Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Линейные пространства

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 доказательства линейной зависимости 9

Пример 2 системы порождающих линейного пространства 24

Пример 3 поиска базиса 39

Пример 4 поиска базиса 83

Пример 5 нахождения координат 100

Пример 6 нахождения координат 109

Пример 7 поиска максимальной линейно независимой подсистемы 114

Пример 8 задания подпространства 141

Пример 9 задания подпространства 160

Пример 10 вычисления суммы и пересечения подпространств 243

Пример 11 анализа суммы и пересечения подпространств 326

Пример 12 изоморфизма линейных пространств 337

Пример 13 построения изоморфизма 351

Пример 14 использования определения матрицы перехода 380

Пример 15 поиска и использования матрицы перехода 390

Пример 16 матрицы перехода и подпространства 417

Пример 17 использования матрицы перехода 485

Примеры задач для самостоятельного решения 557

Построение линейных пространств 557

Задача I.1 558

Линейная зависимость и независимость системы векторов 558

Задача II.2 559

Задача II.3 560

Система порождающих 560

Задача III.4 561

Задача III.5 562

Поиск базисов 562

Задача IV.6 563

Задача IV.7 564

Задача IV.8 565

Поиск координат вектора по определению 565

Задача V.9 566

Задача V.10 567

Максимальная линейно независимая подсистема 567

Задача VI.11 568

Алгебра подпространств 568

Задача VII.12 569

Задача VII.13 570

Задача VII.14 571

Изоморфизм линейных пространств 571

Задача VIII.15 572

Задача VIII.16 573

Матрица перехода 573

Задача IX.17 574

Задача IX.18 575

Задача IX.19 576

Типовые планы 576

Задача X.20 577

Задача X.21 578

Задача X.22 579

Задача X.23 580

Ответы и решения 581

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение.

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} & \text{коэффициент при } x^2 \\ & \\ & \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon= & \text{коэффициент при } x^2 \\ & \\ & \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x^2 \\ & \\ & \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x^2 \\ & \text{коэффициент при } x \\ & \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x^2 \\ -2\alpha+2\beta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x \end{cases}$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x^2 \\ -2\alpha+2\beta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x \\ & \text{коэффициент при } x^0 \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. По определению **линейной зависимости** системы векторов

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

По **определению равенства многочленов** в левой и правой частях этого равенства должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменной: учитывая, что $0=0x^2+0x+0x^0$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)x^2+(-2\alpha+2\beta+\varepsilon)x+(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\equiv 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x^2 \\ -2\alpha+2\beta+\varepsilon=0, & \text{коэффициент при } x \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon=0. & \text{коэффициент при } x^0 \end{array}\right.$$

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0, \\ -2\alpha+2\beta+\varepsilon=0, \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon=0. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \text{коэффициент при } x^2 \\ \text{коэффициент при } x \\ \text{коэффициент при } x^0 \end{array}\right.$$

имеет ненулевое решение (которое можно получить, например, **методом Гаусса**).

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. Итак, равенство

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

может выполняться при значениях коэффициентов, не все из которых равны 0.

Пример 1. *Проверьте, является ли* ***линейно зависимой*** *система многочленов* $\left\{(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x^2-1,\ x^2+1,\ x^2+x+1\right\}$.

Решение. Итак, равенство

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma\left(x^2-1\right)+\delta\left(x^2+1\right)+\varepsilon\left(x^2+x+1\right)\equiv 0.$$

может выполняться при значениях коэффициентов, не все из которых равны 0.

Значит, система векторов **линейной зависима** по определению.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение. **По определению системы порождающих линейного пространства** любой многочлен из линейного пространства квадратичных форм должен раскладываться в линейную комбинацию векторов данной системы.

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение. Возьмем произвольный многочлен из U. Обозначим его коэффициенты буквами, например, a, b, c.

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение. Итак, возьмем произвольный многочлен $ax^2+bxy+cy^2$. Обозначим коэффициенты разложения буквами, например, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение. Итак, возьмем произвольный многочлен $ax^2+bxy+cy^2$. Обозначим коэффициенты разложения буквами, например, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\,(x+y)^2+\delta\,(x-y)^2\,.$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \\ xy & \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ y^2 & \end{array}$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \\ xy & \\ y^2 & \end{array} \quad = a, \qquad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & \\ y^2 & \end{array} \quad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & \qquad\qquad\quad =b, \\ y^2 & \end{array} \qquad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & 2\gamma-2\delta=b, \\ y^2 & \end{array} \qquad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & 2\gamma-2\delta=b, \\ y^2 & \qquad\qquad\qquad\quad =c \end{array} \quad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & 2\gamma-2\delta=b, \\ y^2 & \alpha-\beta+\gamma+\delta=c \end{array} \quad \Rightarrow$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & 2\gamma-2\delta=b, \\ y^2 & \alpha-\beta+\gamma+\delta=c \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{a+c}{2}-2\delta, \\ \gamma=\delta, \\ \beta=\dfrac{a-c}{2} \end{cases}$$

Пример 2. *Выяснить, является ли множество* $\left\{x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2\right\}$ ***системой порождающих*** *линейного* ***пространства*** U *квадратичных форм.*

Решение.

$$ax^2+bxy+cy^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta\left(x^2-y^2\right)+\gamma\underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2}+\delta\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \alpha+\beta+\gamma+\delta=a, \\ xy & 2\gamma-2\delta=b, \\ y^2 & \alpha-\beta+\gamma+\delta=c \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{a+c}{2}-2\delta, \\ \gamma=\delta, \\ \beta=\dfrac{a-c}{2} \end{cases}$$

Значит, нужные значения α,β,γ можно найти при любых значениях a,b,c, например, при $\delta=0$. **Вернуться к лекции?**

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти?

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.
Что надо найти? Базис линейного пространства U.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ?

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса:

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По условию эта матрица должна быть **симметричной**, т.е.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По условию эта матрица должна быть **симметричной**, т.е.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По условию эта матрица должна быть **симметричной**, т.е.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Нам надо найти **матрицы**. Матрица определяется **своими коэффициентами**. Поэтому **обозначим буквами** коэффициенты матрицы из базиса: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По условию эта матрица должна быть **симметричной**, т.е.

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Следовательно, $b = c$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Получили, что произвольная матрица из U имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Получили, что произвольная матрица из U имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Теперь мы доказались в непривычной ситуации «почти абсолютной свободы», так как требуемых базисов бесконечно много. Свобода приносит пользу только в том случае, если мы можем ей с толком распорядиться.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Получили, что произвольная матрица из U имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Произвольный вектор линейного пространства U определяется тремя *независимыми* параметрами a, b, d.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Получили, что произвольная матрица из U имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Произвольный вектор линейного пространства U определяется тремя *независимыми* параметрами a, b, d. «Протащим единичку через параметры», то есть положим равными нулю все параметры, кроме одного «исключительного», равного 1,

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Базис линейного пространства U.

В каком виде представим ответ? Перечислим базисные вектора в фигурных скобках.

Введем переменные. Получили, что произвольная матрица из U имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Произвольный вектор линейного пространства U определяется тремя *независимыми* параметрами a, b, d. Положим равными нулю все параметры, кроме одного «исключительного», равного 1, и в качестве такого «исключительного параметра» по очереди будем назначать каждый из трех параметров.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \end{pmatrix}; \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & d \end{pmatrix} \qquad \textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}; \qquad \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & d \end{pmatrix} \qquad \textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \mathbf{d} \end{pmatrix} \qquad \text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \mathbf{d} \end{pmatrix} \qquad \text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили базу (или базис, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили базу (или базис, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Базис (или **базу**), полученную таким «протаскиванием единички через параметры» мы будем в дальнейшем называть *естественным базисом* (термин нестандартный).

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система $\mathbf{Б}$ (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система **Б** (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Во-первых, надо убедиться, что система **Б** **линейно независима**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система $\mathbf{Б}$ (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Во-первых, надо убедиться, что система $\mathbf{Б}$ **линейно независима**.

Во-вторых, следует убедиться, что при добавлении в эту систему хотя бы одного вектора она становится **линейно зависимой**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система **Б** (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Докажем, что система **Б** **линейно независима**:

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система **Б** (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Докажем, что система **Б** **линейно независима**:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система **Б** (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Докажем, что система **Б** **линейно независима**:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверим, что система **Б** (будем считать ее упорядоченной) — действительно **базис**.

Докажем, что система **Б** **линейно независима**:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x = y = z = 0$, что и требовалось доказать.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Теперь докажем **утверждение «во-вторых»**:

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Теперь докажем **утверждение «во-вторых»**: при добавлении в систему **Б** хотя бы одного вектора она становится **линейно зависимой**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Добавим в систему $\mathbf{Б}$ вектор $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) **Б** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Получим систему **Б'** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) **Б** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Получим систему **Б'** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) **Б** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Получим систему **Б'** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Итак, получили **базу** (или **базис**, если считать, что вектора упорядочены) $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Получим систему $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Значит, при добавлении в систему **Б** произвольного вектора из U, она становится **линейно зависимой**.

Пример 3. *Найти какой-либо* ***базис*** *линейного* ***пространства*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2.

Решение. Мы доказали, что система векторов

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

является **базой** (или **базисом**, если считать, что вектора упорядочены) линейного пространства U, состоящего из матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$.

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример**?

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение.

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. Произвольный вектор из U: $ax^0 + bx + cx^2 + dx^3$ однозначно определяют четыре параметра a, b, c, d. Эти параметра независимы в том смысле, что значение каждого из них никаким образом не зависит от значения остальных параметров. Кроме того, вектор является линейной функцией от этих параметров, то есть

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. Произвольный вектор из U: $ax^0 + bx + cx^2 + dx^3$ однозначно определяют четыре параметра a, b, c, d. Эти параметра независимы в том смысле, что значение каждого из них никаким образом не зависит от значения остальных параметров. Кроме того, вектор является линейной функцией от этих параметров, то есть если, например, положить $F(a, b, c, d) = ax^0 + bx + cx^2 + dx^3$, то F является **функцией, линейной по каждому из этих параметров**.

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. Произвольный вектор из U: $ax^0 + bx + cx^2 + dx^3$ однозначно определяют четыре параметра a, b, c, d. Эти параметра независимы в том смысле, что значение каждого из них никаким образом не зависит от значения остальных параметров. Кроме того, вектор является линейной функцией от этих параметров, то есть если, например, положить $F(a, b, c, d) = ax^0 + bx + cx^2 + dx^3$, то F является **функцией, линейной по каждому из этих параметров**.

Напомним, что, например, линейность по параметру определяется равенством $F(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, c, d) = \lambda_1 F(a_1, b, c, d) + \lambda_2 F(a_2, b, c, d)$.

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{ \qquad \}$$

$$\underbrace{\mathbf{a}}_{=1} \cdot x^0 + \underbrace{b}_{=0} \cdot x + \underbrace{c}_{=0} \cdot x^2 + \underbrace{d}_{=0} \cdot x^3$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{ \qquad\qquad \}$$

$$\mathbf{1} \cdot x^0 \quad +0 \cdot x \quad +0 \cdot x^2 \quad +0 \cdot x^3$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, \qquad \}$$

$$\mathbf{1} \cdot x^0 \ +0 \cdot x \ +0 \cdot x^2 \ +0 \cdot x^3 \ = x^0$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, \qquad\qquad \}$$

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 \\ 0 \cdot x^0 & +\mathbf{1} \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 \end{array} = x^0$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, x, \qquad \}$$

$$\begin{array}{lllll} 1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\ 0 \cdot x^0 & +\mathbf{1} \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, x, \qquad \}$$

$$\begin{array}{lllll} 1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\ 0 \cdot x^0 & +1 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \\ 0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +\mathbf{1} \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & \end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\textbf{Б} = \{x^0, x, x^2, \quad \}$$

$$\begin{array}{lllll} 1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\ 0 \cdot x^0 & +1 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \\ 0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +\mathbf{1} \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^2 \end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2, \quad \}$$

$$\begin{array}{lllll}
1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\
0 \cdot x^0 & +1 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +1 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^2 \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +\mathbf{1} \cdot x^3 &
\end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2, x^3\right\}$$

$$\begin{array}{lllll}
1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\
0 \cdot x^0 & +1 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +1 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^2 \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +\mathbf{1} \cdot x^3 & = x^3
\end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получаем систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2, x^3\right\}$$

$$\begin{array}{lllll}
1 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^0 \\
0 \cdot x^0 & +1 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +1 \cdot x^2 & +0 \cdot x^3 & = x^2 \\
0 \cdot x^0 & +0 \cdot x & +0 \cdot x^2 & +1 \cdot x^3 & = x^3
\end{array}$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получили систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2, x^3\right\}.$$

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получили систему векторов:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2, x^3\right\}.$$

Линейная независимость этой системы векторов следует из свойств многочленов. Максимальность этой системы среди всех линейно независимых систем векторов очевидна.

Пример 4. *Найти какой-нибудь* ***базис*** *линейного пространства U многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами.*

Решение. «Протаскиванием единички через параметры» получили систему векторов:

$$\textbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2, x^3\right\}.$$

Линейная независимость этой системы векторов следует из свойств многочленов. Максимальность этой системы среди всех линейно независимых систем векторов очевидна.

Мы доказали, что система векторов **Б** является **базисом**.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому столбец координат матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому столбец координат матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{2} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\mathbf{-1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому столбец координат матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Пример 5. *Найдите* ***координаты*** *вектора* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *линейного пространства* ***симметричных матриц*** *в его* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому столбец координат матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции или рассмотреть **следующий пример**?

Пример 6. *Найдите* ***координаты*** *многочлена* $3-2x+x^3$ *в* ***естественном базисе*** **Б** $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ *линейного пространства многочленов степени не выше 3.*

Решение.

Пример 6. *Найдите* ***координаты*** *многочлена* $3-2x+x^3$ *в* ***естественном базисе*** **Б** $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ *линейного пространства многочленов степени не выше 3.*

Решение.

$$3-2x+x^3=$$

Пример 6. *Найдите* ***координаты*** *многочлена* $3-2x+x^3$ *в* ***естественном базисе*** **Б** $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ *линейного пространства многочленов степени не выше 3.*

Решение.

$$3-2x+x^3=3\cdot x^0+(-2)\cdot x^1+0\cdot x^2+1\cdot x^3,$$

Пример 6. *Найдите* ***координаты*** *многочлена* $3-2x+x^3$ *в* ***естественном базисе*** **Б** $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ *линейного пространства многочленов степени не выше 3.*

Решение.

$$3-2x+x^3=3\cdot x^0+(-2)\cdot x^1+0\cdot x^2+1\cdot x^3,$$

поэтому согласно **формуле из определения координат вектора**, столбец координат многочлена $3-2x+x^3$ в базисе $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$

имеет вид $\left[3-2x+x^3\right]_{\mathbf{Б}}=$

Пример 6. *Найдите* ***координаты*** *многочлена* $3-2x+x^3$ *в* ***естественном базисе*** $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ *линейного пространства многочленов степени не выше 3.*

Решение.

$$3-2x+x^3=3\cdot x^0+(-2)\cdot x^1+0\cdot x^2+1\cdot x^3,$$

поэтому согласно **формуле из определения координат вектора**, столбец координат многочлена $3-2x+x^3$ в базисе $=\left\{x^0,x,x^2,x^3\right\}$ имеет вид $\left[3-2x+x^3\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Вернуться к лекции или **рассмотреть следующий пример**?

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

Типовой план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1) ввести базис;

Типовой план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1) ввести базис;

2) переформулировать задачи в терминах арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ («пространства координат»), обычно это сведение к анализу системы линейных уравнений или матричного уравнения;

Типовой план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1) ввести базис;

2) переформулировать задачи в терминах арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ («пространства координат»), обычно это сведение к анализу системы линейных уравнений или матричного уравнения;

3) решить полученную задачу для $\mathbb{R}^n$ (например, решить уравнения);

Типовой план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1) ввести базис;

2) переформулировать задачи в терминах арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ («пространства координат»), обычно это сведение к анализу системы линейных уравнений или матричного уравнения;

3) решить полученную задачу для $\mathbb{R}^n$ (например, решить уравнения);

4) интерпретировать результаты для исходного линейного пространства.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 1) **типового плана**: введем **базис**.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. **Естественный базис** линейного пространства U мы уже находили при решении **примера 3**:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**:

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 2) **типового плана**: переформулируем задачу для $\mathbb{R}^3$. Надо найти максимальную линейно независимую подсистему столбцов координат исходной системы векторов в **естественном базисе**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Результат выполнения пункт 2) **типового плана**: для $\mathbb{R}^3$ исходную задачу можно переформулировать как требование найти максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение. Выполним пункт 3) **типового плана**: решим задачу в $\mathbb{R}^3$: найдем максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Элементарные преобразования строк не меняют зависимостей между столбцами.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Ясно, что **первые три столбца линейно независимы**.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Значит, первые три матрицы исходной системы образуют максимальную линейно независимую систему.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Найдем разложение четвертого столбца в виде комбинации первых трех.

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В поиске максимальной линейно независимой подсистемы системы $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right\}$ получили

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним пункт 4) **типового плана**:

В поиске максимальной линейно независимой подсистемы системы $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right\}$ получили

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним пункт 4) **типового плана**:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *U — линейное пространство* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2. В системе векторов* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ *найти какую-либо максимальную* ***линейно независимую подсистему*** *$\mathcal{A}$ и выразить остальные вектора этой системы, как* ***линейную комбинацию*** *векторов системы $\mathcal{A}$. Проверить, является ли $\mathcal{A}$* ***базой*** *линейного* ***пространства*** *U.*

Ответ. Система $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, поэтому она не является базисом. Линейно независима система из первых трех матриц, причем

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение.

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \middle| \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \left\{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\right\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-5} & -3 \\ 0 & 1 & \mathbf{9} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-5} & -3 \\ 0 & 1 & \mathbf{9} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & 9 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & 9 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a\,(x-1) + b\,(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} C\left(5\,(x-1) - 9\,(x+1) + \left(x^2-1\right)\right) + \\ +D\left(3\,(x-1) - 5\,(x+1) + \left(x^3-1\right)\right) \end{array} \;\middle|\; \{C,\ D\} \subseteq \mathbb{R} \right\} =$$

$$\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8. *Пусть* ***подпространство*** V *линейного пространства многочленов степени не выше 3 задано в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{x-1,\ x+1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$ *системой уравнений* $\begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0. \end{cases}$ *Тогда* $V =$

Решение. $V =$

$$= \left\{ a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right) \,\middle|\, \begin{cases} 2a+b-c-d=0, \\ 3a+2b+3c+d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} C\left(5(x-1)-9(x+1)+\left(x^2-1\right)\right)+ \\ +D\left(3(x-1)-5(x+1)+\left(x^3-1\right)\right) \end{array} \,\middle|\, \{C,\ D\} \subseteq \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle 5(x-1)-9(x+1)+\left(x^2-1\right),\ \ 3(x-1)-5(x+1)+\left(x^3-1\right) \right\rangle.$$

Вернуться к лекции или **рассмотреть следующий пример?**

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x, y)$, что выполняется тождество $f(x + 2y, x - 2y) = f(2x + y, 2x - y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

Нам надо доказать, что

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y), \\ g(x+2y, x-2y) = g(2x+y, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

Нам надо доказать, что

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y), \\ g(x+2y, x-2y) = g(2x+y, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \in V.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y), \\ g(x+2y, x-2y) = g(2x+y, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y), \\ g(x+2y, x-2y) = g(2x+y, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha f(x+2y, x-2y) + \beta g(x+2y, x-2y) =$$

$$= \alpha f(2x+y, 2x-y) + \beta g(2x+y, 2x-y) \Rightarrow$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Для доказательства, что V — подпространство, воспользуемся **критерием подпространства**.

$$\begin{cases} f(x,y) \in V, \\ g(x,y) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y), \\ g(x+2y, x-2y) = g(2x+y, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha f(x+2y, x-2y) + \beta g(x+2y, x-2y) =$$

$$= \alpha f(2x+y, 2x-y) + \beta g(2x+y, 2x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \in V.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x, y)$, что выполняется тождество $f(x + 2y, x - 2y) = f(2x + y, 2x - y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Свести решение полученной задачи к системе линейных уравнений или матричному уравнению.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение.

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат. Для подпространства — система линейных уравнений или задание с помощью базиса.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$a\cdot\ x^2\ +b\cdot\ xy\ +c\cdot\ y^2$$

$$\downarrow$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot\ x^2 & +b\cdot\ xy & +c\cdot\ y^2 \\ \downarrow & & \\ 1\cdot & & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot\ xy & +c\cdot\ y^2 \\ \downarrow & & & \\ 1\cdot & x^2 & & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & xy \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llllll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +0\cdot & \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +0\cdot & y^2 \end{array}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +0\cdot & y^2 \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$a\cdot\ x^2\ +b\cdot\ xy\ +c\cdot\ y^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{lll} a\cdot\ x^2 & +b\cdot\ xy & +c\cdot\ y^2 \\ \downarrow & & \\ 0\cdot & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{lll} a\cdot & x^2 & +b\cdot \quad xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \\ 0\cdot & x^2 & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0\cdot & x^2 & & & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & xy \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & xy & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & xy & +0\cdot & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & xy & +0\cdot & y^2 \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +1\cdot & xy & +0\cdot & y^2 \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$a\cdot\ x^2\ +b\cdot\ xy\ +c\cdot\ y^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{lll} a\cdot\ x^2 & +b\cdot\ xy & +c\cdot\ y^2 \\ \downarrow & & \\ 0\cdot & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{lll} a\cdot\ x^2 & +b\cdot\ xy & +c\cdot\ y^2 \\ \downarrow & & \\ 0\cdot\ x^2 & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0\cdot & x^2 & & & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy \quad +c\cdot \quad y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & xy \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{llll} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +1\cdot & \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +1\cdot & y^2 \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\begin{array}{cccccc} a\cdot & x^2 & +b\cdot & xy & +c\cdot & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\cdot & x^2 & +0\cdot & xy & +1\cdot & y^2 \end{array} \qquad \mathbf{Б} = \left\{x^2,\ xy,\ y^2\right\}.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: **Б** $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Надо задать подпространство V системой уравнений.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Надо задать подпространство V системой уравнений.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Что надо найти?

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Что надо найти? Подпространство.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Что надо найти? Подпространство. *В каком виде представим ответ?*

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Что надо найти? Подпространство. *В каком виде представим ответ?* Уравнениями.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Система уравнений, задающая подпространство — это

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Система уравнений, задающая подпространство — это утверждение о

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Система уравнений, задающая подпространство — это утверждение о ***координатах*** *произвольного вектора из V.*

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Система уравнений, задающая подпространство — это утверждение о ***координатах*** *произвольного вектора из V.*

Обозначим буквами

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Система уравнений, задающая подпространство — это утверждение о ***координатах*** *произвольного вектора из V.*

Обозначим буквами **координаты** вектора из V: $\quad ax^2 + bxy + cy^2$.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Обозначим буквами координаты вектора из V:

$$\left[ax^2 + bxy + cy^2\right]_{\{x^2,\ xy,\ y^2\}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$ax^2 + bxy + cy^2 \in V.$$

Составим уравнение.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: **Б** $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$ax^2 + bxy + cy^2 \in V.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Воспользуемся характеристическим свойством подпространства V:

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** исходного линейного пространства: $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$ax^2 + bxy + cy^2 \in V.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Воспользуемся характеристическим свойством подпространства V: $a(x+2y)^2 + b(x+2y)(x-2y) + c(x-2y)^2 =$

$$= a(2x+y)^2 + b(2x+y)(2x-y) + c(2x-y)^2$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

$$a(x+2y)^2 + b(x+2y)(x-2y) + c(x-2y)^2 =$$
$$= a(2x+y)^2 + b(2x+y)(2x-y) + c(2x-y)^2$$

Значение какой величины вычислим двумя способами? Двумя способами вычислим коэффициенты перед x^2 (первое уравнение):

$$\begin{cases} a + b + c = 4a + 4b + 4c, \\ \\ \end{cases}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

$$a(x+2y)^2 + b(x+2y)(x-2y) + c(x-2y)^2 =$$
$$= a(2x+y)^2 + b(2x+y)(2x-y) + c(2x-y)^2$$

Значение какой величины вычислим двумя способами? Двумя способами вычислим коэффициенты перед xy (второе уравнение):

$$\begin{cases} a + b + c = 4a + 4b + 4c, \\ 4a - 4c = 4a - 4c, \end{cases}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

$$a(x+2y)^2 + b(x+2y)(x-2y) + c(x-2y)^2 =$$
$$= a(2x+y)^2 + b(2x+y)(2x-y) + c(2x-y)^2$$

Значение какой величины вычислим двумя способами? Двумя способами вычислим коэффициенты перед y^2 (третье уравнение):

$$\begin{cases} a+b+c = 4a+4b+4c, \\ 4a-4c = 4a-4c, \\ 4a-4b+4c = a-b+c. \end{cases}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$:

$$V = \left\{ ax^2 + bxy + cy^2 \;\middle|\; \begin{cases} a + b + c = 4a + 4b + 4c, \\ 4a - 4c = 4a - 4c, \\ 4a - 4b + 4c = a - b + c. \end{cases} \right\}.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} a+b+c = 4a+4b+4c, \\ 4a-4c = 4a-4c, \\ 4a-4b+4c = a-b+c. \end{cases}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} -3a - 3b - 3c = 0, \\ 0 = 0, \\ 3a - 3b + 3c = 0. \end{cases}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли фундаментальную систему решений полученной системы уравнений.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли фундаментальную систему решений полученной системы уравнений.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли фундаментальную систему решений полученной системы уравнений.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве. Используем определение столбца координат вектора.

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли ФСР полученной системы уравнений.

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве. По определению столбца координат вектора в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли ФСР полученной системы уравнений.

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве. По определению столбца координат вектора в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to (-1) \cdot x^2 +$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли ФСР полученной системы уравнений.

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве. По определению столбца координат вектора в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to (-1) \cdot x^2 + 0 \cdot xy +$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как* ***линейную оболочку*** *базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли ФСР полученной системы уравнений.

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве. По определению столбца координат вектора в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to (-1) \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot y^2.$$

Пример 9. *Рассмотрим линейное пространство U квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Доказать, что подпространством является подмножество V таких квадратичных форм $f(x,y)$, что выполняется тождество $f(x+2y, x-2y) = f(2x+y, 2x-y)$. Задать подпространство V системой уравнений и как линейную оболочку базиса.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$: надо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

2. Нашли ФСР полученной системы уравнений.

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$V = \left\{ ax^2 + bxy + cy^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a+b+c = 4a+4b+4c, \\ 4a-4b+4c = a-b+c \end{array} \right. \right\} = \langle -x^2 + y^2 \rangle .$$

Вернуться к лекции?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Свести решение полученной задачи к системе линейных уравнений или матричному уравнению.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение.

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат. Для подпространства — система линейных уравнений или задание с помощью базиса.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Каковы стандартные способы задания подпространства?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный базис:

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Какой из стандартных способов задания подпространства выбрать: системой линейных уравнений или задание с помощью базиса?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Какой из стандартных способов задания подпространства выбрать: системой линейных уравнений или задание с помощью базиса?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Какой из стандартных способов задания подпространства выбрать: системой линейных уравнений или задание с помощью базиса? Для отыскания пересечения удобнее использовать задание подпространства системой уравнений, а для нахождения суммы — как **линейную оболочку** базиса.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Какой из стандартных способов задания подпространства выбрать: системой линейных уравнений или задание с помощью базиса? Придется использовать оба способа!

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств. *Что надо найти?*

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств. *Что надо найти?* Сумму подпространств.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств. *Что надо найти?* Сумму подпространств. *В каком виде запишем ответ?*

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств. *Что надо найти?* Сумму подпространств. *В каком виде запишем ответ?* Сумма подпространств — это подпространство.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Начнем с поиска суммы подпространств. *Что надо найти?* Сумму подпространств. *В каком виде запишем ответ?* Сумма подпространств — это подпространство. Подпространства стандартно задаются как линейная оболочка базиса (или другой системы образующих) или с помощью системы линейных уравнений.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств. Очевидно, что объединение базисов подпространств V и W является системой порождающих суммы подпространств $V + W$.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств. Очевидно, что объединение базисов подпространств V и W является системой порождающих суммы подпространств $V + W$. Система порождающих (даже базис) для подпространства W нам дана в условии.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств. Очевидно, что объединение базисов подпространств V и W является системой порождающих суммы подпространств $V + W$. Система порождающих (даже базис) для подпространства W нам дана в условии. Поэтому осталось найти систему порождающих для V.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств, надо задать подпространство V системой уравнений.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств, надо задать подпространство V системой уравнений.

Уравнения — это *стандартная форма* фиксации отношений между

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Ищем сумму подпространств, надо задать подпространство V системой уравнений.

Уравнения — это *стандартная форма* фиксации отношений между *координатами вектора из V*.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Уравнения — это *стандартная форма* фиксации отношений между *координатами вектора из V*.

Введем переменные.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Уравнения — это *стандартная форма* фиксации отношений между *координатами вектора из V*.

Возьмем произвольный вектор из V и обозначим буквами коэффициенты его разложения по базису **Б**:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? Воспользуемся характеристическим свойством, с помощью которого задано V:

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? Воспользуемся характеристическим свойством, с помощью которого задано V:

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0, \\ 2a + 4c = 0, \\ 2b + 4d = 0. \end{cases}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Получили задание V в одной из стандартных форм:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0, \\ 2a + 4c = 0, \\ 2b + 4d = 0. \end{cases} \right\}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввели *естественный базис* линейного пространства U.

1 б) Получили задание V в одной из стандартных форм:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0, \\ 2a + 4c = 0, \\ 2b + 4d = 0. \end{cases} \right\}$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, надо найти фундаментальную систему решений полученной системы.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Найти фундаментальную систему решений полученной системы.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0, \\ 2a + 4c = 0, \\ 2b + 4d = 0. \end{cases} \right\}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$\begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0, \\ 2a + 4c = 0, \\ 2b + 4d = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Прообразы векторов найденной фундаментальной системы решений найдем по соответствующей формуле:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[+0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} a + 2c = 0, \\ b + 2d = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Полученная система порождающих на является базисом. Для получения стандартного задания суммы подпространств надо из полученной системы порождающих выбрать максимальную линейно независимую подсистему.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе*, и «сошъем» их в одну матрицу.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат:

$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат:

$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$
$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$			

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат:

$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$	$\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}$
$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат:

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат:

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат и «сошъем» их в одну матрицу:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор заменим столбцом координат в *естественном базисе* по определению столбца координат и «сошъем» их в одну матрицу:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами, поэтому найдем максимальнуую линейно независимую систему столбцов, проводя элементарные преобразования строк:

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами, поэтому найдем максимальную линейно независимую систему столбцов, проводя элементарные преобразования строк:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, линейно независимой является система из первых трех векторов.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Значит, линейно независимой является система из первых трех векторов. Поэтому в качестве базиса пространства $V + W$ можно взять систему из первых трех векторов:

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Значит, линейно независимой является система из первых трех векторов. Поэтому в качестве базиса пространства $V + W$ можно взять систему из первых трех векторов:

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ причем}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Значит, линейно независимой является система из первых трех векторов. Поэтому в качестве базиса пространства $V + W$ можно взять систему из первых трех векторов:

$$V + W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ причем}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Осталось найти пересечение $V \cap W$.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Осталось найти пересечение $V \cap W$.

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Осталось найти пересечение $V \cap W$.

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Зададим оба подпространства системой линейных уравнений. Для V мы это уже сделали. Найдем систему для W.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. *Что надо найти?*

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. *Что надо найти?* Систему уравнений.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Что надо найти? Систему уравнений.

В каком виде представим ответ?

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Что надо найти? Систему уравнений.

В каком виде представим ответ? Формулой.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Что надо найти? Систему уравнений.

В каком виде представим ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Что надо найти? Систему уравнений.

В каком виде представим ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Возьмем произвольный вектор из W и обозначим его **координаты** в базисе **Б** буквами:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Возьмем произвольный вектор из W и обозначим его **координаты** в базисе **Б** буквами:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Нам надо найти <u>уравнение</u>, поэтому обозначим буквами его коэффициенты.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* В виде $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ мы ищем уравнение, которому удовлетворяют **координаты** любых векторов подпространства W.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* В виде $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ мы ищем уравнение, которому удовлетворяют **координаты** любых векторов подпространства W. Подставляя **координаты** векторов системы образующих (из условия), получаем

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = 0, \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta = 0, \end{cases}$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Решим систему

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = 0, \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta = 0, \end{cases}$$

методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1,6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1,6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1,2 & 0 & 1 \\ 0 & 1,6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит W тогда и только тогда, когда

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0, \text{ где } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит W тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 1,2x + y - 1,6z = 0, \\ -x + t = 0, \end{cases}$ то есть (первое уравнение умножим на 5, чтобы избавиться от дробей)

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Иными словами (первое уравнение системы $\begin{cases} 1,2x + y - 1,6z = 0, \\ -x + t = 0, \end{cases}$ умножим на 5, чтобы избавиться от дробей)

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} 6x + 5y - 8z = 0, \\ -x + t = 0, \end{cases} \right\}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Вектор из U попадает в $V \cap W$ тогда и только тогда, когда он содержится и в V, и в W.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Вектор из U попадает в $V \cap W$ тогда и только тогда, когда он содержится и в V, и в W. Таким образом его **координаты** удовлетворяют обоим системам уравнений.

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Вектор из U попадает в $V \cap W$ тогда и только тогда, когда он содержится и в V, и в W. Таким образом его **координаты** удовлетворяют обоим системам уравнений. Значит, $V \cap W =$

$$= \left\{ p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} p + 2r = 0, \\ q + 2s = 0, \\ 6p + 5q - 8r = 0, \\ -p + s = 0 \end{cases} \right\}.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Решение. Вектор из U попадает в $V \cap W$ тогда и только тогда, когда он содержится и в V, и в W. Таким образом его **координаты** удовлетворяют обоим системам уравнений. Значит, $V \cap W =$

$$= \left\{ p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} p + 2r = 0, \\ q + 2s = 0, \\ 6p + 5q - 8r = 0, \\ -p + s = 0 \end{cases} \right\}.$$

Решая последнюю систему, находим пересечение

$$V \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пример 10. *В линейном пространстве U матриц размерности 2×2 над $\mathbb{R}$ заданы подпространства*

$$V = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найдите $V + W$ и $V \cap W$.

Замечание. Так как это пересечение — не нулевое, то сумма $U + V$ не является прямой суммой пространств U и V.

Вернуться к лекции?

Пример 11. *Пусть* V *и* W *— подпространства линейного пространства* U. *В каком случае* $V \cap W = V$, *а в каком —* $V + W = V$?

Решение.

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V \cap W = V \Leftrightarrow V \subseteq W$.

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V \cap W = V \;\Leftrightarrow\; V \subseteq W$. Действительно,

$$V \cap W = V \;\Rightarrow$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V \cap W = V \;\Leftrightarrow\; V \subseteq W$. Действительно,

$$V \cap W = V \;\Rightarrow\; (x \in V \;\Rightarrow\; x \in V \cap W) \;\Rightarrow$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V \cap W = V \;\Leftrightarrow\; V \subseteq W$. Действительно,

$$V \cap W = V \;\Rightarrow\; (x \in V \;\Rightarrow\; x \in V \cap W) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x \in V \;\Rightarrow\; x \in W) \;\Rightarrow$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V \cap W = V \;\Leftrightarrow\; V \subseteq W$. Действительно,

$$V \cap W = V \;\Rightarrow\; (x \in V \;\Rightarrow\; x \in V \cap W) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x \in V \;\Rightarrow\; x \in W) \;\Rightarrow\; V \subseteq W.$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $\quad V + W = V \;\Leftrightarrow\; W \subseteq V.$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V + W = V \;\Leftrightarrow\; W \subseteq V$. Действительно,

$V + W = V \;\Rightarrow$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V + W = V \;\Leftrightarrow\; W \subseteq V$. Действительно,

$$V + W = V \;\Rightarrow\; \left(\forall v, w\ \exists v' \left(\left\{\begin{array}{l} v \in V, \\ w \in W, \\ v' \in V \end{array}\right. \Rightarrow\; v + w = v'\right)\right) \;\Rightarrow$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V + W = V \;\Leftrightarrow\; W \subseteq V$. Действительно,

$$V + W = V \;\Rightarrow\; \left(\forall v, w\ \exists v' \left(\left\{\begin{array}{l} v \in V, \\ w \in W, \\ v' \in V \end{array}\right. \Rightarrow\; v + w = v'\right)\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; w = v' - v \in V \;\Rightarrow$$

Пример 11. *Пусть V и W — подпространства линейного пространства U. В каком случае $V \cap W = V$, а в каком — $V + W = V$?*

Решение. Ясно, что $V + W = V \Leftrightarrow W \subseteq V$. Действительно,

$$V + W = V \Rightarrow \left(\forall v, w \; \exists v' \left(\left\{ \begin{array}{l} v \in V, \\ w \in W, \\ v' \in V \end{array} \right. \Rightarrow v + w = v' \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = v' - v \in V \Rightarrow W \subseteq V.$$

Вернуться к лекции?

Пример 12. *Рассмотрим линейные пространства U и V над полем действительных чисел, где U — линейное пространство многочленов степени не выше 1 от переменной t, а V — линейное пространство диагональных матриц размерности 2×2. Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textbf{многочлен } a + bt \textbf{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Пример 12. *Рассмотрим линейные пространства U и V над полем действительных чисел, где U — линейное пространство многочленов степени не выше 1 от переменной t, а V — линейное пространство диагональных матриц размерности 2×2. Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textbf{многочлен } a + bt \textbf{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Доказывать это утверждение мы не будем, а только проверим на конкретной формуле.

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$2\cdot \quad (2-t) \quad +3\cdot \quad (2+4t) \quad = \quad 10\cdot \quad (1+t)$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$2\cdot \quad (2-t) \quad +3\cdot \quad (2+4t) \quad = \quad 10\cdot \quad (1+t)$$

$$2\cdot$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$2\cdot \quad (2-t) \quad +3\cdot \quad (2+4t) \quad = \quad 10\cdot \quad (1+t)$$

$$\downarrow$$

$$2\cdot$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & & & & \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & & & & & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$2\cdot \quad (2-t) \quad +3\cdot \quad (2+4t) \quad = \quad 10\cdot \quad (1+t)$$

$$\downarrow$$

$$2\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +3\cdot$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & & & & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & & & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & = & & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & = & 10\cdot & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & = & 10\cdot & \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & = & 10\cdot & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 12. *Если в формуле теории линейных пространств, верной для пространства U, заменить многочлены на матрицы следующим образом:*

$$\textit{многочлен } a + bt \textit{ заменим на матрицу } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то получим формулу, верную для V.

Например, после такого преобразования верной формулы

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot & (2-t) & +3\cdot & (2+4t) & = & 10\cdot & (1+t) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ 2\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & +3\cdot & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & = & 10\cdot & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

получим верную формулу.

Вернуться к лекции?

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства* U *квадратичных форм* $f(x, y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ *и линейного пространства* V ***кососимметричных матриц*** *размерности* 3×3.

Решение.

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства* U *квадратичных форм* $f(x, y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ *и линейного пространства* V ***кососимметричных матриц*** *размерности* 3×3.

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**.

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$\mathbf{a}\,x^2 + b\,xy + c\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{\mathbf{1}\,x^2 + 0\,xy + 0\,y^2,$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$\mathbf{a}\,x^2 + b\,xy + c\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$a\,x^2 + \mathbf{b}\,xy + c\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ 0\,x^2 + \mathbf{1}\,xy + 0\,y^2,$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$a\,x^2 + \mathbf{b}\,xy + c\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$a\,x^2 + b\,xy + \mathbf{c}\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ 0\,x^2 + 0\,xy + \mathbf{1}\,y^2,$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:

$a\,x^2 + b\,xy + \mathbf{c}\,y^2, \qquad \mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}.$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:
Б $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Выберем естественный **базис** пространства V:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:
Б $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Выберем естественный **базис** пространства V:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} & b \\ -\mathbf{a} & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:
Б $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Выберем естественный **базис** пространства V:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & \mathbf{b} \\ -a & 0 & c \\ -\mathbf{b} & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:
Б $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Выберем естественный **базис** пространства V:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & \mathbf{c} \\ -b & -\mathbf{c} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выберем естественный **базис** пространства U:
Б $= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$.

Выберем естественный **базис** пространства V:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм?

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм? Для этого надо ответить на вопрос:

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм? Для этого надо ответить на вопрос:
что такое изоморфизм?

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм? Для этого надо ответить на вопрос:
что такое изоморфизм? Изоморфизм — это функция.

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм? Для этого надо ответить на вопрос:
что такое изоморфизм? Изоморфизм — это функция.
Наиболее применяемый способ задания функции —

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Как зададим изоморфизм? Для этого надо ответить на вопрос:
что такое изоморфизм? Изоморфизм — это функция.
Наиболее применяемый способ задания функции — формула.

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) =$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\textbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\textbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\mathbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\textbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 13. *Докажите* ***изоморфность*** *линейного пространства U квадратичных форм $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ и линейного пространства V* ***кососимметричных матриц*** *размерности 3×3.*

Обычно решение задач по линейной алгебре начинается **со введения базиса**. Выбрали естественные базисы пространств U и V:

$$\textbf{Б} = \left\{x^2, xy, y^2\right\}, \ \textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f\left(a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2\right) = a\,f\left(x^2\right) + b\,f\left(xy\right) + c\,f\left(y^2\right) =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение.

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i =$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 =$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n =$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n = (-1) m +$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n = (-1)m +$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n = (-1)m + 5n.$$

Пример 14. *Пусть* **Б** $= \{m, n\}$ *и* **Б'** $= \{p, q\}$ *— базисы линейного пространства* U, *и* $\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Найдите разложение вектора* q *по базису* **Б**.

Решение. Положим $e_1 = m, \quad e_2 = n$.

По определению матрицы перехода имеем

$$q = \sum_{i=1}^{2} t_{i2} e_i = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 = t_{12} m + t_{22} n = (-1)m + 5n.$$

Вернуться к лекции?

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение.

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. Применим типовой план решения задач по линейной алгебре:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Формулирование начинается со введения базиса. Это уже сделано.

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$s = p - q =$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$s = p - q = 1p + (-1)q,$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$s = p - q = 1p + (-1)q,$ $\quad \mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$$\begin{aligned} s &= p - q = 1p + (-1)q, \\ t &= q - 2p = \end{aligned} \qquad \mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$$\begin{aligned} s &= p - q = 1p + (-1)q, \\ t &= q - 2p = -2p + 1q \end{aligned} \qquad \mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Вектору сопоставляем столбец координат. Паре базисов сопоставляется матрица перехода:

$$\begin{aligned} s &= p - q = 1p + (-1)q, \\ t &= q - 2p = -2p + 1q \end{aligned} \qquad \mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}}$, откуда

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left([2p+q]_{\mathbf{Б}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б}} \right) =$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left([2p+q]_{\mathbf{Б}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б}'} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б}'} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$, откуда

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$\left([2p+q]_{\textbf{Б}'} \;\; [q-p]_{\textbf{Б}'} \;\; [p+q]_{\textbf{Б}'} \right) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$\left([2p+q]_{\text{Б'}} \;\; [q-p]_{\text{Б'}} \;\; [p+q]_{\text{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$[2p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$[2p+q]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Пример 15. *Известно, что* $\mathbf{Б} = \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в* $\mathbf{В} = \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение. 3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

$$\left([2p+q]_{\mathbf{Б'}} \;\; [q-p]_{\mathbf{Б'}} \;\; [p+q]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$[2p+q]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p+q]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение.

$$[2p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение.

$$[2p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$(-4)(p - q) - 3(q - 2p) = 2p + q.$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение.

$$[2p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$(-1)(p-q) + 0(q-2p) = -p + q = q - p.$

Пример 15. *Известно, что* **Б** $= \{p, q\}$ — ***базис*** *линейного пространства* U, *и* $s = p - q$, $t = q - 2p$. *Найдите матрицы перехода из* **Б** *в* **В** $= \{s, t\}$ *и обратно. Найдите* ***координаты*** *векторов* $2p + q$, $q - p$, $p + q$.

Решение.

$$[2p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [q-p]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [p+q]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$(-3)(p - q) - 2(q - 2p) = p + q.$

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример?**

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение.

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \tag{2}$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. В задаче сформулированы следующие требования:

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. В задаче сформулированы следующие требования:

1) найти базис $\mathbf{B}$ подпространства V; 2) выбрать векторы из V и 3) найти координаты отобранных векторов из V в базисе $\mathbf{B}$.

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \tag{2}$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Для ответа на каждое из требований применим типовой план решения задач по линейной алгебре:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \tag{2}$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \tag{2}$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат.

Пример 16. *Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \tag{2}$$

Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Нам известны и стандартные способы задания подпространства.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Нам известны и стандартные способы задания подпространства.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства U:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства U:

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства U:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства U:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & \mathbf{d} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис пространства U:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Возьмем произвольный вектор из V и разложим его по базису **Б**:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Возьмем произвольный вектор из V и разложим его по базису **Б**:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V, поэтому удовлетворяет условию (2):

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V, поэтому удовлетворяет условию (2): $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, т.е.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V, поэтому удовлетворяет условию (2): $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ x - 4z = 0, \\ 4t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Итак, вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ x - 4z = 0, \\ 4t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Итак, вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ x - 4z = 0, \\ 4t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$$

Найдем **базис** пространства решений — фундаментальную систему решений:

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Итак, вектор $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ принадлежит V тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ x - 4z = 0, \\ 4t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$$

Найдем **базис** пространства решений — фундаментальную систему решений:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ x - 4z = 0, \\ 4t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$$

Найдем **базис** пространства решений — фундаментальную систему решений:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +.$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3. Интерпретировать результат в исходном пространстве:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 16. *1) Пусть U — линейное пространство матриц размерности 2×2. Найдите* ***базис*** *его подпространства*

$$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}. \qquad (2)$$

Решение. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$..

В качестве ответа на первое требование исходной задачи получен следующий базис подпространства V: $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Перейдем к поиску ответа на второе из требований.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. В данном случае можно подставить каждый из векторов в равенство из характеристического свойства векторов из V:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X.$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

поэтому $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \notin V$ и т.д.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. Можно совместить ответ на второе и третье требования и попытаться разложить эти векторы по базису $\mathbf{B}$, т.е. решить уравнения

$x \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ и т.д.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. Можно совместить ответ на второе и третье требования и попытаться разложить эти векторы по базису $\mathbf{B}$, т.е. решить уравнения

$x \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ и т.д.

Хлопотно!

Пример 16. $$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. Применим другую идею: дополним базис **B** до базиса **Б'** всего пространства и найдем **координаты** данных векторов в базисе **Б'**. Таким образом мы совместим ответ на второе и третье требования задачи, поскольку

Пример 16. $$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V.

Решение. Применим другую идею: дополним базис **B** до базиса **Б'** всего пространства и найдем **координаты** данных векторов в базисе **Б'**. Таким образом мы совместим ответ на второе и третье требования задачи, поскольку у векторов из V в разложении по **Б'** коэффициенты перед «добавленными» векторами будут нулевыми.

Пример 16. $$V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Для реализации каждого этого плана, естественно, вновь применим типовой план решения задач по линейной алгебре:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Дополним **В** векторами из **Б**:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

и выберем максимальную линейно независимую подсистему, содержащую два первых вектора (такую задачу мы уже решали).

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Дополним **В** векторами из **Б**:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Дополним **В** векторами из **Б**:

$$\left\{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему, содержащую два первых вектора (такую задачу мы уже решали). Каждый вектор заменим столбцом его координат и соберем эти столбцы в матрицу. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Поэтому применим метод Гаусса так, чтобы первые два из 6 столбцов входили во фрагмент единичной матрицы:

Решение. Дополним **В** векторами из **Б**:

$$\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему, содержащую два первых вектора (такую задачу мы уже решали). Каждый вектор заменим столбцом его координат и соберем эти столбцы в матрицу. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Поэтому применим метод Гаусса так, чтобы первые два из 6 столбцов входили во фрагмент единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix}4&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim$$

Решение. Дополним **B** векторами из **Б**:

$$\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему, содержащую два первых вектора (такую задачу мы уже решали). Каждый вектор заменим столбцом его координат и соберем эти столбцы в матрицу. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Поэтому применим метод Гаусса так, чтобы первые два из 6 столбцов входили во фрагмент единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix}4&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Значит, в качестве **Б'** можно взять систему:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Первый пункт нашего плана выполнен.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Значит, в качестве **Б'** можно взять систему:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Найдем матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\text{Б}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\text{Б'}\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдем матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$Б\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

$$Б'\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдем матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$Б\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

$$Б'\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдем матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$Б\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

$$Б'\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдем матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}=\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Значит, в качестве **Б'** можно взять систему:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы нашли матрицу перехода из **Б** в **Б'**:

$$\mathbf{T}_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Мы нашли матрицу перехода из базиса **Б** в базис **Б'**:

$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$.

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$. Мы нашли матрицу перехода из базиса **Б** в базис **Б'**:

$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу:

$$\mathbf{T_{Б\to Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{T_{Б\to Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{T_{Б\to Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{T_{Б\to Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдем обратную матрицу:

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{T_{Б\to Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдем обратную матрицу:

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах имеем $[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$. Мы нашли матрицы перехода из базиса **Б** в базис **Б'** и обратно:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \mathbf{T}_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 15 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. $V = \left\{ X \in U \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right\}.$

2) Среди векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

выберите все векторы из V и найдите их ***координаты*** *в построенном вами базисе пространства V.*

Решение. $[x]_{\text{Б'}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 15 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & -2 \\ 4 & 4 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ 2 & & \\ 15 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & -2 \\ 4 & 4 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ 2 & & \\ 15 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 15 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример?**

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. Типичный план решения задачи по линейной алгебре состоит из следующих пунктов:

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.
3. Интерпретировать результат в исходном пространстве.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение.

1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$. Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

Какова стандартная процедура перехода в пространство $\mathbb{R}^n$?

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе. Например, для вектора — это столбец координат. Для подпространства — система линейных уравнений или задание с помощью базиса.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \rightarrow$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \longrightarrow \ x^0$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\to\; x^0$$
$$0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \to \ x^0$$
$$0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \to$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \to \ x^0$$
$$0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \to \ x$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\ \to\ x^0 \\ 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\ \to\ x \\ 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 & \end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\to x^0 \\ 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\to x \\ 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 &\to \end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Ввести **базис** исходного линейного пространства.

Возьмем естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\to x^0 \\ 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 &\to x \\ 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 &\to x^2 \end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный **базис** пространства многочленов $ax^0 + bx + cx^2$ степени не выше 2:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \rightarrow$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \longrightarrow\ (x+2)^0$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \longrightarrow\ (x+2)^0$$
$$0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \to\ (x+2)^0$$
$$0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \to$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \rightarrow\ (x+2)^0$$
$$0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \rightarrow\ (x+2)$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$\begin{aligned}
&1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \to\ (x+2)^0 \\
&0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 \ \to\ (x+2) \\
&0 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+2)^2
\end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$\begin{aligned}
1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 &\ \to\ (x+2)^0 \\
0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 &\ \to\ (x+2) \\
0 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+2)^2 &\ \to
\end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили естественный базис:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}.$$

В условии все многочлены представлены разложением по степеням $(x+2)$: $p + q(x+2) + r(x+2)^2$. Поэтому рационально построить базис, обусловленный этим представлением:

$$\begin{aligned}
1 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 &\ \to\ (x+2)^0 \\
0 \cdot (x+2)^0 + 1 \cdot (x+2) + 0 \cdot (x+2)^2 &\ \to\ (x+2) \\
0 \cdot (x+2)^0 + 0 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+2)^2 &\ \to\ (x+2)^2
\end{aligned}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Найдем матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Найдем матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}}$.

Столбцами матрицы перехода являются столбцы координат векторов «нового» базиса в «старом» базисе.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\text{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\text{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \text{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Найдем матрицы перехода $T_{\text{Б'}\to\text{Б}}$ и $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$.

Столбцами матрицы перехода являются столбцы координат векторов «нового» базиса в «старом» базисе.

Поэтому

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} =$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} =$$

$$x-1 = -1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \left(\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$x - 1 = -1 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right.$$

$$x-1 = -1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+1 = 1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - 1 = -1 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x + 1 = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x-1 = -1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+1 = 1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2-1 = -1\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x-1 = -1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+1 = 1\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2-1 = -1\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Итак, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Итак, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогично найдем $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}}$.

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} =$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{x-1, x+1, x^2-1\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} =$$

$$(x+2)^0 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$(x+2)^0 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x+2)^0 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x + 2 = 2 \cdot x^0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x+2)^0 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+2 = 2\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x+2)^0 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+2 = 2\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 4\cdot x^0 + 4\cdot x + 1\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б} = \left\{(x+2)^0, (x+2), (x+2)^2\right\},$$

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x+2)^0 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x+2 = 2\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 4\cdot x^0 + 4\cdot x + 1\cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Итак, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса:

$$\textbf{Б'} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}, \quad \textbf{Б''} = \left\{(x+2)^0,\ (x+2),\ (x+2)^2\right\}.$$

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Итак, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь найдем матрицу перехода $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Мы получили матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б"}}$.

Теперь найдем матрицу перехода $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}$. Введем следующие обозначения: **Б'** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б** $= \{v_1, v_2, v_3\}$, **Б"** $= \{w_1, w_2, w_3\}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Мы получили матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б"}}$.

Теперь найдем матрицу перехода $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}$. Введем следующие обозначения: **Б'** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б** $= \{v_1, v_2, v_3\}$, **Б"** $= \{w_1, w_2, w_3\}$. Мы ищем коэффициенты матрицы, определяемой, равенствами $w_i = C_{1i}v_1 + C_{2i}v_2 + C_{3i}v_3$.

Мы ищем коэффициенты матрицы, определяемой, равенствами $w_i = C_{1i}v_1 + C_{2i}v_2 + C_{3i}v_3$. Переходя к столбцам координат в базисе **Б'**, получаем с помощью умножения матриц «на макроуровне»

$$[w_i]_{\textbf{Б'}} = C_{1i}\,[v_1]_{\textbf{Б'}} + C_{2i}\,[v_2]_{\textbf{Б'}} + C_{3i}\,[v_3]_{\textbf{Б'}} =$$

$$= \left([v_1]_{\textbf{Б'}}\ [v_2]_{\textbf{Б'}}\ [v_3]_{\textbf{Б'}}\right) \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{pmatrix} = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{pmatrix}.$$

Мы ищем коэффициенты матрицы, определяемой, равенствами $w_i = C_{1i}v_1 + C_{2i}v_2 + C_{3i}v_3$. Переходя к столбцам координат в базисе **Б'**, получаем с помощью умножения матриц «на макроуровне»

$$[w_i]_{\textbf{Б'}} = C_{1i}\,[v_1]_{\textbf{Б'}} + C_{2i}\,[v_2]_{\textbf{Б'}} + C_{3i}\,[v_3]_{\textbf{Б'}} =$$

$$= \left([v_1]_{\textbf{Б'}}\ [v_2]_{\textbf{Б'}}\ [v_3]_{\textbf{Б'}}\right) \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{pmatrix} = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{pmatrix}.$$

$[w_i]_{\textbf{Б'}}$ являются столбцами матрицы $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}}$, поэтому

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = \left([w_1]_{\textbf{Б'}}\ [w_2]_{\textbf{Б'}}\ [w_3]_{\textbf{Б'}}\right) = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Мы получили матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б"}}$.

Теперь найдем матрицу перехода $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}$. Введем следующие обозначения: **Б'** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б** $= \{v_1, v_2, v_3\}$, **Б"** $= \{w_1, w_2, w_3\}$.

Мы получили полезную формулу:

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б”**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Мы получили матрицы перехода $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}}$ и $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б”}}$.

Теперь найдем матрицу перехода $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б”}}$. Введем следующие обозначения: $\textbf{Б'} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\textbf{Б} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\textbf{Б”} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Мы получили полезную формулу:

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б”}} = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б”}}. \tag{3}$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б”**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}. \tag{3}$$

В нашем случае

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б"}} = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}. \tag{3}$$

В нашем случае $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}.$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б”**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Отсюда

$$T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б”}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б”**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Отсюда

$$T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б”}} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}\,[f_i(x)]_{\textbf{Б"}}$.

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

$$T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}\,[f_i(x)]_{\textbf{Б"}}$.

Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}\,[f_i(x)]_{\textbf{Б"}}$.

Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\textbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б"}}\,[f_i(x)]_{\textbf{Б"}}$.

Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

Пример 17. *С помощью матрицы перехода найти разложения многочленов* $f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2$, $f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2$, $f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2$, $f_4(x) = 1 - (x+2)^2$ *по базису*

$$\mathbf{Б} = \left\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\right\}.$$

Решение. 1. Переформулировать задачу для пространства $\mathbb{R}^n$.

1 а) Получили два естественных базиса: базисы **Б** и **Б"**.

1 б) Использовать стандартное представление объекта в базисе.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б"}}\,[f_i(x)]_{\mathbf{Б"}}$.

Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\left([f_1(x)]_{\mathbf{Б}} \;\; [f_2(x)]_{\mathbf{Б}} \;\; [f_3(x)]_{\mathbf{Б}} \;\; [f_4(x)]_{\mathbf{Б}} \right) =$$

$$= T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б"}} \left([f_1(x)]_{\mathbf{Б"}} \;\; [f_2(x)]_{\mathbf{Б"}} \;\; [f_3(x)]_{\mathbf{Б"}} \;\; [f_4(x)]_{\mathbf{Б"}} \right) =$$

$$f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2, \quad f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2,$$
$$f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2, \quad f_4(x) = 1 - (x+2)^2.$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б}''}[f_i(x)]_{\textbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\textbf{Б}} & [f_2(x)]_{\textbf{Б}} & [f_3(x)]_{\textbf{Б}} & [f_4(x)]_{\textbf{Б}} \end{pmatrix} =$$
$$= T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б}''} \begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\textbf{Б}''} & [f_2(x)]_{\textbf{Б}''} & [f_3(x)]_{\textbf{Б}''} & [f_4(x)]_{\textbf{Б}''} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''}[f_i(x)]_{\mathbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_2(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_3(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_4(x)]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\textbf{Б}} = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б}''}[f_i(x)]_{\textbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\textbf{Б}} & [f_2(x)]_{\textbf{Б}} & [f_3(x)]_{\textbf{Б}} & [f_4(x)]_{\textbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2 = -1(x-1) + 8(x+1) + 2(x^2-1),$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''}[f_i(x)]_{\mathbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_2(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_3(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_4(x)]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2 = -1(x-1) + 8(x+1) + 2(x^2-1),$$

$$f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2 = 0.5(x-1) + 4.5(x+1) + 1(x^2-1),$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''}[f_i(x)]_{\mathbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_2(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_3(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_4(x)]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2 = -1(x-1) + 8(x+1) + 2(x^2-1),$$

$$f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2 = 0.5(x-1) + 4.5(x+1) + 1(x^2-1),$$

$$f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2 = -2(x-1) + 7(x+1) + 1(x^2-1),$$

2. Решить полученную задачу в $\mathbb{R}^n$.

Согласно формуле, имеем $[f_i(x)]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''}[f_i(x)]_{\mathbf{Б}''}$. Используя умножение матриц «на макроуровне», получаем

$$\begin{pmatrix} [f_1(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_2(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_3(x)]_{\mathbf{Б}} & [f_4(x)]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0 \\ 8 & 4.5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = 1 - (x+2) + 2(x+2)^2 = -1(x-1) + 8(x+1) + 2(x^2-1),$$

$$f_2(x) = (x+2) - 3 + (x+2)^2 = 0.5(x-1) + 4.5(x+1) + 1(x^2-1),$$

$$f_3(x) = 2 + (x+2) + (x+2)^2 = -2(x-1) + 7(x+1) + 1(x^2-1),$$

$$f_4(x) = 1 - (x+2)^2 = 0(x-1) - 4(x+1) - 1(x^2-1).$$

Вернуться к лекции?

Задания для самостоятельного выполнения

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.583.) На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.611.) Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.626.) Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.639.) Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.645.) Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.651.) Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Задача IV.7. (Ответ приведен на стр.659.) Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Задача IV.8. (Ответ приведен на стр.667.) На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.672.) Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах

Б $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах

Б' $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах

В $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.684.) Найдите **координаты** многочлена $\left(x^2 - x\right)$ в базисе $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x - 1, x^2 - 1\right\}$.

Задача VI.11. (Ответ приведен на стр.694.) Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \left\{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\right\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Задача VII.12. (Ответ приведен на стр.708.) Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Задача VII.13. (Ответ приведен на стр.744.) В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \left\langle (x+y)^2 \right\rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ x^2, xy, y^2 \right\}$.

Задача VII.14. (Ответ приведен на стр.765.) Докажите, что в линейном пространстве U многочленов степени не выше 4 подпространствами являются подмножества

$$V = \left\{ f(x) \,\middle|\, \begin{cases} f(x) \in U, \\ f(-1) = f'(-1) = 0 \end{cases} \right\},$$

$$W = \left\langle 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4, \quad 6 + 7x - 6x^2 - 3x^3 + x^4 \right\rangle.$$

Найдите сумму и пересечение этих подпространств.

Задача VIII.15. (Ответ приведен на стр.769.) **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Задача VIII.16. (Ответ приведен на стр.781.) Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Задача IX.17. (Ответ приведен на стр.796.) Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Задача IX.18. (Ответ приведен на стр.809.) Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Задача IX.19. (Ответ приведен на стр.842.) Пусть $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б"**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б"**.

Задача X.20. (Ответ приведен на стр.858.) Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Задача X.21. (Ответ приведен на стр.864.) Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Задача X.22. (Ответ приведен на стр.869.) Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Задача X.23. (Ответ приведен на стр.879.) Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.
Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:
$f(x) \boxed{+} g(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.
Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:
$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.
Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:
$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.
Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:
$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \big(f^{\lambda}(x)\big)^{\mu} =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x),$$

$$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x).$$

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \big(f^{\lambda}(x)\big)^{\mu} = \mu \boxed{\cdot} (\lambda \boxed{\cdot} f(x))$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \big(f^{\lambda}(x)\big)^{\mu} = \mu \boxed{\cdot} (\lambda \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 8: $1 \boxed{\cdot} f(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \big(f^{\lambda}(x)\big)^{\mu} = \mu \boxed{\cdot} (\lambda \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 8: $1 \boxed{\cdot} f(x) = f^{1}(x) =$

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \left(f(x) \boxed{+} g(x)\right) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \left(f^{\lambda}(x)\right)^{\mu} = \mu \boxed{\cdot} (\lambda \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 8: $1 \boxed{\cdot} f(x) = f^{1}(x) = f(x)$.

Задача 1. На множестве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, где $p > 0$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$. Докажите, что V является **линейным пространством**.

Ответ. Надо проверить выполнение **аксиом линейного пространства**.

Коммутативность и ассоциативность «сложения» следуют из свойств умножения чисел:

$f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = g(x) \boxed{+} f(x)$,

$\Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) \boxed{+} h(x)$.

В качестве нулевого вектора выступает функция $f(x) = 1 \cdot 10^{0x} \equiv 1$.

В роли обратного вектора к функции $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ выступает функция $\tilde{f}(x) = \left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot 10^{(-q)x}$.

Аксиома 5: $\lambda \boxed{\cdot} \Big(f(x) \boxed{+} g(x)\Big) = (f(x) \cdot g(x))^{\lambda} = f^{\lambda}(x) \cdot g^{\lambda}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\lambda \boxed{\cdot} g(x))$.

Аксиома 6: $(\lambda + \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda+\mu)}(x) = f^{\lambda}(x) \cdot f^{\mu}(x) = (\lambda \boxed{\cdot} f(x)) \boxed{+} (\mu \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 7: $(\lambda \cdot \mu) \boxed{\cdot} f(x) = f^{(\lambda \cdot \mu)}(x) = \big(f^{\lambda}(x)\big)^{\mu} = \mu \boxed{\cdot} (\lambda \boxed{\cdot} f(x))$.

Аксиома 8: $1 \boxed{\cdot} f(x) = f^{1}(x) = f(x)$.

Значит, V — линейное пространство.

Решение задачи 2.

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta =$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha= \\ \beta= \\ \gamma= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta= \\ \beta= \\ \gamma= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta= \\ \gamma= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta= \\ \gamma= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta=0, \\ \gamma= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta=0, \\ \gamma=\Delta_\gamma/\Delta= \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta=0, \\ \gamma=\Delta_\gamma/\Delta=0. \end{array}\right.$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta=0, \\ \gamma=\Delta_\gamma/\Delta=0. \end{array}\right.$$

Следовательно, исходная система является **линейно независимой**:

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow$$

Задача 2. Проверьте, является ли **линейно зависимой** или **независимой** система многочленов $\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

Ответ.

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l|l} \gamma=0, & x^2 \\ \alpha+\beta=0, & x \\ -\alpha+\beta=0 & x^0 \end{array}\right.$$

Воспользуемся **формулами Крамера**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta_\alpha=\Delta_\beta=\Delta_\gamma=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} \alpha=\Delta_\alpha/\Delta=0, \\ \beta=\Delta_\beta/\Delta=0, \\ \gamma=\Delta_\gamma/\Delta=0. \end{array}\right.$$

Следовательно, исходная система является **линейно независимой**:

$$\alpha\,(x-1)+\beta\,(x+1)+\gamma\left(x^2-1\right)\equiv 0\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} p + 2q + 2r + 3s + t & -p + 3q + 3r + s \\ p + q + r + 3s & 2p + 2q - 2r + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2t, \\ q = 0, \\ r = -t, \\ s = t. \end{cases}$$

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2t, \\ q = 0, \\ r = -t, \\ s = t. \end{cases}$$

Например, при $t = 1$ получаем ненулевой набор искомых значений переменных

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2t, \\ q = 0, \\ r = -t, \\ s = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2, \\ q = 0, \\ r = -1, \\ s = 1. \end{cases}$$

Например, при $t = 1$ получаем ненулевой набор искомых значений переменных

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2t, \\ q = 0, \\ r = -t, \\ s = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2, \\ q = 0, \\ r = -1, \\ s = 1. \end{cases}$$

Например, при $t = 1$ получаем ненулевой набор искомых значений переменных, в итоге получаем нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору:

Задача 3. Проверьте, является **линейно зависимой** или **независимой** система матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По определению **линейно зависимой** и **линейно независимой** системы векторов надо проверить может ли равенство

$$p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняться при ненулевых значениях коэффициентов.

$$\begin{cases} p + 2q + 2r + 3s + t = 0, \\ -p + 3q + 3r + s = 0, \\ p + q + r + 3s = 0, \\ 2p + 2q - 2r + s + t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2t, \\ q = 0, \\ r = -t, \\ s = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2, \\ q = 0, \\ r = -1, \\ s = 1. \end{cases}$$

Например, при $t = 1$ получаем ненулевой набор искомых значений переменных, в итоге получаем нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору:

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$,

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = x, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = y, \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = x, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = y, \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim$$

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = x, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = y, \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x+y-4z)/5 \\ 0 & 1 & 0 & (4x-y-6z)/5 \\ 0 & 0 & 1 & (-3x+2y+7z)/5 \end{array}\right)$$

Задача 4. Выясните, является ли системой порождающих линейного пространства U **кососимметричных матриц** совокупность матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = x, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = y, \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x+y-4z)/5 \\ 0 & 1 & 0 & (4x-y-6z)/5 \\ 0 & 0 & 1 & (-3x+2y+7z)/5 \end{array}\right)$$

Следовательно, исходное множество является системой порождающих для линейного пространства кососимметричных матриц.

Решение задачи 5.

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 3\gamma + 3\varepsilon = a, \\ -\alpha + 2\beta + \delta + 3\varepsilon = b, \\ 2\alpha - \beta + \gamma - \delta + 4\varepsilon = c, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon = d \end{cases}$$

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 3\gamma + 3\varepsilon = a, \\ -\alpha + 2\beta + \delta + 3\varepsilon = b, \\ 2\alpha - \beta + \gamma - \delta + 4\varepsilon = c, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon = d \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & a \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & b \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 4 & c \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & d \end{array} \right)$$

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 3\gamma + 3\varepsilon = a, \\ -\alpha + 2\beta + \delta + 3\varepsilon = b, \\ 2\alpha - \beta + \gamma - \delta + 4\varepsilon = c, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon = d \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrrrr|c} 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & a \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & b \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 4 & c \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 28 & -3a + 4b + 6c + d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 18 & (-a + 3b + 3c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 & 7a - 9b - 13c - 2d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4a + 4b + 6c + 2d \end{array}\right)$$

Задача 5. Проверьте, является ли системой порождающих линейного пространства матриц размерности 2×2 множество матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. $\alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 3\gamma + 3\varepsilon = a, \\ -\alpha + 2\beta + \delta + 3\varepsilon = b, \\ 2\alpha - \beta + \gamma - \delta + 4\varepsilon = c, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon = d \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrrrr|c} 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & a \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & b \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 4 & c \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 28 & -3a + 4b + 6c + d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 18 & (-a + 3b + 3c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 & 7a - 9b - 13c - 2d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4a + 4b + 6c + 2d \end{array}\right)$$

Значит, исходное множество является системой образующих.

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}.$$

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}.$$

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}.$$

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 6. Найдите базис линейного пространства $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ всех матриц с действительными коэффициентами размерности 2×2.

Ответ. Матрицы из $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

«Протаскиванием единицы через параметры» получаем базис

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача решена.

Решение задачи 7.

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е.

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы из U имеют вид

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы из U имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & 0 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$. «Протаскивая единичку через параметры» b_1, c_1, c_2, получаем искомый базис:

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы из U имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & 0 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$. «Протаскивая единичку через параметры» b_1, c_1, c_2, получаем искомый базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$.

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы из U имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & 0 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$. «Протаскивая единичку через параметры» b_1, c_1, c_2, получаем искомый базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \right\}$.

Задача 7. Найдите базис линейного пространства U **кососимметричных матриц** с действительными коэффициентами размерности 3×3.

Ответ. Для $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in U$ по **определению кососимметричных матриц** имеем $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы из U имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & 0 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$. «Протаскивая единичку через параметры» b_1, c_1, c_2, получаем искомый базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Решение задачи 8.

Задача 8. На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Задача 8. На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Ответ. Для того, чтобы найти базис линейного пространства V, представим функцию $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ в виде $f(x) = p \cdot 10^{qx} = a^r \cdot 10^{qx}$, где $0 < a \neq 10$.

Задача 8. На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Ответ. Для того, чтобы найти базис линейного пространства V, представим функцию $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ в виде $f(x) = p \cdot 10^{qx} = a^r \cdot 10^{qx}$, где $0 < a \neq 10$.
Например, $f(x) = 2^r \cdot 10^{qx}$. Тогда можно получить искомый базис «протаскиванием единички через параметры»:

Задача 8. На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Ответ. Для того, чтобы найти базис линейного пространства V, представим функцию $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ в виде $f(x) = p \cdot 10^{qx} = a^r \cdot 10^{qx}$, где $0 < a \neq 10$.
Например, $f(x) = 2^r \cdot 10^{qx}$. Тогда можно получить искомый базис «протаскиванием единички через параметры»: $\{2; \qquad \}$.

Задача 8. На линейном пространстве V функций, задаваемых тождествами $f(x) = p \cdot 10^{qx}$, операция «сложение» $\boxed{+}$ определена формулой $f(x) \boxed{+} g(x) = f(x) \cdot g(x)$, «умножение $\lambda \boxed{\cdot}$ на скаляр λ» — формулой $\lambda \boxed{\cdot} f(x) = f^{\lambda}(x)$ (см. **задачу I.1**). Найдите базис линейного пространства V.

Ответ. Для того, чтобы найти базис линейного пространства V, представим функцию $f(x) = p \cdot 10^{qx}$ в виде $f(x) = p \cdot 10^{qx} = a^r \cdot 10^{qx}$, где $0 < a \neq 10$.
Например, $f(x) = 2^r \cdot 10^{qx}$. Тогда можно получить искомый базис «протаскиванием единички через параметры»: $\{2;\ 10^x\}$.

Решение задачи 9.

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** из равенства

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\textbf{Б}} =$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **Б'** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\textbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **Б'** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **Б'** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **В** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **В** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **В** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{В}} =$

Задача 9. Найдите **координаты** матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ в базисах $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{Б'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, в базисах $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. По **определению столбца координат** для базиса **В** из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{В}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 10.

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x - 1, x^2 - 1\}$.

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 - 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите **координаты** многочлена $(x^2 - x)$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x-1, x^2-1\}$.

Ответ.

$$\left[x^2 - x\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \left[0 \cdot x^0 + (-1) \cdot (x-1) + 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]_{\{x^0, x-1, x^2-1\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2:

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) =$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три многочлена образуют линейно независимую систему $\{x^2-1,\ x^2+1,\ (x-1)^2\}$ и, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то .

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три многочлена образуют линейно независимую систему $\{x^2-1,\ x^2+1,\ (x-1)^2\}$ и, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $(x+1)^2 =$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три многочлена образуют линейно независимую систему $\{x^2-1,\ x^2+1,\ (x-1)^2\}$ и, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 =$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три многочлена образуют линейно независимую систему $\{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2\}$ и, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 2\,(x^2+1) + (-1)(x-1)^2 =$

Задача 11. Найдите максимальную **линейно независимую** подсистему системы многочленов $\mathbf{B} = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2,\ (x+1)^2\}$ и выразите остальные вектора этой системы в виде линейной комбинации выбранной подсистемы.

Ответ. Возьмем естественный базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\mathbf{B} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\left(\left[x^2-1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[x^2+1\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x-1)^2\right]_{\mathbf{B}}\ \left[(x+1)^2\right]_{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три многочлена образуют линейно независимую систему $\{x^2 - 1,\ x^2 + 1,\ (x-1)^2\}$ и, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 2\,(x^2+1) + (-1)(x-1)^2 = 2\,(x^2+1) + (-1)\,(x^2 - 2x + 1)$.

Решение задачи 12.

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = 0, \\ \\ \end{cases}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{B}^t = \mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{B}^t = \mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})^t = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{B}^t = \mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})^t = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. По **критерию подпространства** надо проверить, что

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

По свойствам **транспонирования матриц**

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in V, \\ \mathbf{B} \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{B}^t = \mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})^t = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}, \\ \operatorname{tr}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \in V.$$

Следовательно, V — это подпространство.

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2:

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \ \Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = c, \\ a + d = 0 \end{cases} \;\Rightarrow$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = c, \\ a + d = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = c, \\ a + d = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$$

$$V = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\}.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = c, \\ a + d = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \qquad\qquad \right\}.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Зададим подпространство с помощью системы уравнений. Возьмем естественный базис пространства матриц размерности 2×2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Тогда

$$\mathbf{A} \in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = c, \\ a + d = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса,

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi =$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} & \\ & \\ \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как линейную оболочку базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \mathbf{1} \\ -1 & \mathbf{0} \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \mathbf{1} \\ -1 & \mathbf{0} \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \end{pmatrix}, \qquad \right\rangle.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \end{pmatrix}, \qquad \right\rangle.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \right\rangle.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \right\rangle.$$

Задача 12. Докажите, что в **линейном пространстве** $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ матриц размерности 2×2 множество V всех **симметричных матриц** с нулевым **следом** является **подпространством**. Задайте его системой линейных уравнений и как **линейную оболочку** его базиса.

Ответ. Итак, в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ подпространство V задано с помощью системы уравнений:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Для того, чтобы задать V как **линейную оболочку** базиса, найдем **фундаментальную систему решений** полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} b - c = 0, \\ a + d = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Решение задачи 13.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти?

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ?

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 =$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$(1\ 2\ 1) \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \langle (x+y)^2 \rangle = \left\{ \qquad\qquad \middle| \qquad\qquad \right\}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$(1\ 2\ 1) \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \langle (x+y)^2 \rangle = \left\{ ax^2 + bxy + cy^2 \;\middle|\; \qquad\qquad \right\}$$

Задача 13. В линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y задайте подпространство $V = \langle (x+y)^2 \rangle$ системой уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2, xy, y^2\}$.

Ответ. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Уравнения для координат квадратичной формы из V в базисе $\mathbf{Б}$.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Введем переменные. Обозначим коэффициенты уравнения через α, β, γ, и **координаты** вектора из V через a, b, c.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? **координаты** многочлена $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ должны удовлетворять уравнению $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Следовательно для искомых коэффициентов получили уравнение $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Найдем фундаментальную систему решений:

$$(1\ 2\ 1) \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$V = \langle (x+y)^2 \rangle = \left\{ ax^2 + bxy + cy^2 \;\middle|\; \begin{cases} -2a + b = 0, \\ -a + c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Решение задачи 14.

Задача 14. Докажите, что в линейном пространстве U многочленов степени не выше 4 подпространствами являются подмножества

$$V = \left\{ f(x) \,\middle|\, \begin{cases} f(x) \in U, \\ f(-1) = f'(-1) = 0 \end{cases} \right\},$$

$$W = \left\langle 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4, \quad 6 + 7x - 6x^2 - 3x^3 + x^4 \right\rangle.$$

Найдите сумму и пересечение этих подпространств.

Задача 14. Докажите, что в линейном пространстве U многочленов степени не выше 4 подпространствами являются подмножества

$$V = \left\{ f(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} f(x) \in U, \\ f(-1) = f'(-1) = 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$W = \left\langle 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4, \quad 6 + 7x - 6x^2 - 3x^3 + x^4 \right\rangle.$$

Найдите сумму и пересечение этих подпространств.

Ответ.

$$V = \left\langle 1 + 2x + x^2, \quad -2 - 3x + x^2, \quad 3 + 4x + x^4 \right\rangle.$$

Задача 14. Докажите, что в линейном пространстве U многочленов степени не выше 4 подпространствами являются подмножества

$$V = \left\{ f(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} f(x) \in U, \\ f(-1) = f'(-1) = 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$W = \left\langle 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4, \quad 6 + 7x - 6x^2 - 3x^3 + x^4 \right\rangle.$$

Найдите сумму и пересечение этих подпространств.

Ответ.

$$V = \left\langle 1 + 2x + x^2, \quad -2 - 3x + x^2, \quad 3 + 4x + x^4 \right\rangle.$$

$$V + W = \left\langle 1 + 2x + x^2, \quad -2 - 3x + x^2, \quad 3 + 4x + x^4, \right.$$

$$\left. = 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4 \right\rangle.$$

Задача 14. Докажите, что в линейном пространстве U многочленов степени не выше 4 подпространствами являются подмножества

$$V = \left\{ f(x) \,\middle|\, \begin{cases} f(x) \in U, \\ f(-1) = f'(-1) = 0 \end{cases} \right\},$$

$$W = \left\langle 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4, \quad 6 + 7x - 6x^2 - 3x^3 + x^4 \right\rangle.$$

Найдите сумму и пересечение этих подпространств.

Ответ.

$$V = \left\langle 1 + 2x + x^2, \quad -2 - 3x + x^2, \quad 3 + 4x + x^4 \right\rangle.$$

$$V + W = \left\langle 1 + 2x + x^2, \quad -2 - 3x + x^2, \quad 3 + 4x + x^4, \right.$$

$$\left. = 7 + 9x + 2x^2 - x^3 + 2x^4 \right\rangle.$$

$$V \cap W = \left\langle 13 + 16x - 4x^2 - 4x^3 + 3x^4 \right\rangle.$$

Решение задачи 15.

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\mathbf{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\mathbf{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\mathbf{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\mathbf{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \qquad \qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 15. **Постройте** «стандартный» **изоморфизм** линейного пространства $M_{2\times 2}$ матриц размерности 2×2 на линейное пространство $\mathbb{R}^4$ матриц-столбцов.

Ответ.

$$\text{Б}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Б}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 16.

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_2(x)} = \left\{ x^0, \qquad \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_2(x)} = \left\{ x^0,\ x, \quad \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_2(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

$$g \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

$$g \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = g \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \qquad\qquad\qquad\qquad \right) =$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

$$g \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = g \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \qquad \right) =$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

$$g \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = g \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 16. Постройте **изоморфизм** линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матриц-столбцов на линейное пространство $\mathcal{P}_2(x)$ многочленов степени не выше 2, обратный к «**стандартному**».

Ответ. **Воспользуемся теоремой о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbf{Б}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Построим естественный базис пространства $\mathcal{P}_2(x)$ по аналогии с решением **примера 4**:

$$\mathbf{Б}_{\mathcal{P}_4(x)} = \left\{ x^0,\ x,\ x^2 \right\},$$

По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$**

$$g\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = g\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

Решение задачи 17.

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m = t_{1m}u_1 + t_{2m}u_2 + t_{3m}u_3 =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m = t_{1m}u_1 + t_{2m}u_2 + t_{3m}u_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} t_{km}u_k$,

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m = t_{1m}u_1 + t_{2m}u_2 + t_{3m}u_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} t_{km}u_k$,

4) $Y_\alpha =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m = t_{1m}u_1 + t_{2m}u_2 + t_{3m}u_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} t_{km}u_k$,

4) $Y_\alpha = t_{1\alpha}X_1 + t_{2\alpha}X_2 + t_{3\alpha}X_3 + t_{4\alpha}X_4 =$

Задача 17. Запишите определение **матрицы перехода** $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ для следующих случаев: 1) **Б** $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, **Б'** $= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$; 2) **Б** $= \{p_1, p_2\}$, **Б'** $= \{q_1, q_2\}$; 3) **Б** $= \{u_1, u_2, u_3\}$, **Б'** $= \{v_1, v_2, v_3\}$; 4) **Б** $= \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, **Б'** $= \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$;

Ответ. 1) $e'_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3 + t_{4i}e_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} t_{ji}e_j$,

2) $q_i = t_{1i}p_1 + t_{2i}p_2 = \sum\limits_{s=1}^{2} t_{si}p_s$,

3) $v_m = t_{1m}u_1 + t_{2m}u_2 + t_{3m}u_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} t_{km}u_k$,

4) $Y_\alpha = t_{1\alpha}X_1 + t_{2\alpha}X_2 + t_{3\alpha}X_3 + t_{4\alpha}X_4 = \sum\limits_{\beta=1}^{4} t_{\beta\alpha}X_\beta$.

Решение задачи 18.

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса **Б** $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис **В** $= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ и $T_{\text{Б'}\to\text{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} =$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} =$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 2 & & & \\ -4 & & & \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & & \\ 2 & & \\ -4 & & \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & & \\ 2 & 4 & & \\ -4 & -5 & & \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & & \\ 2 & 4 & & \\ -4 & -5 & & \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите **матрицу перехода** из базиса $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в базис $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и, используя $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ и $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}}$, **координаты** матриц $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ в базисах **Б** и **Б'**.

Ответ. По **определению матрицы перехода** получаем $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б'}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 19.

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Задача 19. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = (t_{ij})$.

Задача 19. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б"**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б"**.

Ответ. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода**

Задача 19. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i =$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$.

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} =$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\, [e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \left[e'_j\right]_{\text{Б}}.$$

$$= \left([e''_1]_{\text{Б}} \ \cdots \ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1} \left[e'_j\right]_{\text{Б}} \ \cdots \ \sum_{j=1}^{n} t_{jn} \left[e'_j\right]_{\text{Б}}\right) =$$

Задача 19. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}} = \left(t'_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}} = \left(t''_{ij}\right)$, $T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\textbf{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\textbf{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \left[e'_j\right]_{\textbf{Б}}.$$

$$T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б''}} = \left([e''_1]_{\textbf{Б}} \ \cdots \ [e''_n]_{\textbf{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1} \left[e'_j\right]_{\textbf{Б}} \ \cdots \ \sum_{j=1}^{n} t_{jn} \left[e'_j\right]_{\textbf{Б}}\right) =$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \left[e'_j\right]_{\text{Б}}.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}} \ \dots \ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1} \left[e'_j\right]_{\text{Б}} \ \dots \ \sum_{j=1}^{n} t_{jn} \left[e'_j\right]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}} \ \dots \ [e'_n]_{\text{Б}}\right) \begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix} \ \dots \ \left([e'_1]_{\text{Б}} \ \dots \ [e'_n]_{\text{Б}}\right) \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\,[e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1}\,[e'_j]_{\text{Б}}\ \dots\ \sum_{j=1}^{n} t_{jn}\,[e'_j]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\left(\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\,[e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1}\,[e'_j]_{\text{Б}}\ \dots\ \sum_{j=1}^{n} t_{jn}\,[e'_j]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\left(\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} \ \Rightarrow$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\,[e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1}\,[e'_j]_{\text{Б}}\ \dots\ \sum_{j=1}^{n} t_{jn}\,[e'_j]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\left(\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} \ \Rightarrow\ T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}} =$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\,[e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1}\,[e'_j]_{\text{Б}}\ \dots\ \sum_{j=1}^{n} t_{jn}\,[e'_j]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\left(\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} \ \Rightarrow\ T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}}.$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t'_{ij})$, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = (t''_{ij})$, $T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = (t_{ij})$.

По **определению матрицы перехода** $e''_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j$. Поэтому с помощью **умножения на макроуровне** получаем

$$[e''_i]_{\text{Б}} = \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j\right]_{\text{Б}} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\,[e'_j]_{\text{Б}}\,.$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = \left([e''_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e''_n]_{\text{Б}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_{j1}\,[e'_j]_{\text{Б}}\ \dots\ \sum_{j=1}^{n} t_{jn}\,[e'_j]_{\text{Б}}\right) =$$

$$= \left(\left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \left([e'_1]_{\text{Б}}\ \dots\ [e'_n]_{\text{Б}}\right)\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}\left(\begin{pmatrix} t_{11} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix}\right) = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}}$$

$$T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} \ \Rightarrow\ T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}}.$$

$$T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}}.$$

Задача 19. Пусть $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б'**, $T_{\text{Б}\to\text{Б''}}$ — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б''**. Найдите матрицу перехода из базиса **Б'** в базис **Б''**.

Ответ.

$$T_{\text{Б'}\to\text{Б''}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} T_{\text{Б}\to\text{Б''}}.$$

Задача решена.

Решение задачи 20.

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

III) интерпретировать результат для исходной задачи.

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

III) интерпретировать результат для исходной задачи.

Задача 20. Опишите типовой план решения задачи по линейной алгебре.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

1) ввести базис пространства U;

2) представить исходные объекты их стандартными образами в $\mathbb{R}^n$;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

III) интерпретировать результат для исходной задачи.

Решение задачи 21.

Задача 21. Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Задача 21. Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

Задача 21. Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

1) ввести естественный базис пространства U;

Задача 21. Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

1) ввести естественный базис пространства U;

2) составить **матрицу перехода** из **Б** в **В**;

Задача 21. Как найти координаты вектора в базисе **В**, отличном от естественного **Б**.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

1) ввести естественный базис пространства U;

2) составить **матрицу перехода** из **Б** в **В**;

3) найти координаты исходного вектора в **В** с помощью **теоремы о координатах вектора в разных базисах**.

Решение задачи 22.

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры;

II) решить полученную задачу матричной алгебры;

III) интерпретировать результат для исходной задачи.

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

III) интерпретировать результат для исходной задачи:

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

2) составить матрицу $\mathbf{M}'$, столбцами которой являются столбцы координат векторов из M;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

III) интерпретировать результат для исходной задачи:

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

2) составить матрицу $\mathbf{M}'$, столбцами которой являются столбцы координат векторов из M;

3) сформулировать задачу матричной алгебры: найти максимальную линейно независимую систему подсистемы столбцов матрицы $\mathbf{M}'$;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

III) интерпретировать результат для исходной задачи:

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

2) составить матрицу $\mathbf{M}'$, столбцами которой являются столбцы координат векторов из M;

3) сформулировать задачу матричной алгебры: найти максимальную линейно независимую систему подсистемы столбцов матрицы $\mathbf{M}'$;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

1) элементарными преобразованиями строк матрицы $\mathbf{M}'$ получить «ступенчатую» матрицу $\begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ & & \dots & & & \end{pmatrix}$;

III) интерпретировать результат для исходной задачи:

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

2) составить матрицу $\mathbf{M}'$, столбцами которой являются столбцы координат векторов из M;

3) сформулировать задачу матричной алгебры: найти максимальную линейно независимую систему подсистемы столбцов матрицы $\mathbf{M}'$;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

1) элементарными преобразованиями строк матрицы $\mathbf{M}'$ получить «ступенчатую» матрицу $\begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ & & & \dots & & \end{pmatrix}$;

2) составить список S тех номеров столбцов, каждый из которых является началом очередной «ступеньки»;

III) интерпретировать результат для исходной задачи:

Задача 22. Опишите типовой план нахождения максимальной линейно независимой подсистемы некоторой системы векторов M линейного пространства U.

Ответ.

I) Свести исходную задачу к типовой задаче матричной алгебры:

1) ввести базис пространства U;

2) составить матрицу $\mathbf{M}'$, столбцами которой являются столбцы координат векторов из M;

3) сформулировать задачу матричной алгебры: найти максимальную линейно независимую систему подсистемы столбцов матрицы $\mathbf{M}'$;

II) решить полученную задачу матричной алгебры:

1) элементарными преобразованиями строк матрицы $\mathbf{M}'$ получить «ступенчатую» матрицу $\begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ & & & \dots & & \end{pmatrix}$;

2) составить список S тех номеров столбцов, каждый из которых является началом очередной «ступеньки»;

III) интерпретировать результат для исходной задачи: максимальная линейно независимая система состоит из векторов системы M с номерами из списка S.

Решение задачи 23.

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;

2) взять произвольный вектор из V и обозначить его координаты буквами;

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;
2) взять произвольный вектор из V и обозначить его координаты буквами;
3) подставить в исходную систему равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б**;

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;
2) взять произвольный вектор из V и обозначить его координаты буквами;
3) подставить в исходную систему равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б**;
4) составить систему уравнений, где каждое уравнение представляет собой:

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;
2) взять произвольный вектор из V и обозначить его координаты буквами;
3) подставить в исходную систему равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б**;
4) составить систему уравнений, где каждое уравнение представляет собой:

а) либо результат подстановки в одно из исходных равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б** (если значением левой и правой частей равенства являются числа);

Задача 23. Пусть подпространство V линейного пространства U задано системой равенств для элементов подпространства V. Укажите пункты типового плана задания подпространства V системой уравнений для координат векторов из V.

Ответ. Это частный случай сведения задачи к задаче матричной алгебры. Для этого надо:

1) ввести базис **Б** линейного пространства;

2) взять произвольный вектор из V и обозначить его координаты буквами;

3) подставить в исходную систему равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б**;

4) составить систему уравнений, где каждое уравнение представляет собой:

а) либо результат подстановки в одно из исходных равенств вместо вектора из V его разложение по базису **Б** (если значением левой и правой частей равенства являются числа);

б) либо результат сравнения k-той координаты вектора в левой и правой частях равенства (если значением левой и правой частей равенства являются векторы из U).

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?