Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Ранг матрицы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 нахождения ранга матрицы **3**
Пример 1: поиск ранга методом окаймляющих миноров . . 4
Пример 1: поиск столбцового и строчного рангов 12

Нахождение ранга матрицы **31**

Задача I.1 **32**

Задача II.2 **33**

Задача III.3 **34**

Ответы и решения **35**

Пример 1.

1) Найти ***строчный и столбцовый ранги*** *матрицы* **A**, *максимальную линейно независимую систему векторов-строк (столбцов) матрицы* **A**, *выразить остальные строки (столбцы) матрицы* **A**, *как линейные комбинации векторов найденных систем.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Найти ***ранг*** *матрицы* **A** ***методом окаймляющих миноров***.

Решение.

Пример 1.

1) Найти ***строчный и столбцовый ранги*** *матрицы* **A**, *максимальную линейно независимую систему векторов-строк (столбцов) матрицы* **A**, *выразить остальные строки (столбцы) матрицы* **A**, *как линейные комбинации векторов найденных систем.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Найти ***ранг*** *матрицы* **A** ***методом окаймляющих миноров***.

Решение. Сначала найдем ранг матрицы методом окаймляющих миноров. Нетрудно убедиться в том, что минор, построенный на строках с номерами 1,2 и столбцах с номерами 1,2, является ненулевым: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & 0 & 0 & 4 \\ \begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & -1 & 1 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Покажем, что все окаймляющие его миноры — нулевые. Окаймляющих миноров 6 штук:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2.

Вернуться к лекции?

Пример 1.

2) Найти ***ранг*** *матрицы* **A** ***методом окаймляющих миноров***.

Мы сейчас найдем столбцовый ранг матрицы **A**, и одновременно укажем максимальную линейно независимую систему векторов-столбцов матрицы **A**, причем выразим остальные столбцы матрицы **A**, как линейные комбинации векторов найденной системы.

Мы сейчас найдем столбцовый ранг матрицы **A**, и одновременно укажем максимальную линейно независимую систему векторов-столбцов матрицы **A**, причем выразим остальные столбцы матрицы **A**, как линейные комбинации векторов найденной системы.

Сделать это нам позволит простое наблюдение: элементарные преобразования строк и удаление нулевой строки не меняет линейных зависимостей между столбцами. Поэтому проведем элементарные преобразования строк с целью получить в качестве «фрагмента» единичную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

Мы сейчас найдем столбцовый ранг матрицы **A**, и одновременно укажем максимальную линейно независимую систему векторов-столбцов матрицы **A**, причем выразим остальные столбцы матрицы **A**, как линейные комбинации векторов найденной системы.

Сделать это нам позволит простое наблюдение: элементарные преобразования строк и удаление нулевой строки не меняет линейных зависимостей между столбцами. Поэтому проведем элементарные преобразования строк с целью получить в качестве «фрагмента» единичную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Мы сейчас найдем столбцовый ранг матрицы **A**, и одновременно укажем максимальную линейно независимую систему векторов-столбцов матрицы **A**, причем выразим остальные столбцы матрицы **A**, как линейные комбинации векторов найденной системы.

Сделать это нам позволит простое наблюдение: элементарные преобразования строк и удаление нулевой строки не меняет линейных зависимостей между столбцами. Поэтому проведем элементарные преобразования строк с целью получить в качестве «фрагмента» единичную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно уже сказать, что строчный ранг матрицы (а значит, и ранг, и столбцовый ранг) равны 2. Но если провести обратный ход метода Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно уже сказать, что строчный ранг матрицы (а значит, и ранг, и столбцовый ранг) равны 2. Но если провести обратный ход метода Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый и второй столбцы последней матрицы образуют «фрагмент» единичной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый и второй столбцы последней матрицы образуют «фрагмент» единичной матрицы. Поэтому в этой матрице первые два столбца образуют максимальную линейно независимую подсистему векторов (таких максимальных подсистем много).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый и второй столбцы последней матрицы образуют «фрагмент» единичной матрицы. Поэтому в этой матрице первые два столбца образуют максимальную линейно независимую подсистему векторов (таких максимальных подсистем много). Следовательно, и в исходной матрице первые два столбца образуют максимальную линейно независимую подсистему векторов.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец последней матрицы является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-3} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец последней матрицы является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами (-3) и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-3} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец последней матрицы является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами (-3) и 2:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-3} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец последней матрицы является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами (-3) и 2:
$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, в исходной матрице имеем такую же зависимость. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-3} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец последней матрицы является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами (-3) и 2:
$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, в исходной матрице имеем такую же зависимость. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \mathbf{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично с четвертым столбцом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \mathbf{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично с четвертым столбцом:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \mathbf{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично с четвертым столбцом:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \mathbf{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично с пятым столбцом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Аналогично с пятым столбцом:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Аналогично с пятым столбцом:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.37.) Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 15 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.39.) Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 12 & -2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.41.) Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -6 & 6 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 15 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 15 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ. Ранг равен 3.

Решение задачи 2.

Задача 2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 12 & -2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 12 & -2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. Ранг равен 2.

Решение задачи 3.

Задача 3. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -6 & 6 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -6 & 6 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. Ранг равен 4.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?