Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Алгебраические системы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Основные определения **4**
I.1. Алгебраическая система 5
I.2. Универсальная алгебра и реляционная система 12
I.3. Конечные алгебраические системы 17
I.4. Частичная система 19

II. Изоморфизм, гомоморфизм **21**
II.1. Изоморфизм 28
II.2. Индуцированное отношение 29
II.3. Гомоморфизм 41
II.4. Критерий изоморфизма 42

III. Теоремы о гомоморфизмах **44**
III.1. Конгруенция 46

III.2. Индуцированная операция 47
III.3. Индуцированные отношения 48
III.4. Фактор-система 49
III.5. Теорема об описании гомоморфных образов 50
III.6. Лемма о фактор-системе 52
III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом 58
III.8. Доказательство теоремы 2 67
III.9. Теорема о фактор-системе фактор-системы 83

I. Основные определения

В этом разделе часто фактически отождествляется *предикат* (**предикат-функцию** и **предикат-высказывание**) и **соответствующее** ему **отношение**.

I.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$*, где* Ω — **носитель алгебраической системы**, F — *множество операций, заданных на множестве* Ω, P — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ *называется* **сигнатурой алгебраической системы** A.

Применяется и другая трактовка этого понятия.

I.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle R, F, \mu \rangle$, *где* R, F *— множества, причем* $R \cap F = \emptyset$, *и* $\mu : R \cup F \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ *— однозначное отображение.*

I.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle R, F, \mu \rangle$, *где* R, F *— множества, причем* $R \cap F = \emptyset$, *и* $\mu : R \cup F \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ *— однозначное отображение.*

Предполагается, что R — множество предикатных символов, F — множество функциональных символов, μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A *— непустое множество;*
2. ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *является* $\mu(r)$*-местным предикатом на* A*;*
4. *если* $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A*.*

Предполагается, что R — множество предикатных символов, F — множество функциональных символов, μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A *— непустое множество;*
2. ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *является* $\mu(r)$*-местным предикатом на* A*;*
4. *если* $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A*.*

При этом A называется **носителем** алгебраической системы $\mathcal{A}$, а ν^{Σ} — **интерпретацией сигнатуры** Σ в A.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A — *непустое множество;*
2. ν^{Σ} — *отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *является* $\mu(r)$*-местным предикатом на* A*;*
4. *если* $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A*.*

Соглашение 1. *В дальнейшем мы иногда при задании алгебраической системы вместо* **отношения** *будем указывать соответствующий ему* **предикат**.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A — *непустое множество;*
2. ν^{Σ} — *отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$, *то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *является* $\mu(r)$*-местным предикатом на* A*;*
4. *если* $f \in F$, *то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A.

Рассмотреть пример?

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$*, где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Иными словами, универсальная алгебра есть алгебраическая система с пустым набором отношений (предикатов).

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$*, где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$*, где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$*, где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;
поле — алгебра вида $\langle P, \{+, \cdot, 0, 1\} \rangle$.

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 5. Реляционной системой *или* **системой отношений**, *или* **моделью** *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель реляционной системы**, P — *множество предикатов, определенных на этой реляционной системе.*

Иными словами, система отношений есть алгебраическая система с пустым набором алгебраических операций.

I.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

I.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

Порядком конечной алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ называется количество элементов ее носителя. Порядок алгебраической системы $\mathcal{A}$ обозначается через $|\mathcal{A}|$. В случае, когда вид сигнатуры универсальной алгебры ясен из контекста, в качестве идентификатора универсальной алгебры обычно берут идентификатор ее носителя, то есть говорят «универсальная алгебра Ω» вместо «универсальная алгебра $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$».

I.4. Частичная система

Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$*, где* Ω — **носитель частичной системы**, F — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, P — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

I.4. Частичная система

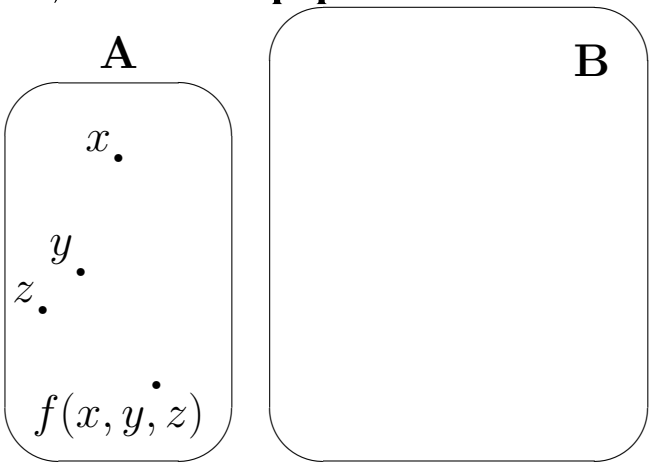
Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$*, где* Ω — **носитель частичной системы**, F — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, P — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

Важные частные случаи алгебраических систем связаны с ситуацией, когда $\mathrm{P} = \emptyset$ (универсальные алгебры) и $\mathrm{F} = \emptyset$ (модели или реляционные алгебры).

II. Изоморфизм, гомоморфизм

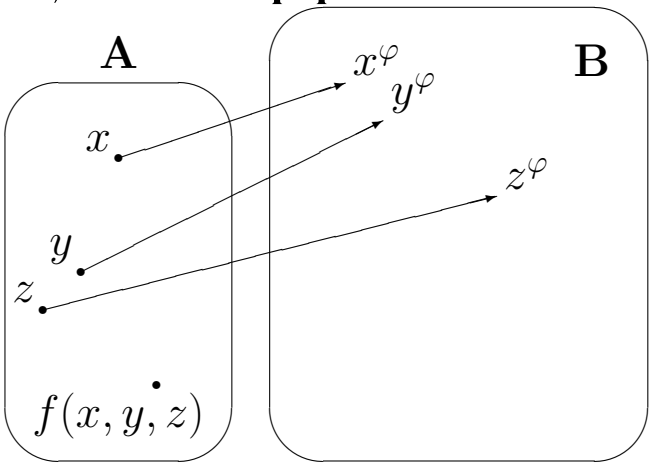
Мы сейчас определим некоторый тип функций, называемых *изоморфизмами* и *гомоморфизмами*. Для того чтобы при работе с гомоморфизмом (изоморфизмом) φ избежать громоздких формул типа $\varphi(f(x;y)) = \varphi(f)\,(\varphi(x);\varphi(y))$, мы будем образ элемента t под действием φ обозначать через t^{φ} вместо обычного обозначения $\varphi(t)$. На остальные функции (в частности, на алгебраические операции) это соглашение распространять не будем. Таким образом, если, например, g — трехместная алгебраическая операция, то $g(x,y,z)$ — это результат применения g к элементам x, y, z, а вот образы элементов x, $g(x,y,z)$, g под действием *гомоморфизма* или *изоморфизма* будем обозначать через, соответственно, x^{φ}, $(g(x,y,z))^{\varphi}$, g^{φ}.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



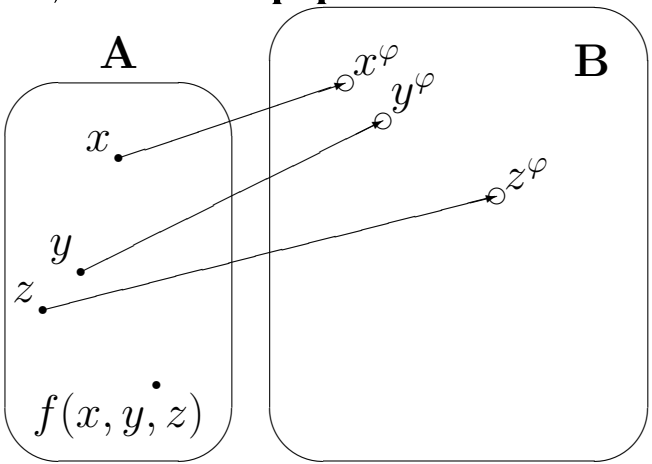
Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

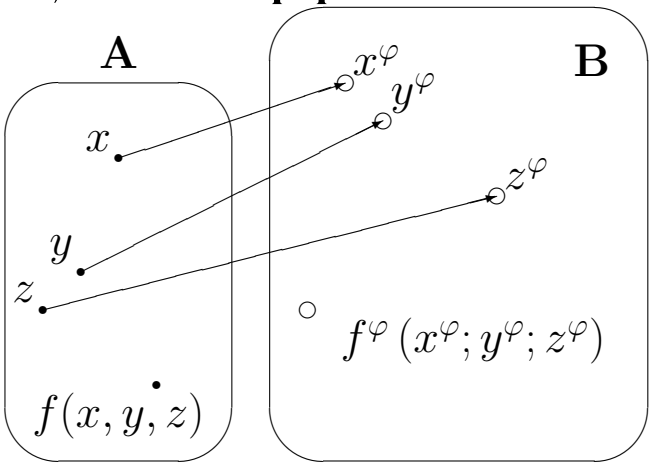
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

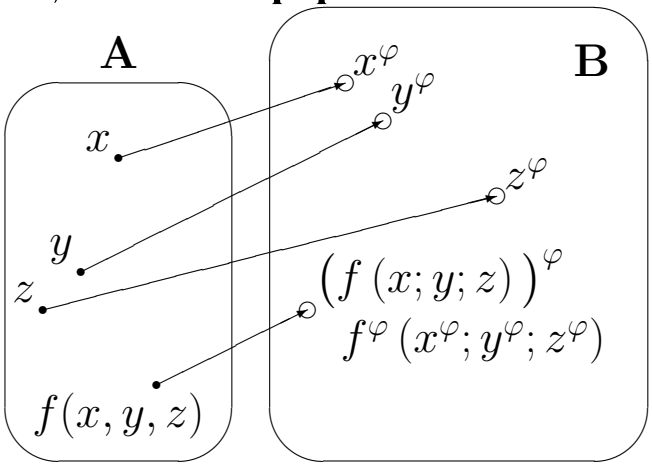
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

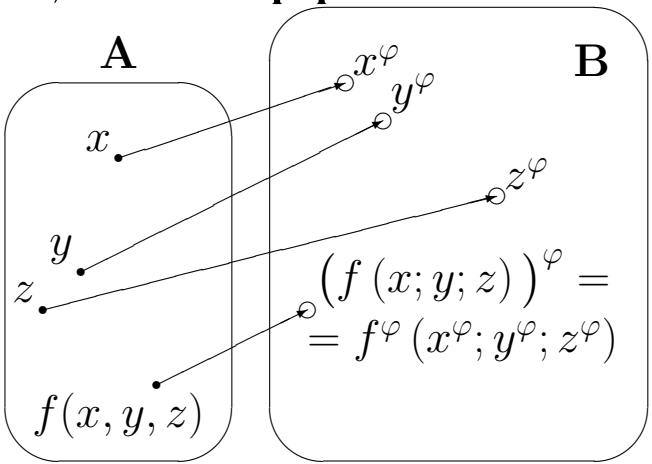
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f,\ldots\},\ \{P,\ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



Должно быть совпадение: $\big(f\,(x;y;z)\,\big)^\varphi = f^\varphi\,(x^\varphi;y^\varphi;z^\varphi)$.

Рассмотреть пример?

II.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathrm{F} & \to & \mathrm{F}' \\ \mathrm{P} & \to & \mathrm{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *на алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, *ограничение* φ *на* Ω *является* ***взаимно однозначным*** *отображением;*

во-вторых, *для любой операции* f *из* F *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем равенство*

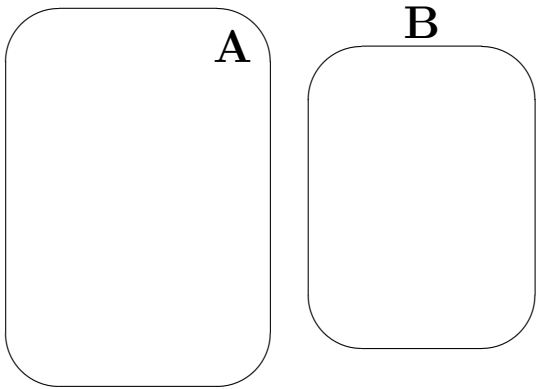
$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right) \tag{1}$$

(в частности, «арность» операций f *и* f^{φ} *совпадает);*

в-третьих, *для любого предиката* p *из* P *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *предикат* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *истинен тогда и только тогда, когда истинен предикат* $p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi})$.

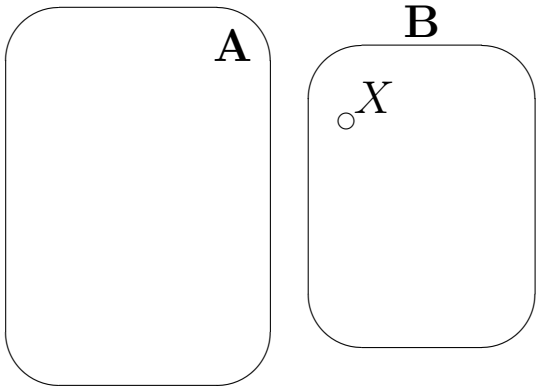
Рассмотреть пример?

II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

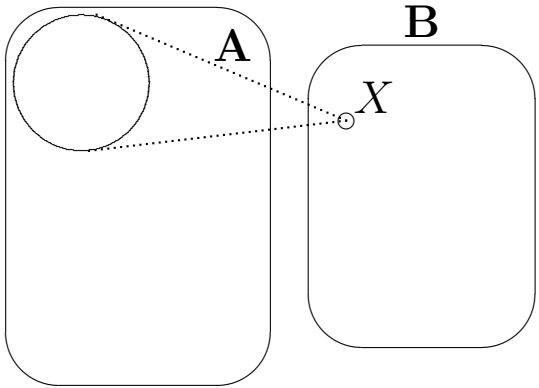
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда

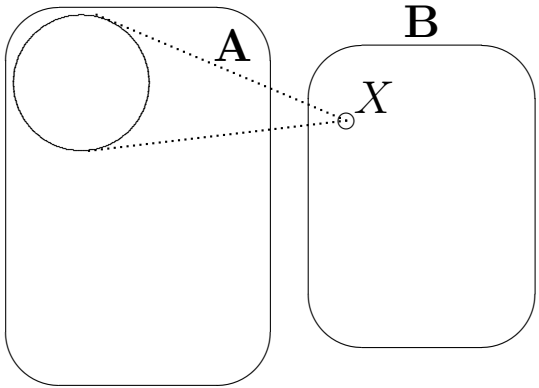
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X\right\}$,

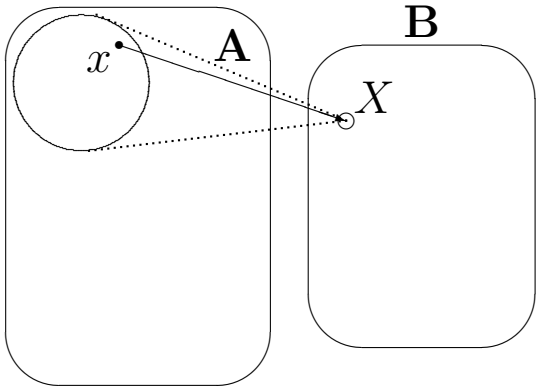
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X\right\}$, найдется такой элемент x, что

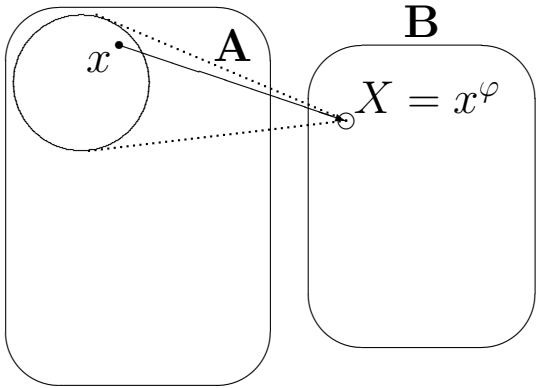
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X\right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

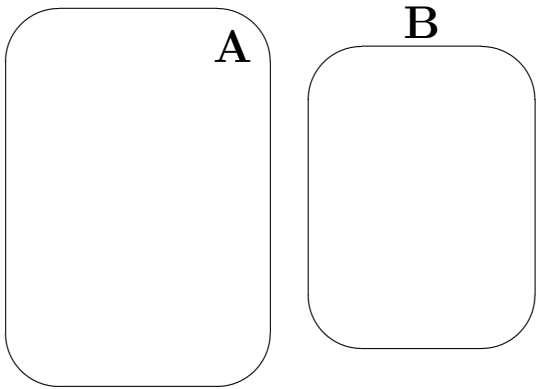
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

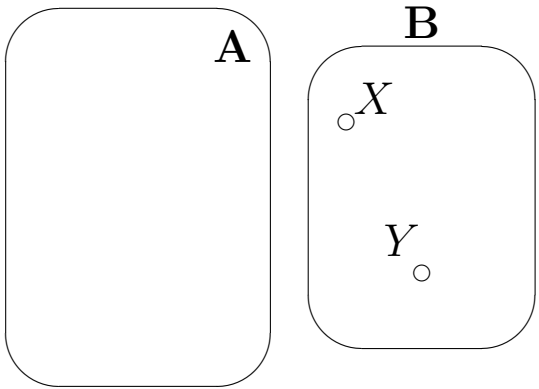
Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X\right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

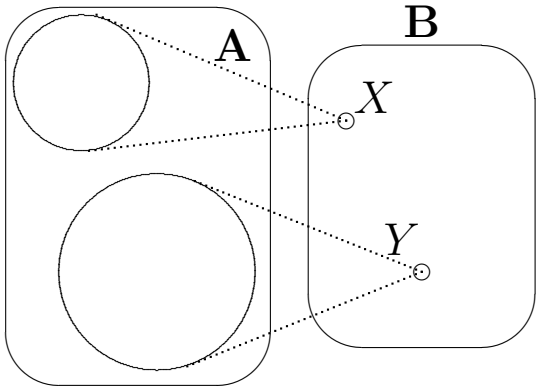
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда

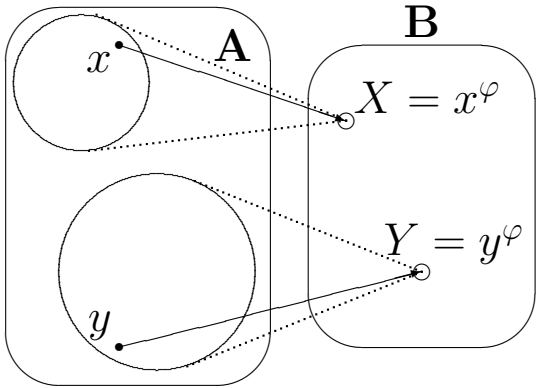
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y

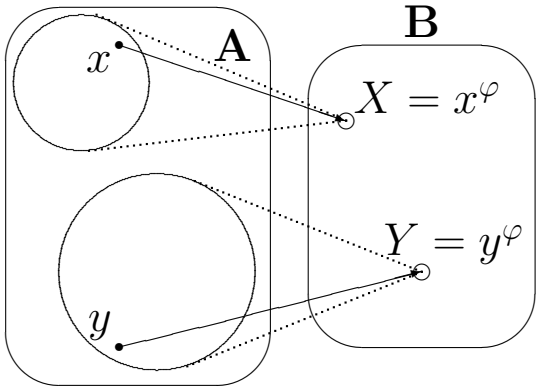
II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

II.2. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что $(x,\ y) \in Q$.

II.2. Индуцированное отношение

Определение 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ *— алгебраическая система,* $\mathbf{B}$ *— некоторое множество и* φ *— функция, отображающая* $\mathbf{A}$ *во множество* $\mathbf{B}$. *Тогда говорят, что* P' *— отношение,* ***индуцированное отношением*** P *в том и только том случае, если*

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in P' \ \Leftrightarrow\ \exists x_1, \ldots x_n \begin{cases} x_1^{\varphi} = y_1, \\ x_2^{\varphi} = y_2, \\ \ldots \\ x_n^{\varphi} = y_n, \\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in P. \end{cases} \tag{2}$$

II.3. Гомоморфизм

Определение 9. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathrm{F} & \to & \mathrm{F}' \\ \mathrm{P} & \to & \mathrm{P}' \end{cases}$ *называется* **гомоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если для любой операции* f *из* F *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем* ***равенство (1)***, *то есть* $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ *(в частности, «арность» операций* f *и* f^φ *совпадает).*

Гомоморфизм φ *называется* **сильным гомоморфизмом**, *если* p^φ *совпадает с индуцированным отношением, т.е из* $p^\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *следует, что в* Ω *найдутся такие элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что, во-первых,*

$$x_1^\varphi = y_1, \quad x_2^\varphi = y_2, \quad \ldots, \quad x_n^\varphi = y_n,$$

и, во-вторых, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— истинно. Иными словами,* p^φ *совпадает с отношением,* ***индуцированным отношением*** p.

Рассмотреть пример?

II.4. Критерий изоморфизма

Теорема 1 (критерий изоморфизма). ***Взаимно однозначный гомоморфизм*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом***.

Доказательство.

II.4. Критерий изоморфизма

Теорема 1 (критерий изоморфизма). ***Взаимно однозначный гомоморфизм*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом****.*

Доказательство. Это прямое следствие соответствующих определений.

III. Теоремы о гомоморфизмах

Оказывается, для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ можно построить такое множество M алгебраических систем, что любой гомоморфный образ алгебраической системы $\mathcal{A}$ относительно сильного гомоморфизма изоморфен некоторой алгебраической системе из M. В этом случае говорят, что *получено описание с точностью до изоморфизма всех гомоморфных (относительно сильных гомоморфизмов) образов алгебраической системы* $\mathcal{A}$.

III. Теоремы о гомоморфизмах

Для построения носителей алгебраических систем из M используется только носитель исходной алгебраической системы $\mathcal{A}$. Точнее, носители алгебраических систем из M представляют собой множества, состоящие из подмножеств носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Говоря еще более точно, носитель любой алгебраической системы из M представляет собой *множество классов эквивалентных элементов* носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Однако в качестве соответствующего отношения эквивалентности можно брать только некоторые специальные отношения, так называемые *конгруенции*, о которых пойдет речь ниже.

III.1. Конгруенция

Определение 10. Конгруенцией *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *называется* ***отношение эквивалентности*** T, *что для любой* n*-местной операции* f *из* F *и любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *из* Ω *таких, что для всякого номера* i $(x_i; y_i) \in T$, *имеем* $\Big(f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big) \in T$, *т.е.*

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T \\ (x_2; y_2) \in T \\ \ldots \\ (x_n; y_n) \in T \end{cases} \Rightarrow \Big(f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right); f\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)\Big) \in T. \quad (3)$$

Рассмотреть пример?

III.2. Индуцированная операция

Определение 11. *Пусть T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Для каждого элемента x из Ω обозначим через C_x класс эквивалентных относительно T элементов:*

$$C_x = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}.$$

Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C. Определим отображение ψ_T правилом: каждому элементу из Ω поставим в соответствие тот класс эквивалентных по T элементов, в котором этот элемент содержится.

Каждой n-местной операции f из $\mathbf{F}$ поставим в соответствие операцию на Ω_T, определенную правилом

$$f^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (f(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}))^{\psi_T},$$

при этом говорят, что операция f^{ψ_T} **индуцирована операцией** f.

III.3. Индуцированные отношения

Определение 12. *Пусть T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Для каждого элемента x из Ω обозначим через C_x класс эквивалентных относительно T элементов:*

$$C_x = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}.$$

Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C. Определим отображение ψ_T правилом: каждому элементу из Ω поставим в соответствие тот класс эквивалентных по T элементов, в котором этот элемент содержится.

Каждому отношению P из $\mathbf{P}$ поставим в соответствие отношение P^{ψ_T}, для которого $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T}$ тогда и только тогда, когда для каждого i найдутся такие элементы $y_i \in C_i$, что $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in P$. При этом говорят, что отношение P^{ψ_T} **индуцировано отношением** *P.*

III.4. Фактор-система

Определение 13. *Пусть T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$. Для каждого элемента x из Ω обозначим через C_x класс эквивалентных относительно T элементов:*

$$C_x = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}.$$

Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C. Определим отображение ψ_T правилом: каждому элементу из Ω поставим в соответствие тот класс эквивалентных по T элементов, в котором этот элемент содержится.

*Множество операций, **индуцированных операциями** из $\mathbf{F}$ обозначим через $\mathbf{F}_T$, а множество отношений, **индуцированных отношениями** из $\mathbf{P}$ — через $\mathbf{P}_T$. Таким образом, $\mathbf{F}_T = \{f^{\psi_T} \mid f \in \mathbf{F}\}$ и $\mathbf{P}_T = \{P^{\psi_T} \mid P \in \mathbf{P}\}$. Алгебраическая система $A/T = \langle \Omega_T, \mathbf{F}_T, \mathbf{P}_T \rangle$ называется* **фактор-системой** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ по **конгруенции** T.*

Рассмотреть пример?

III.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Теорема 2 (об описании гомоморфных образов). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то справедливы следующие утверждения:*

1. *отношение T_φ, определенное на носителе Ω алгебраической системы $\mathcal{A}$ правилом: $(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$, является **конгруенцией**;*

2. *отображение ψ_{T_φ} является **сильным гомоморфизмом** алгебраической системы $\mathcal{A}$ на фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$.*

3. *Пусть $\mathcal{A}/T_\varphi = \langle \Omega_{T_\varphi}, \mathrm{F}_{T_\varphi}, \mathrm{P}_{T_\varphi} \rangle$ и отображение $\varepsilon : \begin{cases} \Omega_{T_\varphi} & \to & \Omega'; \\ \mathrm{F}_{T_\varphi} & \to & \mathrm{F}'; \\ \mathrm{P}_{T_\varphi} & \to & \mathrm{P}' \end{cases}$ определим правилами: для любого класса C_x из Ω_{T_φ} положим $C_x^\varepsilon = x^\varphi$, для $f'' \in \mathrm{F}_{T_\varphi}$, индуцированной операцией f из F, положим $(f'')^\varepsilon = f^\varphi$, для $p'' \in \mathrm{P}_{T_\varphi}$, индуцированного предикатом p из P, положим $(p'')^\varepsilon = p^\varphi$.*

   *Тогда ε является **взаимно однозначным гомоморфизмом**;*

4. *если φ — **сильный гомоморфизм**, то ε является изоморфизмом.*

III.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно,

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из определения **конгруенции**). Для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно, ψ_T — **гомоморфизм**. Докажем, что это сильный гомоморфизм.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть p — n-местный предикат из P. Если для некоторых классов C_i имеем $p^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 1$, то, по определению p^{ψ_T}, получаем, что для некоторых элементов $x_i \in C_i$ (то есть

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1 (о фактор-системе). *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть p — n-местный предикат из P. Если для некоторых классов C_i имеем $p^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 1$, то, по определению p^{ψ_T}, получаем, что для некоторых элементов $x_i \in C_i$ (то есть $x_i^{\psi_T} = C_i$), имеет место равенство $p(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) = 1$. Это означает, что ψ_T — **сильный гомоморфизм**.

Лемма доказана.

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если* φ *—* ***гомоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}'$*, то отношение* T_φ*, определенное правилом «*$(x;\ y) \in T_\varphi$ *тогда и только тогда, когда* $x^\varphi = y^\varphi$*», является* ***конгруенцией***.

Доказательство.

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) =$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) =$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi.$$

Следовательно, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi$,

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi$, поэтому

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi$, поэтому

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi,$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2 (о конгруенции, порожденной гомоморфизмом). *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруенцией**.*

Доказательство. Пусть $(x_1;\ y_1) \in T_\varphi$, $(x_2;\ y_2) \in T_\varphi$, $\ldots, (x_n;\ y_n) \in T_\varphi$. Тогда, по определению T_φ получаем, что $x_1^\varphi = y_1^\varphi$, $x_2^\varphi = y_2^\varphi$, $\ldots$, $x_n^\varphi = y_n^\varphi$, значит, **по определению гомоморфизма**, во-первых, для любой операции f из F, имеем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi$, поэтому

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi,$$

то есть T_φ — конгруенция. Лемма доказана.

III.8. Доказательство теоремы 2

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

III.8. Доказательство теоремы 2

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

III.8. Доказательство теоремы 2

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

Докажем оставшиеся утверждения теоремы.

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ},

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} =$$

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} =$$

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} =$$

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

III.8. Доказательство теоремы 2

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

Повторяя эти же аргументы в обратном порядке, получаем, что ε — **взаимно однозначное отображение**.

III.8. Доказательство теоремы 2

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

III.8. Доказательство теоремы 2

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из F_{T_φ}, индуцированная n-местной операцией f из F, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный гомоморфизм**.

III.8. Доказательство теоремы 2

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из F_{T_φ}, индуцированная n-местной операцией f из F, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный гомоморфизм**.

Наконец, если φ — **сильный гомоморфизм**, то для любого предиката p'' из P_{T_φ}, индуцированного n-местным предикатом p из P, утверждение

$p''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}) = 1$ тогда и только тогда, когда $p^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$

следует из определения предиката p'' и **определения сильного гомоморфизма**.

Рассмотреть пример?

III.9. Теорема о фактор-системе фактор-системы

Теорема 3 (о фактор-системе фактор-системы). *Если $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ — алгебраическая система, T — ее* ***конгруенция****, T' — некоторая* ***конгруенция*** *фактор-системы $\mathcal{A}/T$, и*

$$T'' = \left\{ (x; y) \,\middle|\, \left(\left\{ x' \,\middle|\, (x; x') \in T \right\}; \left\{ y' \,\middle|\, (y; y') \in T \right\} \right) \in T' \right\},$$

(иными словами, каждый класс эквивалентных по T'' элементов представляет собой объединение элементов всех тех классов эквивалентности по T, которые эквивалентны между собой по T'') то фактор-система $(\mathcal{A}/T)/T'$ изоморфна фактор-системе $\mathcal{A}/T''$.

Доказательство.

Рассмотреть пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?