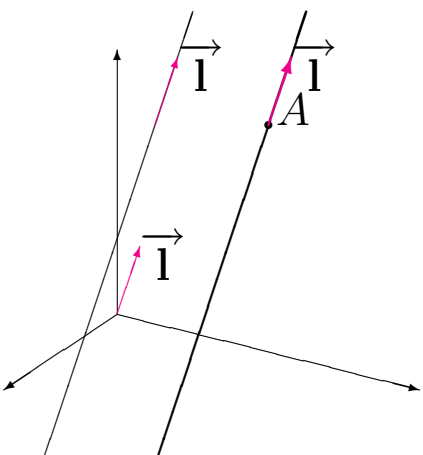



**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

$$\begin{cases} x = _ - 2t, \\ y = _ + t, \\ z = ___ + 5t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ \mathbf{-2})$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$

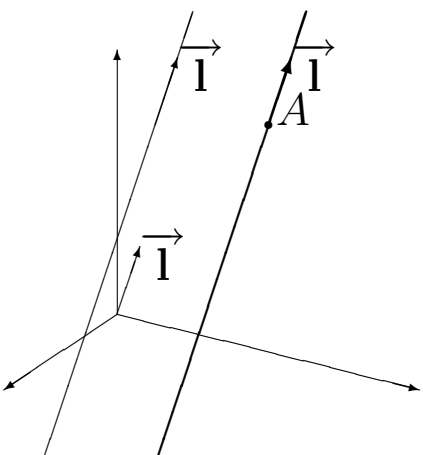



**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

$$\begin{cases} x = \mathbf{1} - 2t, \\ y = \mathbf{3} + t, \\ z = \mathbf{-2} + 5t. \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***б)*** *через точку* $B(1;\ 3;\ -2)$ *параллельно прямой*

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 5t; \end{cases}$$

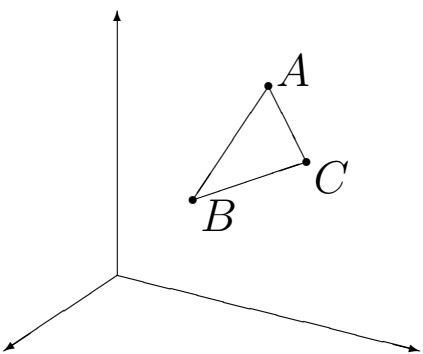



**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = -2 + 5t. \end{cases}$$

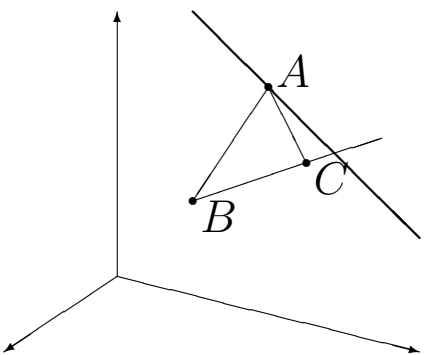
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



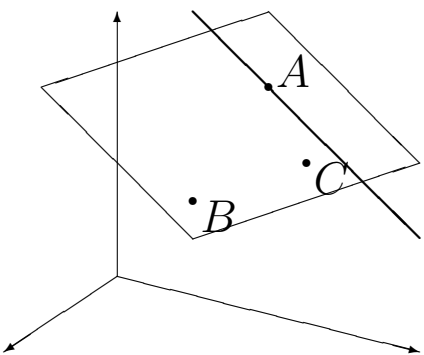
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



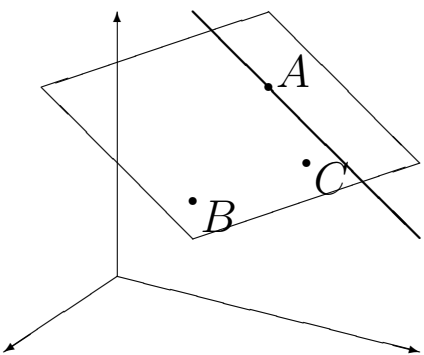
**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

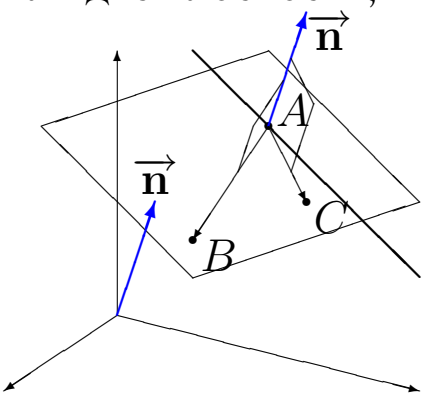
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

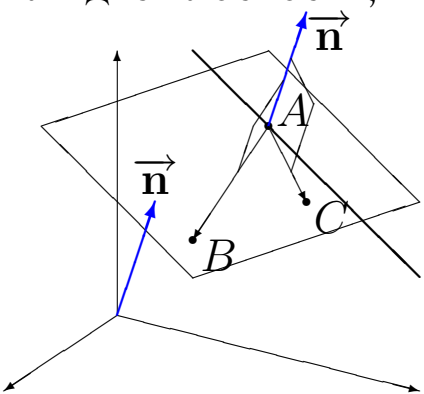



Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$\overrightarrow{AB} =$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

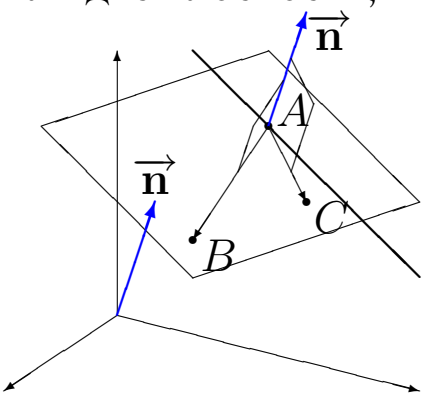



Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$,

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



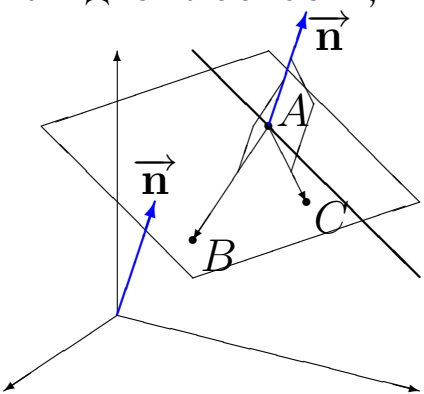

Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$\overrightarrow{AC} =$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



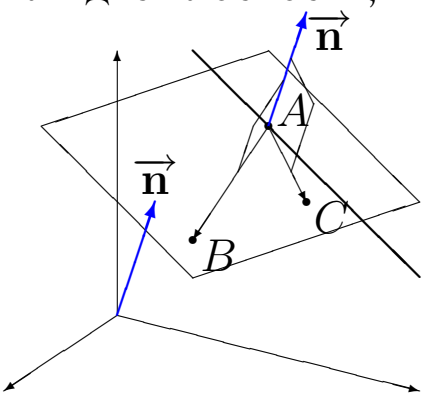

Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

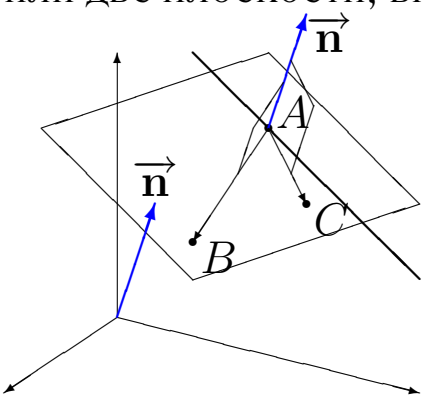
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] =$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

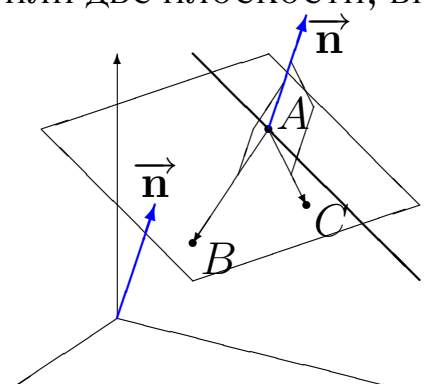
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

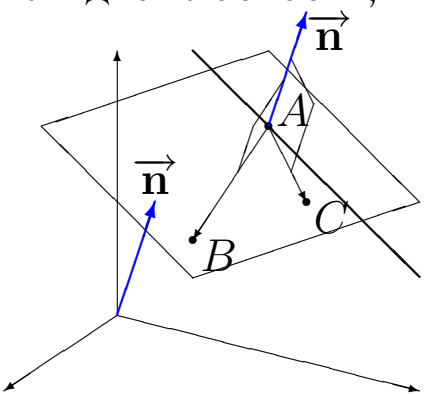
$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



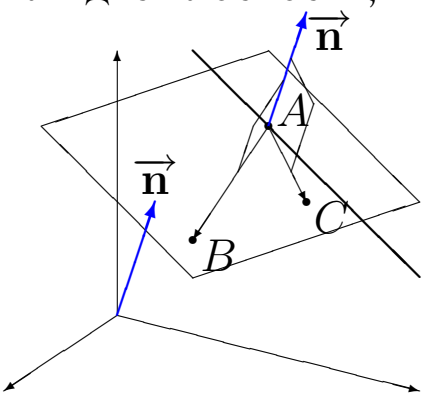

Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = -8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-8(x - \quad) + 2(y - \qquad) + 2(z - \quad) = 0,$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



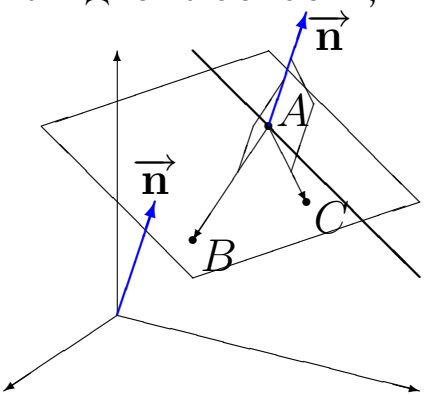

Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = -8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-8(x - \quad) + 2(y - \qquad) + 2(z - \quad) = 0,$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



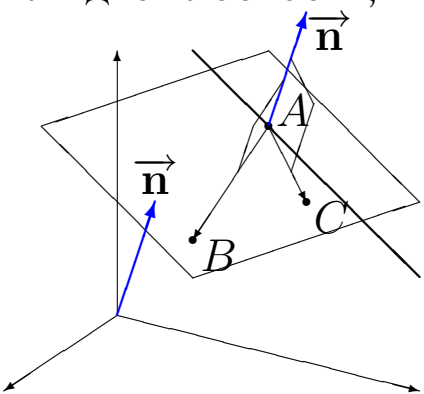

Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = -8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-8(x - \mathbf{2}) + 2(y - (\mathbf{-4})) + 2(z - \mathbf{3}) = 0,$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




Плоскость треугольника $ABC$ найдем так же, как при **решении примера 5**:

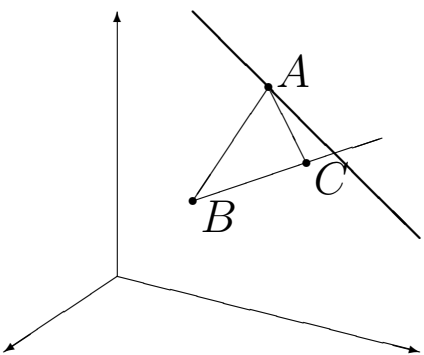
$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = -8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-8(x-2) + 2(y-(-4)) + 2(z-3) = 0,$$

$$4x - y - z + 9 = 0.$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу****, и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости****, найдите уравнения* ***прямых****, проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$*, если* $A(\mathbf{2};\ \mathbf{-4};\ \mathbf{3})$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

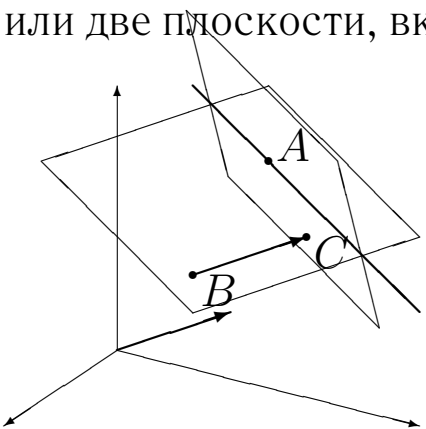



$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \end{cases}$$

В качестве второй плоскости возьмем плоскость,

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(2;\ -2;\ 1)$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

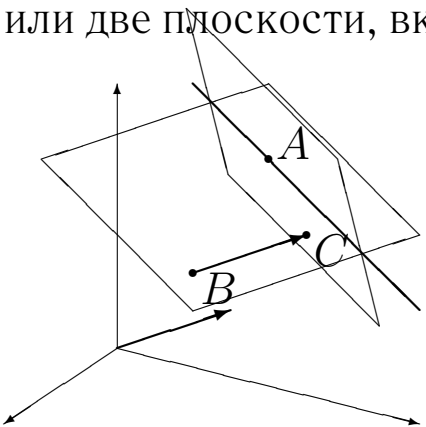



$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \end{cases}$$

В качестве второй плоскости возьмем плоскость,
проходящую через $A$ перпендикулярно $BC$.

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.

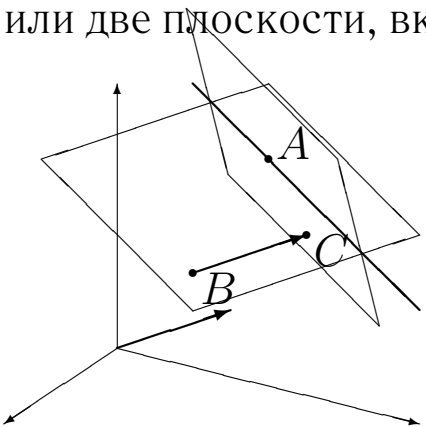



$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BC} =$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

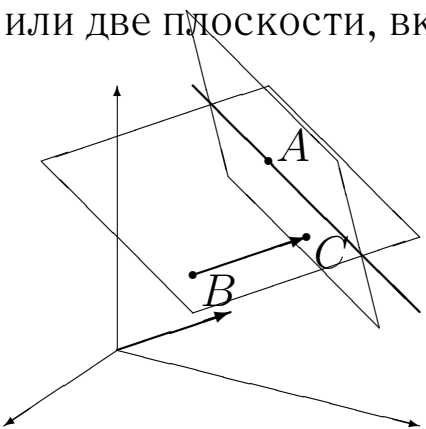
**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}}, \end{cases}$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.



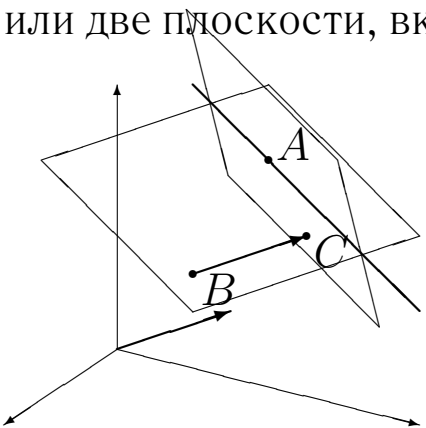

$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-(x-2) - (y+4) - 3(z-3) = 0,$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ \end{cases}$$

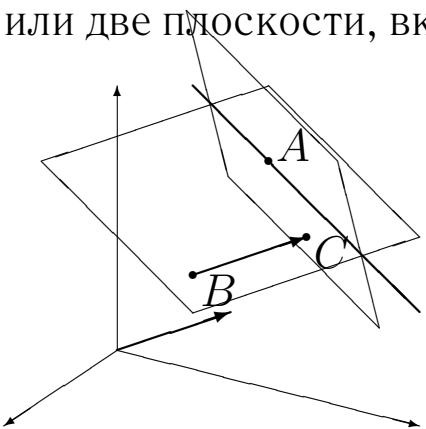
$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-(x-2) - (y+4) - 3(z-3) = 0,$$

$$x + y + 3z - 7 = 0.$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ x + y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$$

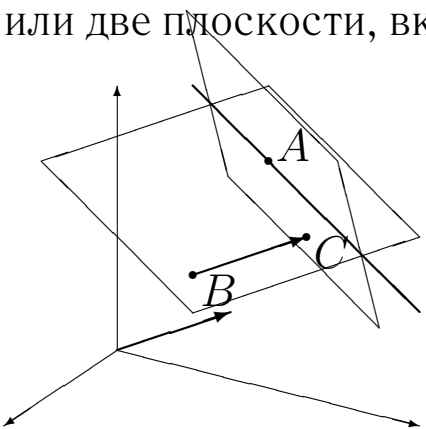
$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$-(x-2) - (y+4) - 3(z-3) = 0,$$

$$x + y + 3z - 7 = 0.$$

**Пример 6.** *Используя* ***таблицу***, *и* ***список типовых уравнений прямой на плоскости***, *найдите уравнения* ***прямых***, *проходящих:* ***в)*** *уравнения высоты* $AH$ *треугольника* $ABC$, *если* $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(\mathbf{3};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{4})$, $C(\mathbf{2};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{1})$.

**Решение.** Нам нужен *направляющий вектор* искомой прямой или две плоскости, включающие в себя искомую прямую.




$$\begin{cases} 4x - y - z + 9 = 0, \\ x + y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$$

**Вернуться к лекции?**

**Пример 7.** *Найти* *а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.**

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.**

а) $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t \end{cases} \Rightarrow$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.**

а) $\left.\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t \end{cases}\right| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.**

а) $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t \end{cases} \left| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \; 5x + 2y = 5(4 - 2t) + 2(3 + 5t) \; \Rightarrow$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.**

а) $\left.\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t \end{cases}\right| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow 5x + 2y = 5(4 - 2t) + 2(3 + 5t) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x + 2y - 26 = 0.$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.** б) Очевидно, что вектор $q\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - p\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ортогонален вектору $p\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + q\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.** б) Очевидно, что вектор $q\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - p\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ортогонален вектору $p\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + q\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

По отношению к прямой $3x - 2y + 1 = 0$ вектор $3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ расположен нормально.

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.** б) Очевидно, что вектор $q\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - p\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ортогонален вектору $p\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + q\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

По отношению к прямой $3x - 2y + 1 = 0$ вектор $3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ расположен нормально.

Значит, вектор $2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ можно взять в качестве **направляющего**.

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.** б) Очевидно, что вектор $q\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - p\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ортогонален вектору $p\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + q\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

По отношению к прямой $3x - 2y + 1 = 0$ вектор $3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ расположен нормально.

Значит, вектор $2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ можно взять в качестве **направляющего**.

Координаты точки можно найти, подобрав решение уравнения $3x - 2y + 1 = 0$, например, $(x; y) = (1; 2)$.

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Решение.** б) Очевидно, что вектор $q\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - p\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ортогонален вектору $p\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + q\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

По отношению к прямой $3x - 2y + 1 = 0$ вектор $3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ расположен нормально.

Значит, вектор $2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ можно взять в качестве **направляющего**.

Координаты точки можно найти, подобрав решение уравнения $3x - 2y + 1 = 0$, например, $(x; y) = (1; 2)$. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $3x - 2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y =$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $3x - 2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $3x - 2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $3x - 2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Смущает первое равенство? Пожалуйста, исправим:

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $3x - 2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Смущает первое равенство? Пожалуйста, исправим:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

**Пример 7.** *Найти а) общее уравнение прямой* $\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 3 + 5t; \end{cases}$ *б) канонические и параметрические уравнения прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

**Другое решение.** б) $\Rightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \dfrac{x}{1} = \dfrac{y - \dfrac{1}{2}}{3/2}.$

**Вернуться к лекции** или рассмотрим **другой пример?**

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.**

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

Решим систему, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

Решим систему, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

Решим систему, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

Решим систему, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Первый способ.

Решим систему, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 7z + 9, \\ y = 5z + 7, \\ z = z. \end{cases}$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} \boldsymbol{2}x + \boldsymbol{(-3)}y + \boldsymbol{1}z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} \mathbf{2}x + \mathbf{(-3)}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ & & \end{vmatrix} =$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ \boldsymbol{1}x + \boldsymbol{(-2)}y + \boldsymbol{3}z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} =$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 5\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = -7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 5\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Для начальной точки надо найти частное решение исходной системы. Например, $(x; y; z) = (9; 7; 0)$.

**Пример 8.** *Найти параметрические и канонические уравнения прямой* $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Второй способ. Найдем **направляющий вектор**:

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = -7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 5\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Для начальной точки надо найти частное решение исходной системы. Например, $(x; y; z) = (9; 7; 0)$.

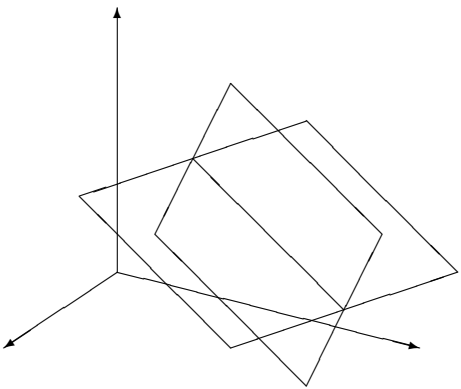
$$\begin{cases} x = 9 - 7t, \\ y = 7 - 5t, \\ z = -t. \end{cases}$$

**Вернуться к лекции?**

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.

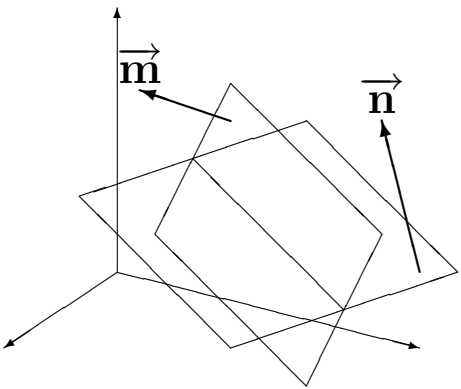
**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.

**Решение.**

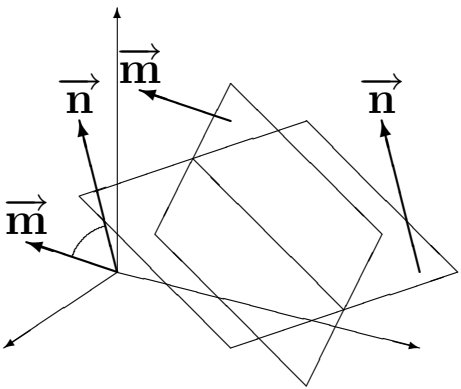


**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.

**Решение.**

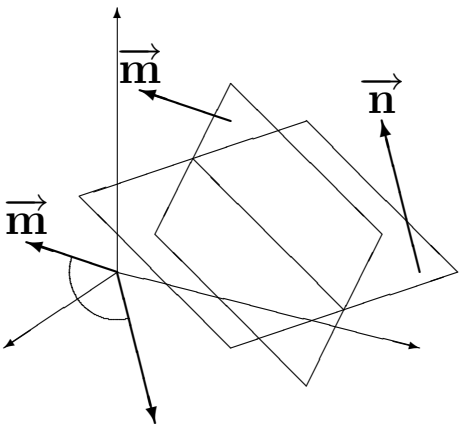


**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.



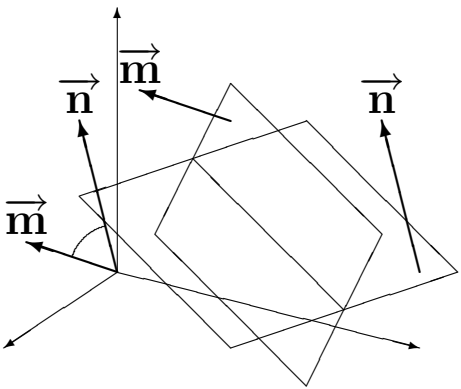

**Решение.** Угол между плоскостями равен либо углу между их нормалями,

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.




**Решение.** Угол между плоскостями равен либо углу между их нормалями, либо дополняет этот угол до развернутого.

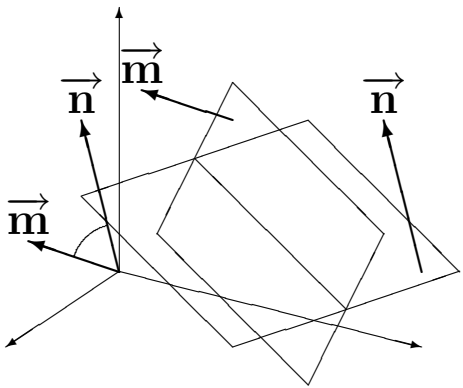
**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*

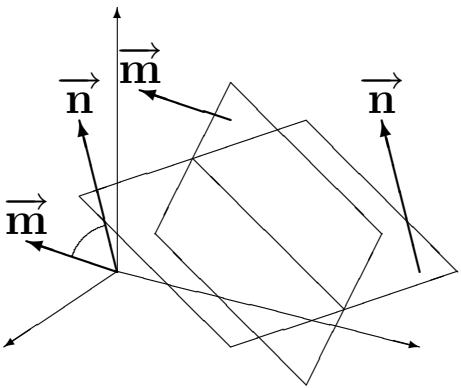
$$\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 1 = 0 \quad \textit{и} \quad 4x - 4y + 7z + 5 = 0.$$




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*

$$\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 1 = 0 \quad \textit{и} \quad 4x - 4y + 7z + 5 = 0.$$

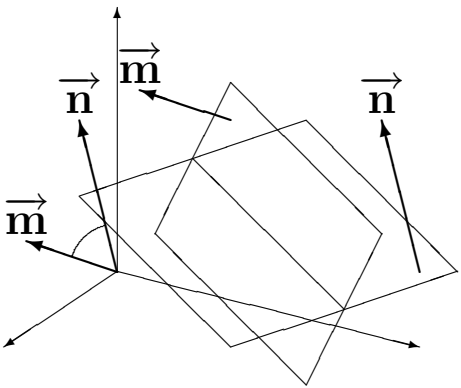



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(\mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\mathbf{-1})\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (\mathbf{-2})\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*

$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $\mathbf{4}x + (\mathbf{-4})y + \mathbf{7}z + 5 = 0.$

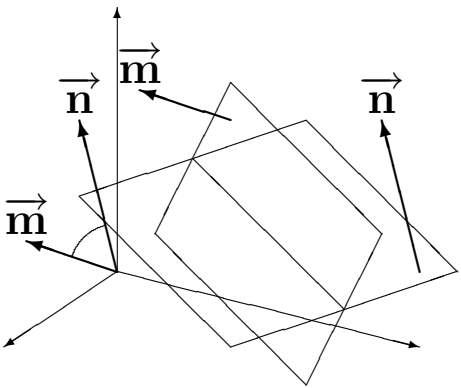



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*

$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $\mathbf{4}x + (\mathbf{-4})y + \mathbf{7}z + 5 = 0.$

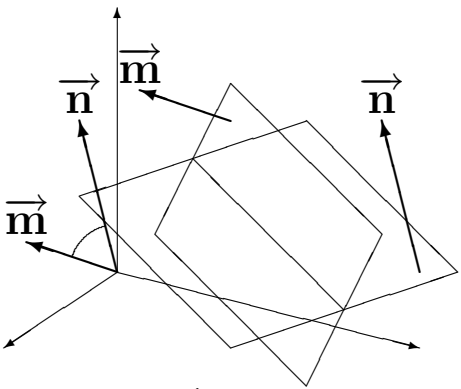



**Решение.** $\arccos \dfrac{(\vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}})}{|\vec{\mathbf{m}}|\,|\vec{\mathbf{n}}|} =$

$$= \arccos \frac{\left(2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\,|\vec{\mathbf{n}}|} =$$

$$= \arccos \frac{\left(2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}, \mathbf{4}\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{-4})\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{7}\vec{\mathbf{k}}\right)}{3\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} =$$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.



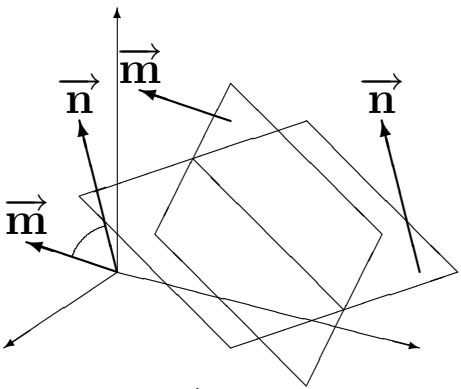

**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$$

$$= \arccos \frac{\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\overrightarrow{\mathbf{k}}, 4\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 7\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{3\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} =$$

$$= \arccos \frac{2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)7}{3 \cdot 9} =$$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.



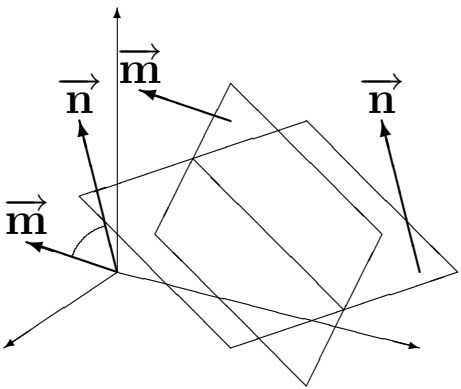

**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} =$$

$$= \arccos \frac{\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\overrightarrow{\mathbf{k}}, 4\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 7\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{3\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} =$$

$$= \arccos \frac{2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)7}{3 \cdot 9} = \arccos \frac{-2}{27}$$

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*
$2x - y - 2z + 1 = 0$ *и* $4x - 4y + 7z + 5 = 0$.

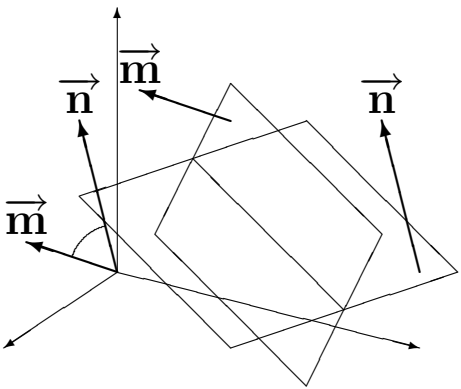



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} = \arccos \dfrac{-2}{27}$.

Следовательно, вычисленный угол дополняет искомый до развернутого угла, т.е. угол между плоскостями равен

**Пример 9.** *Найти угол между плоскостями*

$2x - y - 2z + 1 = 0 \quad$ *и* $\quad 4x - 4y + 7z + 5 = 0.$




**Решение.** $\arccos \dfrac{(\vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}})}{|\vec{\mathbf{m}}|\,|\vec{\mathbf{n}}|} = \arccos \dfrac{-2}{27}.$

Следовательно, вычисленный угол дополняет искомый до развернутого угла, т.е. угол между плоскостями равен $\arccos \dfrac{2}{27}.$

**Вернуться к лекции** или **рассмотреть другой пример?**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

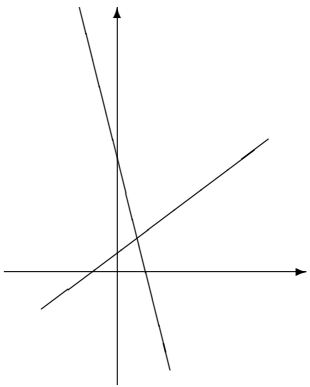
***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

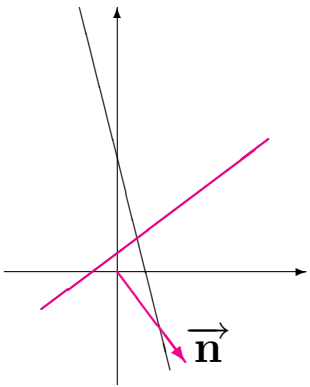
***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;



**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

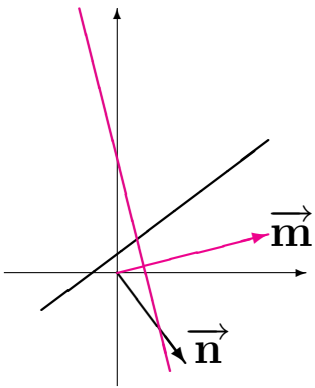
***а)*** *прямыми* $\mathbf{3}x + (-\mathbf{4})y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

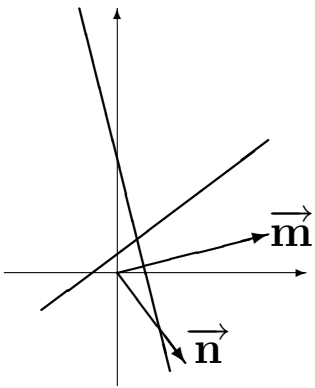
***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\mathbf{12}x + \mathbf{5}y - 4 = 0$;




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

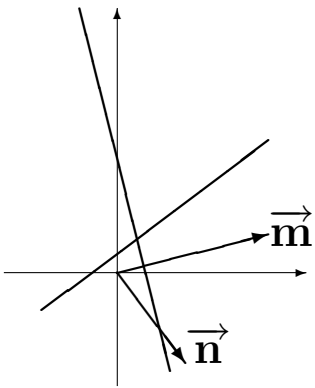
***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;




**Решение.** Очевидно, что угол между прямыми на плоскости равен либо углу между векторами, нормальными к этим прямым, либо дополняет их до развернутого угла.

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;

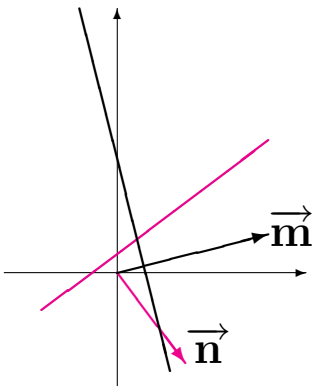



**Решение.**

$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $\mathbf{3}x + (-\mathbf{4})y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;

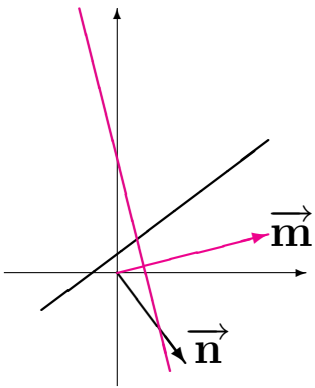



**Решение.**

$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} = \arccos\frac{\left(\mathbf{3}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (-\mathbf{4})\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\sqrt{\mathbf{3}^2 + (-\mathbf{4})^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\mathbf{12}x + \mathbf{5}y - 4 = 0$;

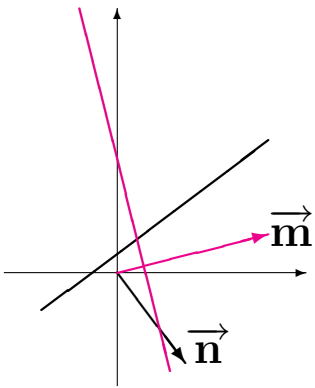



**Решение.**

$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} = \arccos\frac{\left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\mathbf{12}x + \mathbf{5}y - 4 = 0$;



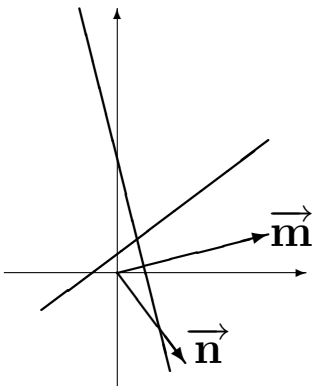

**Решение.**

$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} = \arccos\frac{\left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

$$= \arccos\frac{\left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\mathbf{12}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{5}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{\mathbf{12}^2+\mathbf{5}^2}} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;




**Решение.**

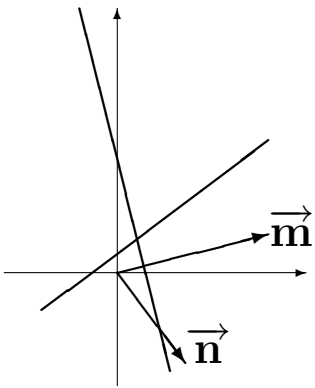
$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} = \arccos\frac{\left(3\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

$$= \arccos\frac{\left(3\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}},12\overrightarrow{\mathbf{i}} + 5\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{12^2+5^2}} =$$

$$= \arccos\frac{3\cdot 12 + (-4)\cdot 5}{5\cdot 13} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;




**Решение.**

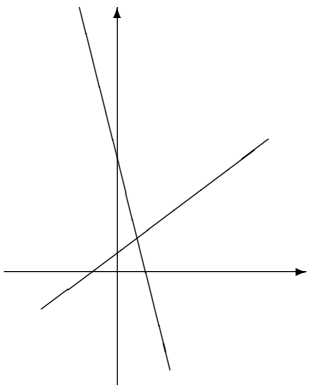
$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} = \arccos\frac{\left(3\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{m}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{m}}\right|} =$$

$$= \arccos\frac{\left(3\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}},12\overrightarrow{\mathbf{i}} + 5\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{12^2+5^2}} =$$

$$= \arccos\frac{3\cdot 12 + (-4)\cdot 5}{5\cdot 13} = \arccos\frac{16}{65}.$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

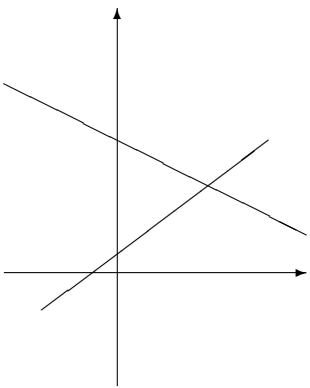
***а)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $12x + 5y - 4 = 0$;



**Решение.** Угол между данными прямыми равен $\arccos \dfrac{16}{65}$.

**Пример 10.** *Найдите угол между*

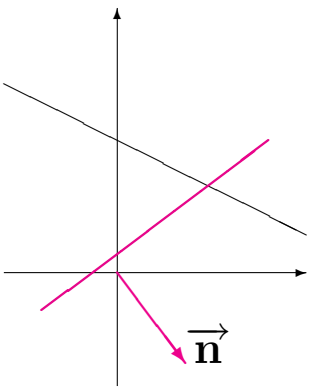
***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;



**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

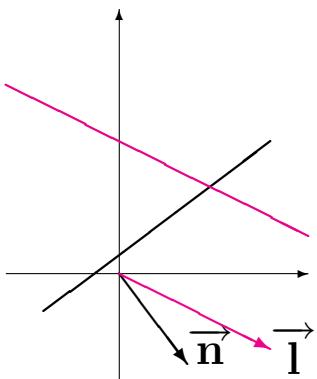
***б)*** *прямыми* $\mathbf{3}x + (-\mathbf{4})y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

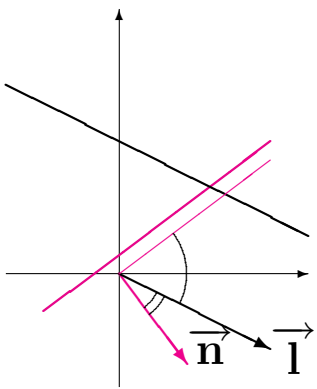
***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{\mathbf{15}} = \dfrac{y+5}{\mathbf{-8}}$;




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

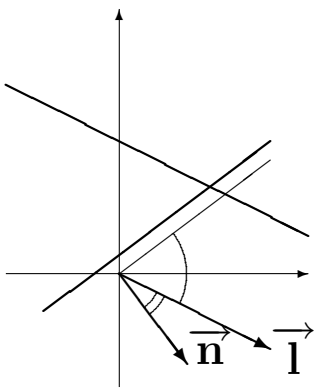
***б)*** *прямыми* $3x + (-4)y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;




**Решение.** Очевидно, что синус искомого угла равен модулю косинуса угла между $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;

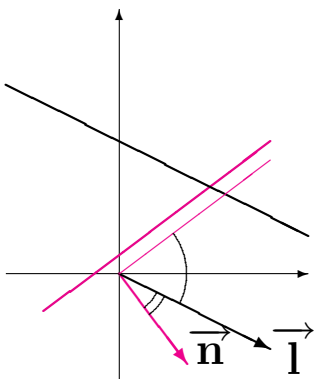



**Решение.**

$$\arcsin \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{l}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $\mathbf{3}x + (-\mathbf{4})y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;

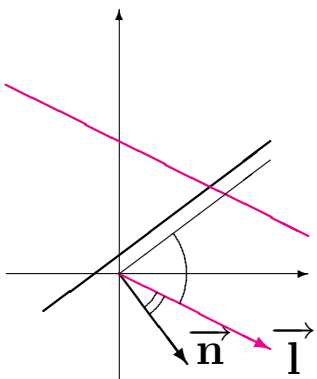



**Решение.**

$$\arcsin\frac{\left(\vec{\mathbf{n}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} = \arcsin\frac{\left(\mathbf{3}\,\vec{\mathbf{i}} + (-\mathbf{4})\,\vec{\mathbf{j}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\sqrt{\mathbf{3}^2 + (-\mathbf{4})^2}\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{\mathbf{15}} = \dfrac{y+5}{\mathbf{-8}}$;

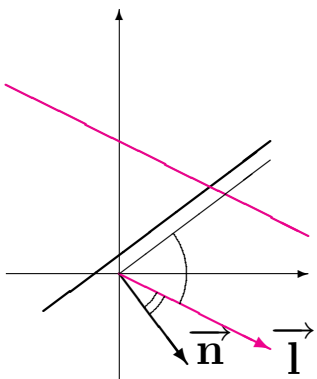



**Решение.**

$$\arcsin\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\,\overrightarrow{\mathbf{l}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|} = \arcsin\frac{\left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\,\overrightarrow{\mathbf{l}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{\mathbf{15}} = \dfrac{y+5}{\mathbf{-8}}$;



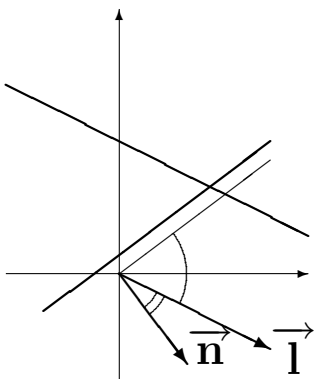

**Решение.**

$$\arcsin\frac{\left(\vec{\mathbf{n}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} = \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} =$$

$$= \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,\mathbf{15}\,\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{-8})\,\vec{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{\mathbf{15}^2+(\mathbf{-8})^2}} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;




**Решение.**

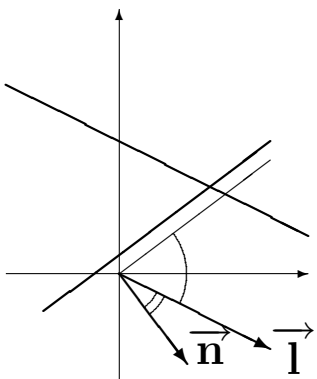
$$\arcsin\frac{\left(\vec{\mathbf{n}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} = \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} =$$

$$= \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,15\,\vec{\mathbf{i}} - 8\,\vec{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{15^2+(-8)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{3\cdot 15 + (-4)(-8)}{5\cdot 17} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;




**Решение.**

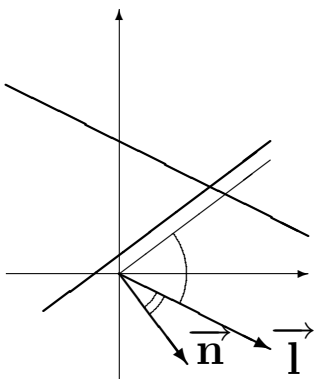
$$\arcsin\frac{\left(\vec{\mathbf{n}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} = \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,\vec{\mathbf{l}}\right)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left|\vec{\mathbf{l}}\right|} =$$

$$= \arcsin\frac{\left(3\,\vec{\mathbf{i}} - 4\,\vec{\mathbf{j}},\,15\,\vec{\mathbf{i}} - 8\,\vec{\mathbf{j}}\right)}{5\sqrt{15^2+(-8)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{3\cdot 15 + (-4)(-8)}{5\cdot 17} = \arcsin\frac{77}{85}.$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

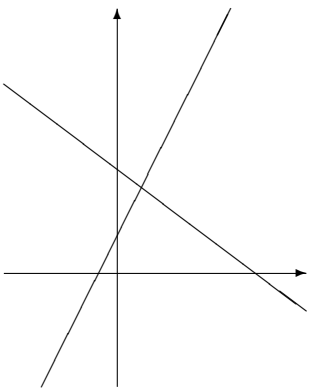
***б)*** *прямыми* $3x - 4y + 1 = 0$ *и* $\dfrac{x-3}{15} = \dfrac{y+5}{-8}$;




**Решение.** Угол между данными прямыми равен $= \arcsin \dfrac{3 \cdot 15 + (-4)(-8)}{5 \cdot 17} = \arcsin \dfrac{77}{85}$.

**Пример 10.** *Найдите угол между*

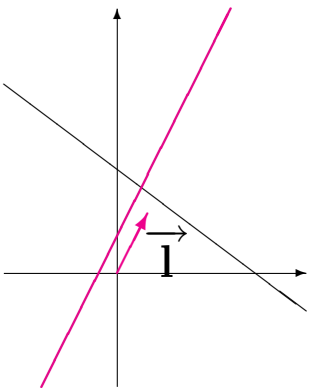
***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$



**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

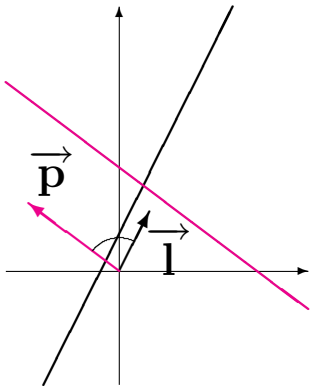
***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{\mathbf{5}} = \dfrac{y+5}{\mathbf{12}}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

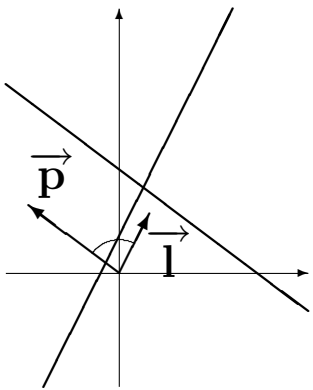
***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 + (-\mathbf{8})t, \\ y = 5 + \mathbf{6}t. \end{cases}$




**Решение.**

**Пример 10.** *Найдите угол между*

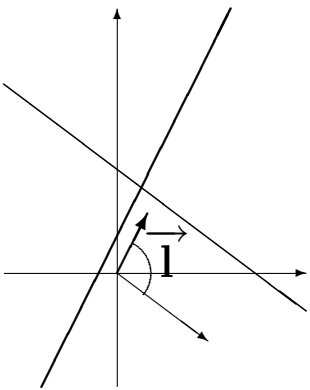
***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$




**Решение.** Искомый угол либо равен углу между направляющими векторами,

**Пример 10.** *Найдите угол между*

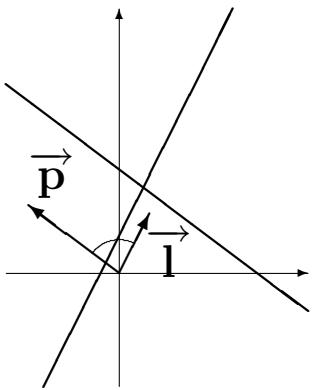
***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$




**Решение.** Искомый угол либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$

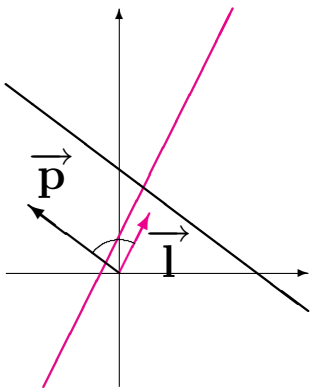



**Решение.**

$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$

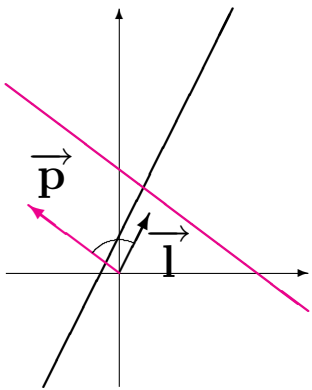



**Решение.**

$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} = \arccos \frac{\left(5\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 12\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{5^2 + 12^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 + (-\mathbf{8})t, \\ y = 5 + \mathbf{6}t. \end{cases}$

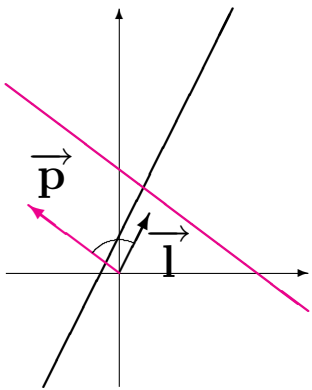



**Решение.**

$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=\arccos\frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}}+12\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{5^2+12^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 + (-8)t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$



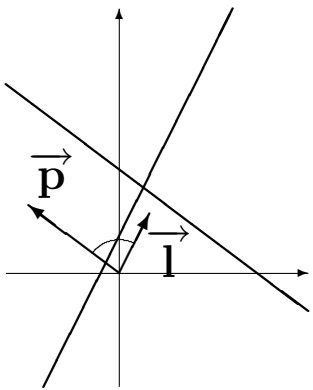

**Решение.**

$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=\arccos\frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}}+12\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{5^2+12^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}}+12\overrightarrow{\mathbf{j}},-8\overrightarrow{\mathbf{i}}+6\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{13\cdot\sqrt{(-8)^2+6^2}}=$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$




**Решение.**

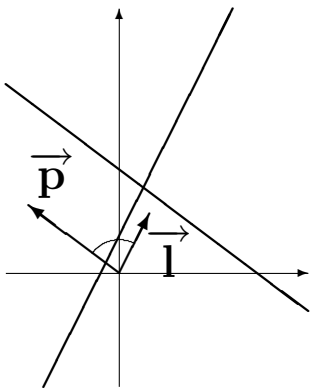
$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} = \arccos \frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}} + 12\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{5^2 + 12^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$$

$$= \arccos \frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}} + 12\overrightarrow{\mathbf{j}}, -8\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{13 \cdot \sqrt{(-8)^2 + 6^2}} =$$

$$= \arccos \frac{5 \cdot (-8) + 12 \cdot 6}{13 \cdot 10} =$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x=2-8t, \\ y=5+6t. \end{cases}$




**Решение.**

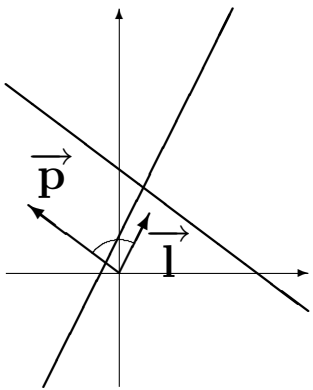
$$\arccos\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=\arccos\frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}}+12\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{5^2+12^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(5\overrightarrow{\mathbf{i}}+12\overrightarrow{\mathbf{j}},-8\overrightarrow{\mathbf{i}}+6\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{13\cdot\sqrt{(-8)^2+6^2}}=$$

$$=\arccos\frac{5\cdot(-8)+12\cdot 6}{13\cdot 10}=\arccos\frac{16}{65}.$$

**Пример 10.** *Найдите угол между*

***в)*** *прямыми* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{12}$ *и* $\begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = 5 + 6t. \end{cases}$




**Решение.** Искомый угол между прямыми равен $\arccos \dfrac{16}{65}$.

**Вернуться к лекции** или **рассмотреть другой пример?**

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*а)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x=-5-7t, \\ y=-1+4t, \\ z=2-4t; \end{cases}$

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$

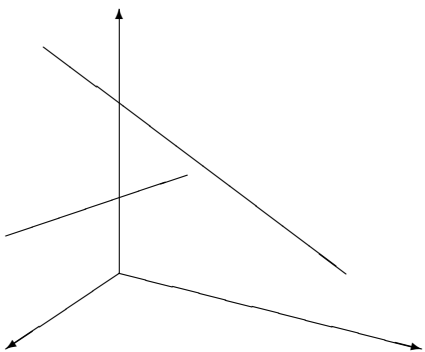
*в)* $\begin{cases} x-4y+z+7=0, \\ 5x+4y+2z-5=0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0. \end{cases}$

**Решение.**

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$

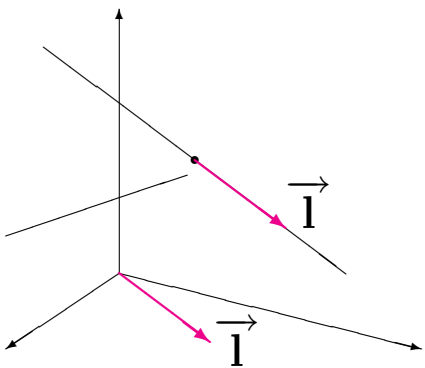
**Решение.**



**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$

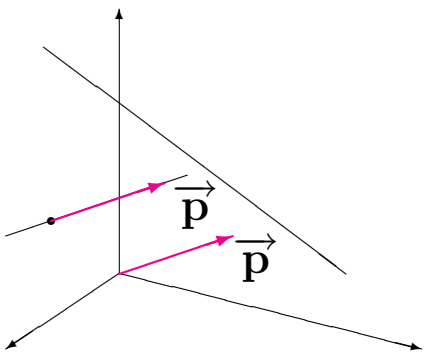
**Решение.**



**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

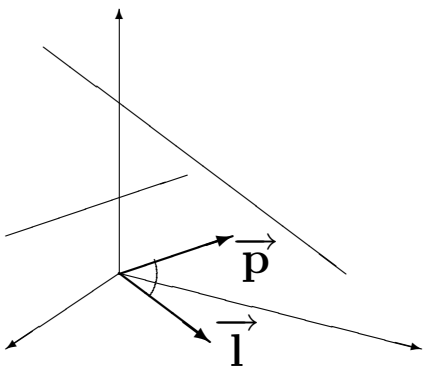
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 + (-\mathbf{7})t, \\ y = -1 + \mathbf{4}t, \\ z = 2 + (-\mathbf{4})t; \end{cases}$

**Решение.**



**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

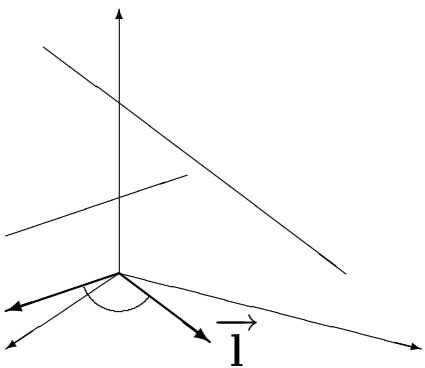
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$




**Решение.** Таким образом, искомый угол равен либо углу между направляющими векторами,

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

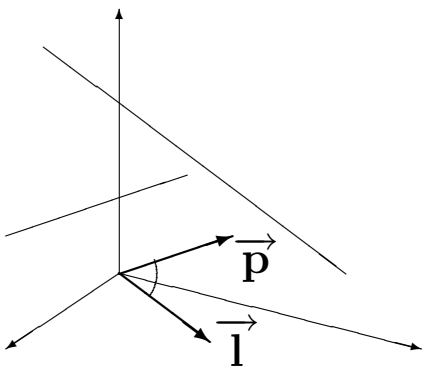
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$




**Решение.** Таким образом, искомый угол равен либо углу между направляющими векторами,
либо дополняет этот угол до развернутого угла.

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

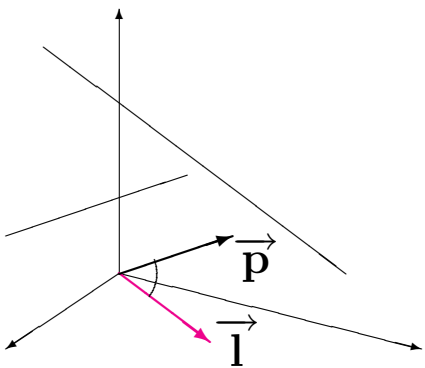
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

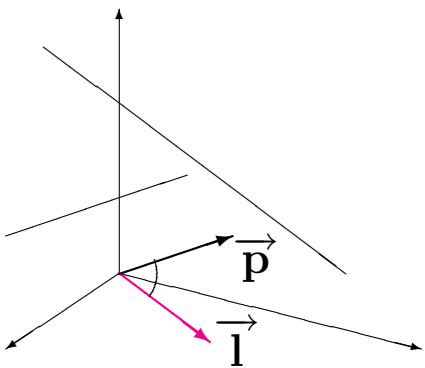
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$

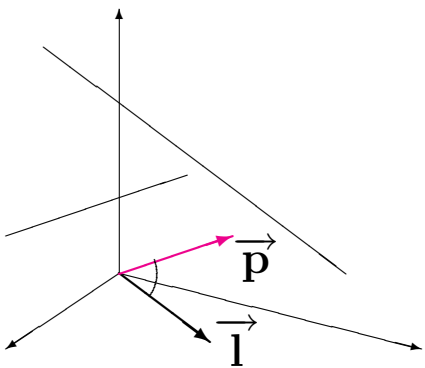



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (-1)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (-8)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 + (-\mathbf{7})t, \\ y = -1 + \mathbf{4}t, \\ z = 2 + (-\mathbf{4})t; \end{cases}$

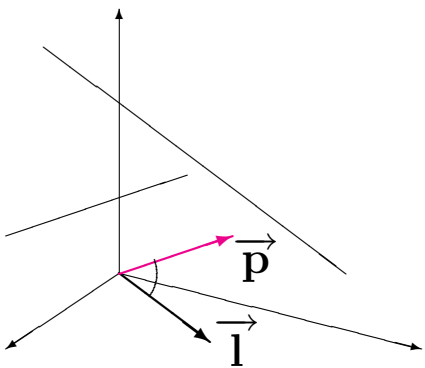



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x=-5+(-7)t, \\ y=-1+4t, \\ z=2+(-4)t; \end{cases}$



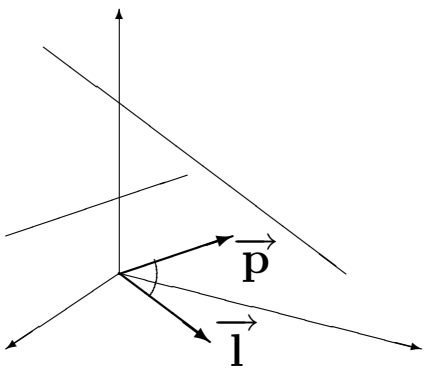

**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},-7\overrightarrow{\mathbf{i}}+4\overrightarrow{\mathbf{j}}+(-4)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{(-7)^2+4^2+(-4)^2}}=$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x=-5-7t, \\ y=-1+4t, \\ z=2-4t; \end{cases}$



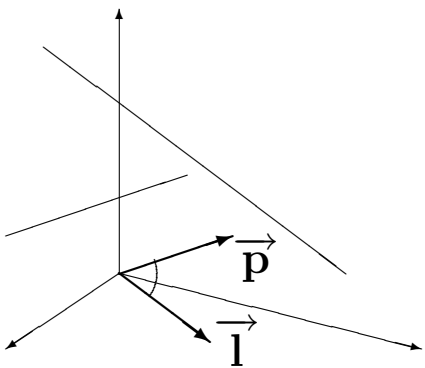

**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},-7\overrightarrow{\mathbf{i}}+4\overrightarrow{\mathbf{j}}-4\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{(-7)^2+4^2+(-4)^2}}=0.$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} x = -5 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases}$

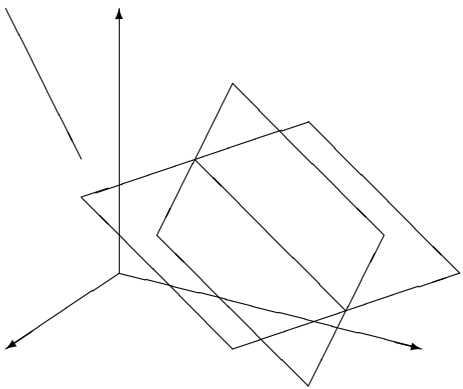



**Ответ на а):** прямые перпендикулярны.

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

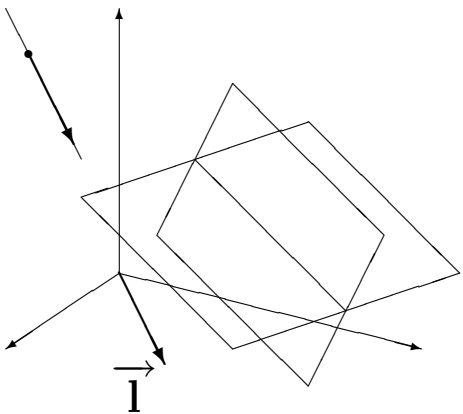
*б)* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$

**Решение.**



**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

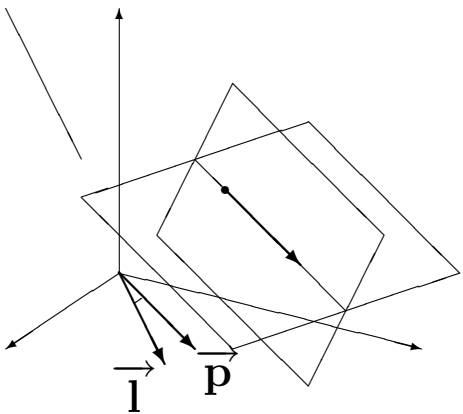
*б)* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$




**Решение.**

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

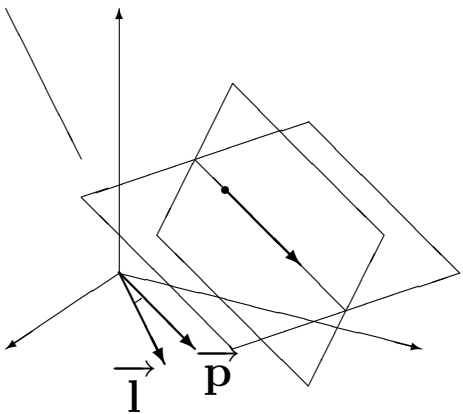
*б)* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** Угол между прямыми равен либо углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого.

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

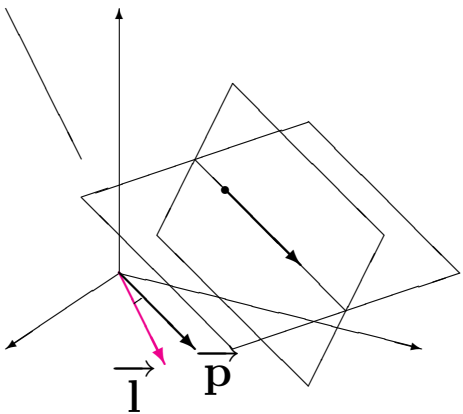
*б)* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

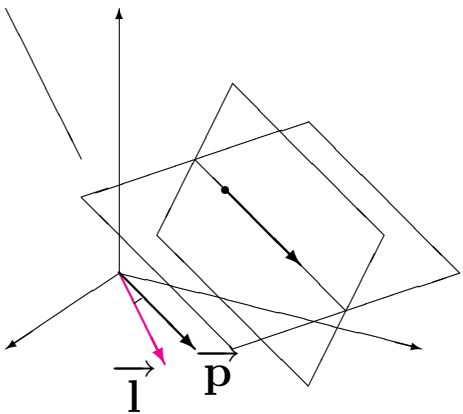
*б)* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|} =$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

**б)** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} y+z-3=0, \\ 8x+9y-5z-4=0; \end{cases}$

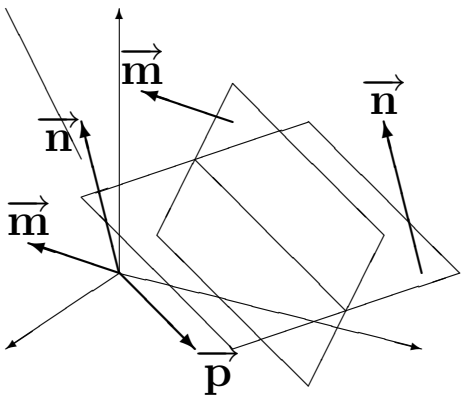



**Решение.** $\arccos \dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{p}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right| \left|\vec{\mathbf{p}}\right|} =$

$$= \arccos \frac{\left(4\,\vec{\mathbf{i}} + (-1)\,\vec{\mathbf{j}} + (-8)\,\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}\,\left|\vec{\mathbf{p}}\right|} =$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(-\mathbf{5})z-4=0; \end{cases}$



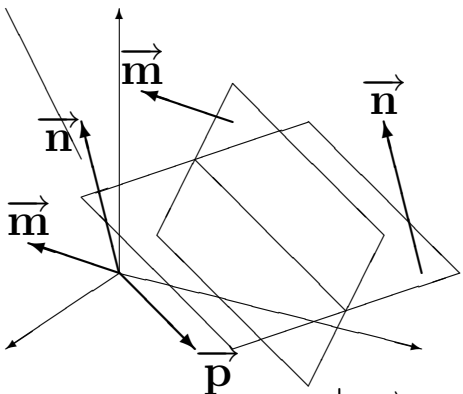

**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$

$$=\arccos\frac{\left(4\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$\overrightarrow{\mathbf{p}}=\left[\overrightarrow{\mathbf{m}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right]=$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(\mathbf{-5})z-4=0; \end{cases}$



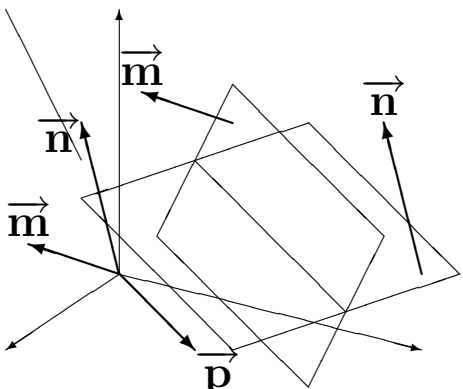

**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}},\,\vec{\mathbf{p}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right|\left|\vec{\mathbf{p}}\right|}=$

$$=\arccos\frac{\left(4\,\vec{\mathbf{i}}-\vec{\mathbf{j}}-8\,\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\,\left|\vec{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$\vec{\mathbf{p}}=\left[\vec{\mathbf{m}},\ \vec{\mathbf{n}}\right]=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}=$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(\mathbf{-5})z-4=0; \end{cases}$



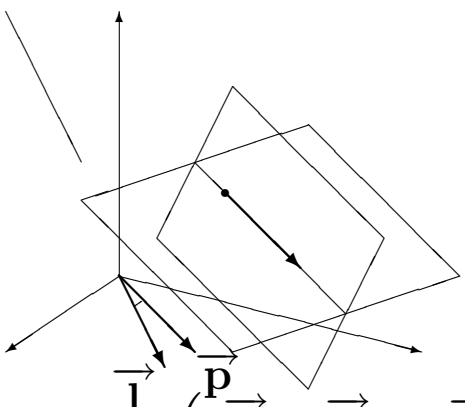

**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}},\,\vec{\mathbf{p}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right|\left|\vec{\mathbf{p}}\right|}=$

$$=\arccos\frac{\left(4\,\vec{\mathbf{i}}-\vec{\mathbf{j}}-8\,\vec{\mathbf{k}},\,\vec{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\,\left|\vec{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$\vec{\mathbf{p}}=\left[\vec{\mathbf{m}},\ \vec{\mathbf{n}}\right]=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & -5 \end{vmatrix}=-14\,\vec{\mathbf{i}}+8\,\vec{\mathbf{j}}-8\,\vec{\mathbf{k}}.$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(-\mathbf{5})z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$

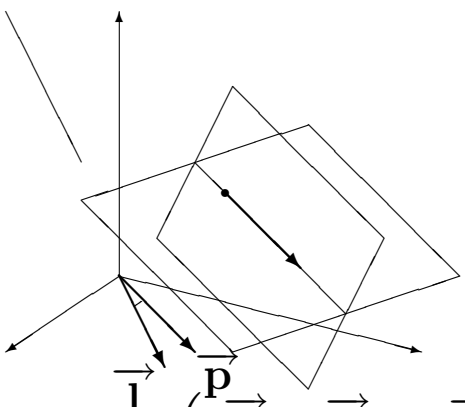
$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},-14\overrightarrow{\mathbf{i}}+8\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{14^2+8^2+(-8)^2}}=$$

$\overrightarrow{\mathbf{p}}=-14\overrightarrow{\mathbf{i}}+8\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}}.$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

**б)** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(-\mathbf{5})z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$

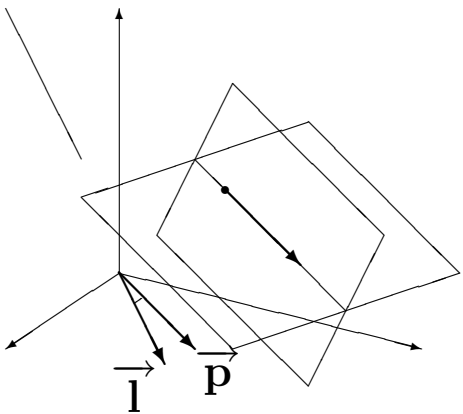
$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=$$

$$=\arccos\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},-14\overrightarrow{\mathbf{i}}+8\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{14^2+8^2+(-8)^2}}=0.$$

$\overrightarrow{\mathbf{p}}=-14\overrightarrow{\mathbf{i}}+8\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}}.$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

*б)* $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x+\mathbf{1}y+\mathbf{1}z-3=0, \\ \mathbf{8}x+\mathbf{9}y+(-\mathbf{5})z-4=0; \end{cases}$




**Решение.** $\arccos\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}=0$, т.е. прямые перпендикулярны.

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.**

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} \mathbf{1}x + \mathbf{-4}y + \mathbf{1}z + 7 = 0, \\ \mathbf{5}x + \mathbf{4}y + \mathbf{2}z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Найдем направляющий вектор первой прямой:

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ 5\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} =$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} \mathbf{1}x + \mathbf{-4}y + \mathbf{1}z + 7 = 0, \\ \mathbf{5}x + \mathbf{4}y + \mathbf{2}z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Найдем направляющий вектор первой прямой:

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{i}} - 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ 5\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 24\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (\mathbf{-5})z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Направляющий вектор первой прямой:

$\overrightarrow{\mathbf{p}} = -12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 24\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Найдем направляющий вектор второй прямой:

$$\overrightarrow{\mathbf{q}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ 8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 9\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 5\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} =$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (-\mathbf{5})z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Направляющий вектор первой прямой:

$\overrightarrow{\mathbf{p}} = -12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 24\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Найдем направляющий вектор второй прямой:

$$\overrightarrow{\mathbf{q}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ 8\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 9\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 5\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Мы нашли направляющие векторы этих прямых:

$\overrightarrow{\mathbf{p}} = -12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 24\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{q}} = -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{q}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{q}}\right|} = 0.$$

**Пример 11.** *Найти угол между прямыми:*

***в)*** $\begin{cases} x - 4y + z + 7 = 0, \\ 5x + 4y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Угол между прямыми либо равен углу между направляющими векторами, либо дополняет его до развернутого угла.

Мы нашли направляющие векторы этих прямых:

$\overrightarrow{\mathbf{p}} = -12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 24\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{q}} = -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\arccos \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{q}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{q}}\right|} = 0.$$

Рассматриваемые прямые ортогональны.

**Вернуться к лекции?**

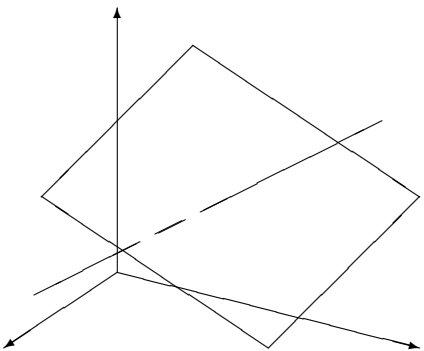
**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$

***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

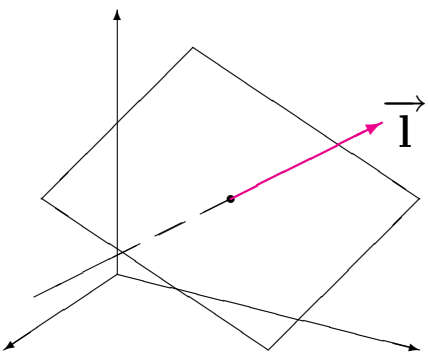
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$



**Решение.**

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

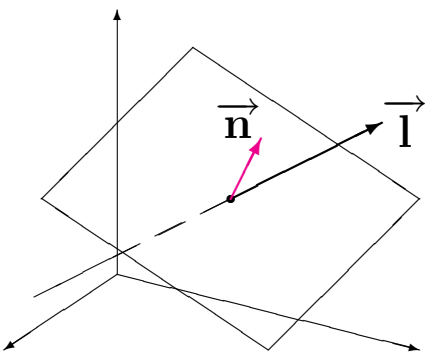
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$




**Решение.**

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

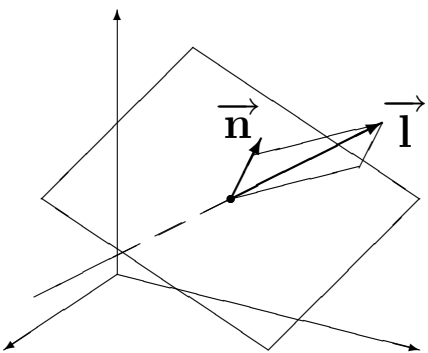
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 6 = 0;$




**Решение.**

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

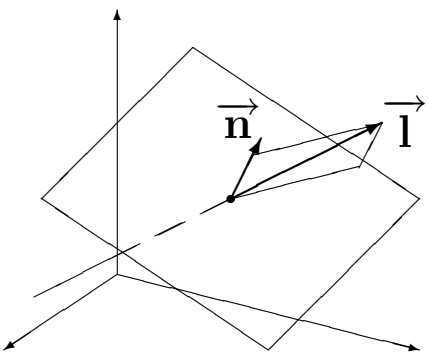
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$




**Решение.** Ясно, что угол между прямой и плоскостью дополняет до прямого угла угол между направляющим вектором и вектором, нормальным к плоскости.

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

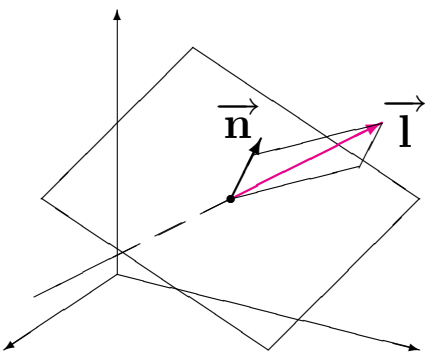
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$




**Решение.** $\arcsin \left| \dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{n}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right| \left|\vec{\mathbf{n}}\right|} \right| =$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

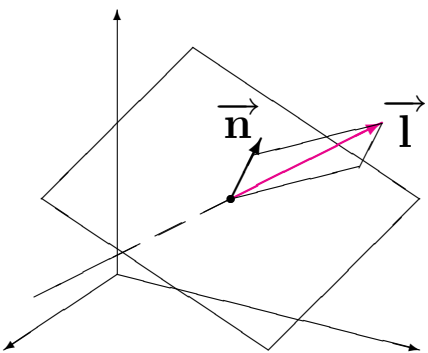
***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$




**Решение.** $\arcsin \left| \dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{n}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right| \left|\vec{\mathbf{n}}\right|} \right| =$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $2x - y - 2z + 6 = 0;$

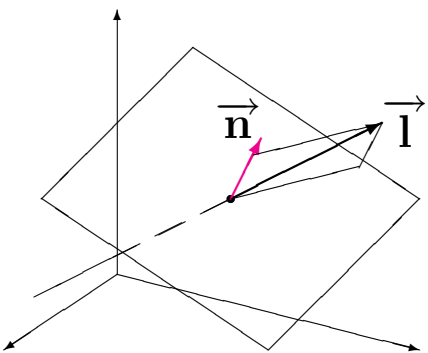



**Решение.** $\arcsin\left|\dfrac{\left(\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{n}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{l}}\right|\left|\vec{\mathbf{n}}\right|}\right| =$

$$= \arcsin\left|\frac{\left(4\,\vec{\mathbf{i}} + (-1)\,\vec{\mathbf{j}} + (-8)\,\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}\,\left|\vec{\mathbf{n}}\right|}\right| =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 6 = 0;$

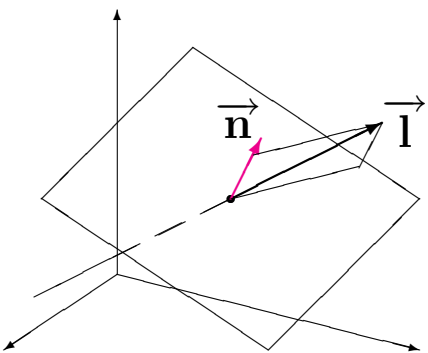



**Решение.** $\arcsin\left|\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right| =$

$$= \arcsin\left|\frac{\left(4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}\,\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right| =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\mathbf{2}x+(\mathbf{-1})y+(\mathbf{-2})z+6=0;$



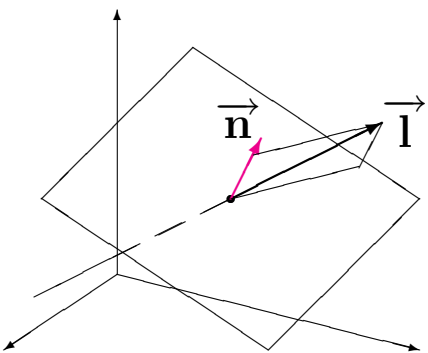

**Решение.** $\arcsin\left|\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right|=$

$$=\arcsin\left|\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right|=$$

$$=\arcsin\left|\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{i}}+(\mathbf{-1})\overrightarrow{\mathbf{j}}+(\mathbf{-2})\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{\mathbf{2}^2+(\mathbf{-1})^2+(\mathbf{-2})^2}}\right|=$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***а)*** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-8}$ *и* $\mathbf{2}x+(\mathbf{-1})y+(\mathbf{-2})z+6=0;$



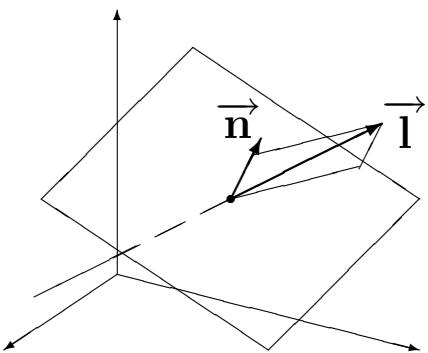

**Решение.** $\arcsin\left|\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}},\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right|=$

$$=\arcsin\left|\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right|=$$

$$=\arcsin\left|\frac{\left(4\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-8\overrightarrow{\mathbf{k}},2\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}-2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{9\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}\right|=\arcsin\frac{25}{27}.$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

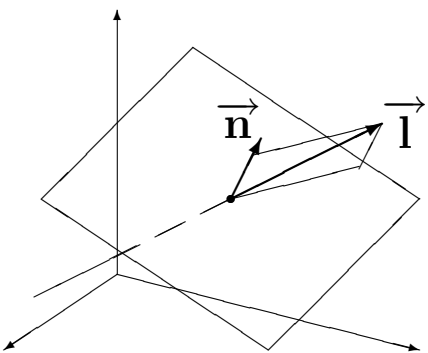
*б)* $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$




**Решение.**

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

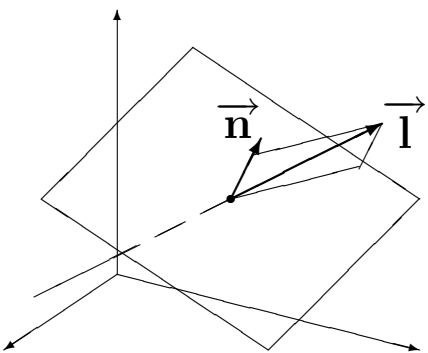
***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$




**Решение.** Ясно, что угол между прямой и плоскостью дополняет до прямого угла угол между направляющим вектором и вектором, нормальным к плоскости.

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

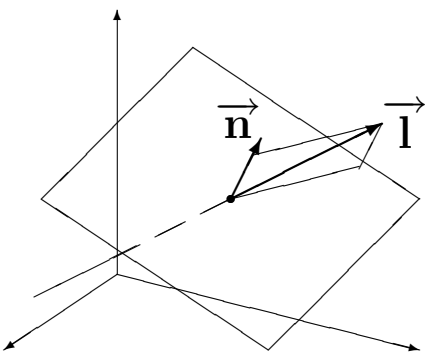
***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (-\mathbf{5})z - 4 = 0; \end{cases}$




**Решение.** Надо найти направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{\mathbf{l}} =$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (-\mathbf{5})z - 4 = 0; \end{cases}$

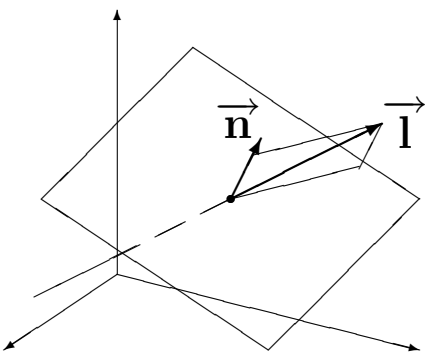



**Решение.** Надо найти направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{\mathbf{l}} =$

$$= \left[\mathbf{0}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \mathbf{8}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{9}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (-\mathbf{5})\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (\mathbf{-5})z - 4 = 0; \end{cases}$



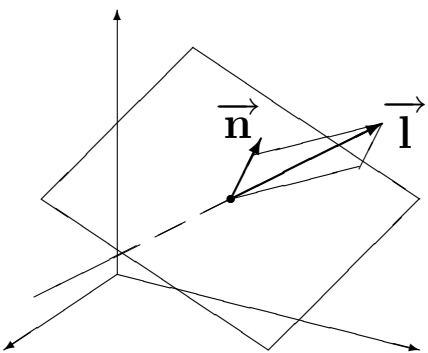

**Решение.** Надо найти направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{\mathbf{l}} =$

$$= \left[\mathbf{0}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \mathbf{8}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{9}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (\mathbf{-5})\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

***б)*** $2x - y - 2z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} \mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z - 3 = 0, \\ \mathbf{8}x + \mathbf{9}y + (\mathbf{-5})z - 4 = 0; \end{cases}$



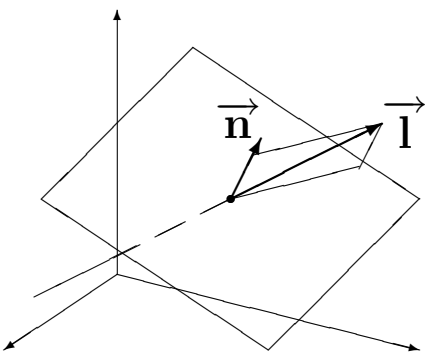

**Решение.** Надо найти направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{\mathbf{l}} =$

$$= \left[\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ 8\overrightarrow{\mathbf{i}} + 9\overrightarrow{\mathbf{j}} - 5\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -14\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

*б)* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$

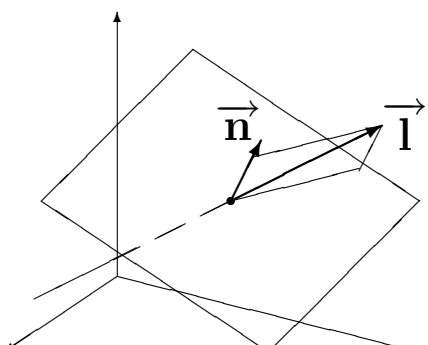



**Решение.** $\overrightarrow{\mathbf{l}} = -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\arcsin\left|\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right| =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

*б)* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$



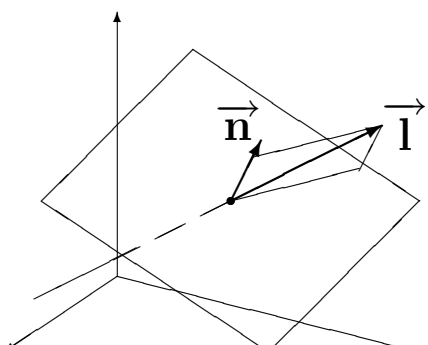

**Решение.** $\overrightarrow{\mathbf{l}} = -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\arcsin\left|\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right| =$$

$$= \left|\arcsin\frac{\left(-14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{18 \cdot 3}\right| =$$

**Пример 12.** *Найти угол между прямой и плоскостью в следующих случаях:*

*б)* $\mathbf{2}x + (\mathbf{-1})y + (\mathbf{-2})z + 6 = 0$ *и* $\begin{cases} y + z - 3 = 0, \\ 8x + 9y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$




**Решение.** $\overrightarrow{\mathbf{l}} = -14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\arcsin\left|\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{l}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|}\right| =$$

$$= \left|\arcsin\frac{\left(-14\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 8\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 8\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{18 \cdot 3}\right| = \arcsin\frac{10}{27}.$$

**Задача I.1.** (Ответ приведен на стр.354.) Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Задача II.2.** (Ответ приведен на стр.377.) Найти угол между фигурами

$$\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

**Задача II.3.** (Ответ приведен на стр.386.) Найти угол между фигурами

# Ответы и решения

# Решение задачи 1.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три).

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1, 2, -1)$ и $Q(3, -1, 3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; -1; 0)$, $B(-3; -2; 2)$ $C(0; 1; 6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Теперь найдем нормальный вектор плоскости $\triangle ABC$:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Теперь найдем нормальный вектор плоскости $\triangle ABC$:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Теперь найдем нормальный вектор плоскости $\triangle ABC$:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -10\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 30\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 15\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. Точка на плоскости известна (даже три). Теперь ищем либо вектор, перпендикулярный этой плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных ей. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ параллельны плоскости $\triangle ABC$. Возьмем, например, векторы

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}} - \left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Теперь найдем нормальный вектор плоскости $\triangle ABC$:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -10\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 30\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 15\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

В качестве нормального вектора можно взять $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. В целях проверки можно подставить в это уравнение координаты точек $A, B, C$.

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

$$\rho(P) = \frac{2\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 12}{\sqrt{4+36+9}} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

$$\rho(P) = \frac{2\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{-25}{7},$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

$$\rho(P) = \frac{2\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{-25}{7},$$

$$\rho(Q) = \frac{2\cdot 3 - 6\cdot(-1) + 3\cdot 3 - 12}{\sqrt{4+36+9}} =$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

$$\rho(P) = \frac{2\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{-25}{7},$$

$$\rho(Q) = \frac{2\cdot 3 - 6\cdot(-1) + 3\cdot 3 - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{9}{7}.$$

**Задача 1.** Выяснить, какая из точек $P(1,2,-1)$ и $Q(3,-1,3)$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, где $A(3;-1;0)$, $B(-3;-2;2)$ $C(0;1;6)$. Верно ли, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну ли сторону от плоскости $\triangle ABC$?

**Ответ.** Сначала найдем уравнение плоскости $\triangle ABC$. Воспользуемся **таблицей**. В качестве начальной точки выберем, например, $A$, а в качестве нормального вектора выберем $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 6\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
$2(x-3) - 6(y-(-1)) + 3(z-0) = 0$, то есть $2x - 6y + 3z - 12 = 0$. Вычислим **отклонения** точек $P$ и $Q$ от этой плоскости:

$$\rho(P) = \frac{2\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{-25}{7},$$

$$\rho(Q) = \frac{2\cdot 3 - 6\cdot(-1) + 3\cdot 3 - 12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{9}{7}.$$

Значит, во-первых, точка $P$ находится дальше от плоскости $\triangle ABC$, так как $|\rho(P)| > |\rho(Q)|$, и, во-вторых, точки $P$ и $Q$ находятся по разные стороны от плоскости $\triangle ABC$, поскольку отклонения от этой плоскости у них имеют разные знаки.

# Решение задачи 2.

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$$\left[2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{k}};\ 4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$$\left[2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{k}};\ 4\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}};\ 4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 14\overrightarrow{\mathbf{j}} + 14\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Значит, искомый угол равен

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}};\ 4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 14\overrightarrow{\mathbf{j}} + 14\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Значит, искомый угол равен

$$\arccos \frac{\left(-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}};\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left|-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|} =$$

**Задача 2.** Найти угол между фигурами $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = 7t - 4, \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 2y - 3z - 2 = 0, \\ 4x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**Ответ.** Это две прямые.

Угол между ними равен углу между направляющими векторами:

$-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$$\left[2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} - 3\overrightarrow{\mathbf{k}};\ 4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7\overrightarrow{\mathbf{i}} - 14\overrightarrow{\mathbf{j}} + 14\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Значит, искомый угол равен

$$\arccos \frac{\left(-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}};\ \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left|-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + 7\overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|} = \arccos\left(-\frac{26}{27}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{26}{27}\right).$$

# Решение задачи 3.

**Задача 3.** Найти угол между фигурами

**Задача 3.** Найти угол между фигурами

**Ответ.**

# Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?