Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Отображения. Функции

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 задания прямого произведения как функции 7

Пример 2 нахождения $D(g)$ и $E(g)$ 10

Пример 3 нахождения суперпозиции функций 15

Пример 4 нахождения суперпозиции функций 50

Пример 5 нахождения и использования обратной функции 60

Определение и способы задания функции 73

Задача I.1 73

Задача I.2 74

Задача I.3 75

Задача I.4 76

Задача I.5 77

Задача I.6 78

Задача I.7 79

Задача I.8 80

Задача I.9 81

Задача I.10 82

Суперпозиция (композиция) функций 82

Задача II.11 83

Задача II.12 84

Задача II.13 85

Задача II.14 86

Задача II.15 87

Задача II.16 88

Задача II.17 89

Задача II.18 90

Задача II.19 91

Задача II.20 92

Задача II.21 93

Суперпозиция функций. Обратная функция 93

Задача III.22 94

Задача III.23 95

Задача III.24 96

Задача III.25 97

Задача III.26 98

Задача III.27 99

Задача III.28 100

Задача III.29 101

Задача III.30 102

Задача III.31 103

Задача III.32 104

Задача III.33 105

Ответы и решения 106

Пример 1. *Если* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— множества, то можно считать, что множество* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *состоит из всевозможных функций* f *с областью определения* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и таких, что* $f(k) \in A_k$.

Пример 1. *Если* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— множества, то можно считать, что множество* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *состоит из всевозможных функций* f *с областью определения* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и таких, что* $f(k) \in A_k$.

В самом деле, кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно рассматривать как нижнюю строку таблицы значений функции f:

k	1	2	$\ldots$	n
$f(k)$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

.

Пример 1. *Если* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— множества, то можно считать, что множество* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *состоит из всевозможных функций* f *с областью определения* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и таких, что* $f(k) \in A_k$.

Например, можно считать, что $\{\alpha, \beta\} \times \{0, a\}$ равно не множеству кортежей $\{(\alpha; 0), (\alpha; a), (\beta; 0), (\beta; a)\}$, а множеству функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, определенных таблицей значений

k	1	2
$f_1(k)$	α	0
$f_2(k)$	α	a
$f_3(k)$	β	0
$f_4(k)$	β	a

Такая интерпретация является довольно популярной в алгебре.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Функция g задана формулой $g(x) = 3x^2 - 1$ на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Задайте ее таблицей значений. Найдите область определения и область допустимых значений этой функции, пересечение и объединение множеств $D(g)$ и $E(g)$.*

Решение. В данном примере используется переход от **динамической** модели функции к ее **статической** модели.

Пример 2. *Функция g задана формулой $g(x) = 3x^2 - 1$ на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Задайте ее таблицей значений. Найдите область определения и область допустимых значений этой функции, пересечение и объединение множеств $D(g)$ и $E(g)$.*

Решение. По условию $D(g) = \{-1, 0, 1\}$,

Пример 2. *Функция g задана формулой $g(x) = 3x^2 - 1$ на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Задайте ее таблицей значений. Найдите область определения и область допустимых значений этой функции, пересечение и объединение множеств $D(g)$ и $E(g)$.*

Решение. По условию $D(g) = \{-1, 0, 1\}$,

$$E(g) = \{g(-1), g(0), g(1)\} = \left\{3 \cdot (-1)^2 - 1, 3 \cdot 0^2 - 1, 3 \cdot 1^2 - 1\right\} =$$

$$= \{2, -1\}.$$

Пример 2. *Функция g задана формулой $g(x) = 3x^2 - 1$ на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Задайте ее таблицей значений. Найдите область определения и область допустимых значений этой функции, пересечение и объединение множеств $D(g)$ и $E(g)$.*

Решение. По условию $D(g) = \{-1, 0, 1\}$,

$$E(g) = \{g(-1), g(0), g(1)\} = \left\{3 \cdot (-1)^2 - 1, 3 \cdot 0^2 - 1, 3 \cdot 1^2 - 1\right\} =$$

$$= \{2, -1\}.$$

Поэтому $D(g) \cup E(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$, $D(g) \cap E(g) = \{-1\}$.

Пример 2. *Функция g задана формулой $g(x) = 3x^2 - 1$ на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Задайте ее таблицей значений. Найдите область определения и область допустимых значений этой функции, пересечение и объединение множеств $D(g)$ и $E(g)$.*

Решение. По условию $D(g) = \{-1, 0, 1\}$,

$$E(g) = \{g(-1), g(0), g(1)\} = \left\{3 \cdot (-1)^2 - 1, 3 \cdot 0^2 - 1, 3 \cdot 1^2 - 1\right\} =$$

$$= \{2, -1\}.$$

Поэтому $D(g) \cup E(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$, $D(g) \cap E(g) = \{-1\}$.

Таблица значений функции g имеет вид:

x	-1	0	1
$3x^2 - 1$	2	-1	2

Вернуться к лекции?

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти. Итак, надо найти *функцию*.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти. Итак, надо найти *функцию*.

Следующий этап: ищем, в каком виде можно представить ответ.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти. Итак, надо найти *функцию*.

Следующий этап: ищем, в каком виде можно представить ответ. Надо задать *функцию*. В математике обычно применяется один из трех способов:

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти. Итак, надо найти *функцию*.

Следующий этап: ищем, в каком виде можно представить ответ. Надо задать *функцию*. В математике обычно применяется один из трех способов: *выражение*, *таблица* и *график*.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. В соответствии со **стратегией составления уравнений** сначала внимательно читаем, что надо найти. Итак, надо найти *функцию*.

Следующий этап: ищем, в каком виде можно представить ответ. Надо задать *функцию*. В математике обычно применяется один из трех способов: *выражение*, *таблица* и *график*.

Суперпозиция определялась с помощью выражений, и функции f и g также заданы выражениями, поэтому ответ данной задачи мы представим в виде выражений.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Подробно опишем процесс вычисления функции $f \circ g$, а для остальных случаев просто приведем результат.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим

$g\big(f(x)\big) =$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении, задающем функцию g, то есть в выражении $g(x) = x^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении, задающем функцию g, то есть в выражении $g(x) = x^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$. Если Вас смущает тот факт, что буква x имеет слишком много разных значений (правильно, кстати, смущает), можно в выражении для g сначала заменить букву x на другую букву, например, на y. Получим $g(y) =$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении, задающем функцию g, то есть в выражении $g(x) = x^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$. Если Вас смущает тот факт, что буква x имеет слишком много разных значений (правильно, кстати, смущает), можно в выражении для g сначала заменить букву x на другую букву, например, на y. Получим $g(y) = y^2$.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) =$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Можно иначе:

$$f \circ g(x) = g(f(x)) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Можно иначе:

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = \big(f(x)\big)^2 =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Можно иначе:

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = \big(f(x)\big)^2 =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Можно иначе:

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = \big(f(x)\big)^2 = f^2(x) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Итак, для того чтобы вычислить $f \circ g(x)$, надо вычислить $g\big(f(x)\big)$. По условию задачи, в этом выражении слово $f(x)$ можно заменить на слово $x + 1$, при этом получим
$g\big(f(x)\big) = g(x + 1)$. Для того, чтобы вычислить последнее выражение, в выражении $g(y) = y^2$ слово x можно заменить словом $x + 1$.

Теперь для того чтобы вычислить $g(x + 1)$, надо вместо y подставить слово $x + 1$. Получим $g(x + 1) = (x + 1)^2$. Итак,

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Можно иначе:

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = \big(f(x)\big)^2 = f^2(x) = (x + 1)^2.$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) = f \circ f(x);$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) = f \circ f(x);$$

$h_2(x) = (x+2)^2 + 1 =$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) = f \circ f(x);$$

$h_2(x) = (x + 2)^2 + 1 = (f(f(x))^2 + 1 =$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) = f \circ f(x);$$

$$h_2(x) = (x+2)^2 + 1 = (f(f(x))^2 + 1 = f(g(f(f(x)))) =$$

Пример 3. *Пусть* $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. *Найдите* $f \circ g$, $g \circ f$. *Выразите суперпозицией функций* f *и* g *функции* $h_1(x) = x + 2$, $h_2(x) = x^2 + 4x + 5$.

Решение. Аналогично получаем:

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

$$h_1(x) = x + 2 = (x + 1) + 1 = f(f(x)) = f \circ f(x);$$

$$h_2(x) = (x + 2)^2 + 1 = (f(f(x))^2 + 1 = f(g(f(f(x)))) = f \circ f \circ g \circ f(x).$$

Перейти к **следующему примеру** или **вернуться к лекции?**

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Сначала найдем таблицы значений функций h_1 и h_2. Так как $h_1(x) = g\big(f(x)\big)$, то для того чтобы можно было найти значение h_1 на элементе x_0, надо, чтобы можно было вычислить $f(x_0)$, то есть значение x_0 переменной x должно принадлежать множеству $D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Построим таблицу значений «в два этапа», устроив промежуточную строку значений:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2
$g(f(x))$					

,

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Построим таблицу значений «в два этапа», устроив промежуточную строку значений:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2
$g(f(x))$	$-$	1^2	0^2	$(-1)^2$	$-$

,

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Построим таблицу значений «в два этапа», устроив промежуточную строку значений:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2
$g(f(x))$	$-$	1^2	0^2	$(-1)^2$	$-$

, т.е.

x	1	2	3
$h_1(x)$	1	0	1

.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Построим таблицу значений «в два этапа», устроив промежуточную строку значений:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2
$g(f(x))$	$-$	1^2	0^2	$(-1)^2$	$-$

, т.е.

x	1	2	3
$h_1(x)$	1	0	1

.

Отметим, что $g\big(f(0)\big) = g(2) = g\big(f(4)\big)$ вычислить нельзя, так как, по условию, $2 \notin D(g) = \{-1, 0, 1\}$.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Теперь найдем таблицу значений функции $h_2(x) = f(g(x))$. Можно было бы начать с того, что $D(h_2) \subseteq D(g)$, но мы, ради разнообразия (чтобы Вы случайно не заскучали) начнем с области допустимых значений функции h_2. Для этого вновь придется заняться функцией f, так как $E(h_2) \subseteq E(f)$. Таким образом, известно, что во *второй* строке таблицы значений функции стоят только элементы из $E(f) = \{2, 0, -1\}$. Поэтому для того чтобы получить искомому таблицу значений, надо решить уравнения $f\big(g(x)\big) = y$, где $y \in \{2, 0, -1\}$.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Начнем с уравнения $f\big(g(x)\big) = 2$. Из таблицы значений функции f получаем, что либо $g(x) = 0$, либо $g(x) = 4$. Так как $g(x) = x^2$, то в первом случае $x = 0$ (все в порядке). Во втором случае $x = 2$ или $x = -2$. Но оба полученных значения не входят в область определения функции g (по условию примера $D(g) = \{-1, 0, 1\}$). Значит, значение 2 у функции h_2 появляется только на аргументе, равном 0.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Теперь рассмотрим уравнение $h_2(x) = 0$, то есть $f\big(g(x)\big) = 0$. Из таблицы значений функции f получаем $g(x) = 2$. Но числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не входят в область определения функции g, поэтому уравнение $h_2(x) = 0$ решений не имеет.

Пример 4. *Найдите таблицы значений функции* $h_1 = f \circ g$ *и* $h_2 = g \circ f$, *где отображение* f *задано таблицей:*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	2

и функция g *задана формулой* $g(x) = x^2$ *на множестве* $\{-1, 0, 1\}$. *Найдите* $D(h_1)$ *и* $E(h_1)$.

Решение. Аналогично рассуждая, получаем, что уравнение $h_2(x) = -1$ не имеет решений. Таким образом, таблица значений функции h_2 имеет вид:

x	0
$h_2(x)$	2

. Значит, функция h_1 — функция-константа, принимающая только значение 2 на единственном элементе ее области определения, равной $D(h_2) = \{0\}$.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

Найти функции, обратные к h *и к* g, *и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Так как область D, в которой к функции f надо найти обратную, не указана, то либо предполагается, что $D = D(f)$, либо мы должны указать все обратные функции на промежутках, которые еще предстоит найти.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Знак $\equiv$ применяется для обозначения тождества, то есть равенства, справедливого для любого значения переменной, принадлежащего области определения функции.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Но, например, $f(-1) = 2 = f(1)$, поэтому *однозначно* определить, чему должна быть равна функция f^{-1} нельзя, то есть обратная функция к f не существует (во *всей* области определения функции f).

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Обратная функция к f определена только в каждой из областей $x \leq 0$ и $x \geq 0$. Найдем эти обратные функции. Фактически надо решить уравнение $x \equiv f(f^{-1}(x))$ относительно $f^{-1}(x)$.

Процедура решения уравнения в некотором смысле является обратной к процедуре вычисления суперпозиции функций. При вычислении значения выражения $x^2 + 1$ сначала необходимо вычислить x^2, а потом к результату прибавить единицу. То есть при вычислении значения сложной функции мы на каждом шаге в очередную «составляющую ее функцию» последовательно «упаковываем» результат предыдущего вычисления. При решении уравнения все делаем в обратном порядке, «снимаем» со значения функции «обертку» в последовательности, обратной к последовательности вычисления, пока не получим «чистое ядрышко» — искомое значение аргумента.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* 1) $h(x) = g(x)$; 2) $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Обратная функция к f определена только в каждой из областей $x \leq 0$ и $x \geq 0$. Найдем эти обратные функции. Фактически надо решить уравнение $x \equiv f(f^{-1}(x))$ относительно $f^{-1}(x)$.

Имеем $x \equiv f(f^{-1}(x)) \equiv (f^{-1}(x))^2 + 1$, то есть сначала надо «убрать прибавление единицы»: $x - 1 \equiv (f^{-1}(x))^2$. Теперь осталось «убрать возведение в квадрат». Поэтому на неположительной полуоси, т.е. при $f^{-1}(x) \leq 0$, получаем $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$, а на неотрицательной полуоси, т.е. при $f^{-1}(x) \geq 0$, получаем $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Обратная функция к f определена только в каждой из областей $x \leq 0$ и $x \geq 0$. Найдем эти обратные функции. Фактически надо решить уравнение $x \equiv f(f^{-1}(x))$ относительно $f^{-1}(x)$.

Найти обратную к функции g проще. Но сначала надо ответить на вопрос: что значит «найти функцию»? Это означает — задать ее некоторым «стандартным» способом. Обычно это означает — формулой. Но в нашем случае более естественно найти ее таблицу.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Согласно определению обратной функции должны выполняться тождества $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ и $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Обратная функция к f определена только в каждой из областей $x \leq 0$ и $x \geq 0$. Найдем эти обратные функции. Фактически надо решить уравнение $x \equiv f(f^{-1}(x))$ относительно $f^{-1}(x)$.

Получаем

t	5	9	2
$g^{-1}(t)$	3	2	0

.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Осталось решить уравнения. Сначала зададим функцию h формулой. Имеем $h(x) = f(x-1) = (x-1)^2 + 1$. Решим уравнение $h(x) = g(x)$. Область определения функции g представляет собой трехэлементное множество $\{3, 2, 0\}$. Поэтому можно просто сравнить значения функций h и g в этих точках. Получаем $h(3) = 5$, $g(3) = 5$ (то есть $x = 3$ — решение), $h(2) = 2$, $g(2) = 9$ ($x = 2$ не подходит), $h(0) = 2$, $g(0) = 2$ ($x = 0$ — тоже решение). Таким образом, имеется два решения уравнения $h(x) = g(x)$: $x = 3$ и $x = 0$. Можно записать и так: $\left\{x \,\middle|\, f(x) = g(x)\right\} = \{0, 3\}$.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Для того чтобы решить уравнение $g(x) = g(x-2)$, найдем таблицу значений функции, заданной выражением $g^*(x) = g(x-2)$. Так как ОДЗ$(g^*) \subseteq E(g) = \{2, 5, 9\}$, то для нахождения таблицы значений функции g^* надо решить уравнения $g(x-2) = 2$, $g(x-2) = 5$ и $g(x-2) = 9$. Из таблицы значений функции g для первого уравнения получаем, $x - 2 = 0$, то есть $x = 2$, поэтому $g^*(2) = 2$. Для второго уравнения $x - 2 = 3$, поэтому $x = 5$. Наконец, для $g(x-2) = 9$ имеем $x - 2 = 2$.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение. Для того чтобы решить уравнение $g(x) = g(x-2)$, найдем таблицу значений функции, заданной выражением $g^*(x) = g(x-2)$.

$$g(x-2) = 2 \;\Rightarrow\; x-2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow\; g^*(2) = 2,$$
$$g(x-2) = 5 \;\Rightarrow\; x-2 = 3 \;\Rightarrow\; x = 5 \;\Rightarrow\; g^*(5) = 5,$$
$$g(x-2) = 9 \;\Rightarrow\; x-2 = 2 \;\Rightarrow\; x = 4 \;\Rightarrow\; g^*(4) = 9,$$

следовательно,

t	2	5	4
$g^*(t)$	2	5	9

.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = f(x-1)$ *и функция* g *задана таблицей*

x	3	2	0
$g(x)$	5	9	2

. Найти функции, обратные к h *и к* g*, и решения уравнений:* *1)* $h(x) = g(x)$; *2)* $g(x) = g(x-2)$.

Решение.

t	2	5	4
$g^*(t)$	2	5	9

.

Из сравнения столбцов таблиц значений функций g и g^* получаем, что равенство $g(x) = g(x-2)$ не выполняется ни при каких x.

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.108.) Известно, что $D(f) = \{-1, 0, 1\}$, причем $f(-1) = 2$, $f(1) = 2 \cdot f(-1)$, $f(0) = f(1) + f(-1)$. Задайте функцию f таблицей значений.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.110.) Функции f и g заданы таблицами значений:

t	-1	0	1
$f(t)$	2	1	-2

,

s	-1	1	0
$g(s)$	2	-2	1

.

Выясните, равны ли функции f и g, постройте их графики. Перебором всех вариантов решите уравнение $f(x) = -2x$.

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.112.) Пусть $D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$ и в области определения функции f выполняется равенство $f(x) = 1 - x^2$. Задайте функцию f таблицей. Найдите $E(f)$. Является ли функция f *взаимно* однозначной?

Задача I.4. (Ответ приведен на стр.114.) Пусть функция f каждому слову из списка {сорока, грач, жук, акула} ставит в соответствие количество содержащихся в нем согласных букв, а функция g — количество содержащихся в нем гласных букв. Найдите функции f и g (то есть задайте их стандартным образом), а также функцию h, заданную выражением $h(x) = 2 \cdot f(x) - 3$. Найдите $D(f)$, $E(f)$, $D(g)$,$E(g)$, $D(h)$, $E(h)$. Являются ли функции f и g *взаимно* однозначными? Решите уравнения и неравенства: **1**) $f(x) < g(x)$; **2**) $f(y) > g(y)$; **3**) $f(z) \geq g(z)$; **4**) $f(t) = g(t)$.

Задача I.5. (Ответ приведен на стр.117.) Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $D(g) = D(k) = \{-1, 0, 1\}$ и в своей области определения функции f, g и k заданы формулами $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + x$, $k(t) = t^2 + t$. Найдите таблицы значений функций f, g и k. Выясните, какие из функций f, g, h, k равны, если h задана таблицей значений

t	-1	0	1
$h(t)$	0	0	2

.

[1] Функция g называется **ограничением** функции f на множество $\{-1, 0, 1\}$.

Задача I.6. (Ответ приведен на стр.119.) Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{0, 1, 3\}$. Найдите функцию f, если для любого x из области ее определения имеет место неравенство $2 - x < f(x)$. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача I.7. (Ответ приведен на стр.121.) Пусть функция f каждому подмножеству X множества $\{1, 2\}$ ставит в соответствие множество $X \cap \{2, 3, 4\}$, а функция g — множество $X \cup \{2, 3, 4\}$. Задайте функции f и g таблицами. Непосредственной проверкой выясните, для любого ли $X \subseteq \{1, 2\}$ выполняется включение $f(X) \subseteq g(X)$. Являются ли функции f и g взаимно однозначными?

Задача I.8. (Ответ приведен на стр.123.) Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{2, 6, 10\}$, $f(1) = 6$ и $f(2) < 5$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача I.9. (Ответ приведен на стр.125.) Пусть $D(f) = \{0, 1, 2\}$, $E(f) = \{0, -1, 2\}$ и в области определения функции f выполняются неравенства $x - 2 < f(x) < x^2$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача I.10. (Ответ приведен на стр.127.) Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $E(f) = \{-2, 0, 2, 4\}$, функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	-3	-1	2	1	3

и в области определения функции f выполняются неравенства $g(x) < f(x) < g(x) + 3$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача II.11. (Ответ приведен на стр.129.) Функция f задана таблицей значений

t	-1	0	1	2
$f(t)$	2	1	-1	1

. Найдите таблицы значений функций $p(x) = f(-x)$, $q(x) = -f(x)$, $r(x) = -f(-x)$, $g(x) = f(2x)$, $h(x) = 2f(x)$.

Задача II.12. (Ответ приведен на стр.131.) Пусть

t	-2	-1	0	1	2
$p(t)$	2	0	1	1	-1

,

s	-1	0	1	2
$q(p(s))$	3	2	2	-1

и $D(q) \subseteq E(p)$. Найдите функцию q.

Задача II.13. (Ответ приведен на стр.133.) Пусть

x	-1	0	1
$h(x) = q(p(x))$	4	2	-1

,

y	1	3	5
$q(y)$	-1	4	2

и $D(p) = D(h)$. Найдите функцию p.

Задача II.14. (Ответ приведен на стр.135.) Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция p задана формулой $p(x) = 2x - 1$. Найдите функцию q.

Задача II.15. (Ответ приведен на стр.137.) Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция q задана формулой $q(x) = 2x - 1$. Найдите функцию p.

Задача II.16. (Ответ приведен на стр.139.) Пусть

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	1	2	-1	1	-3

,

x	-2	-1	0	1	2
$q(x)$	1	-2	0	2	-1

и

x	-2	-1	0	1
$r(q(p(x)))$	5	-2	-2	5

Найдите функцию r.

Задача II.17. (Ответ приведен на стр.141.) Пусть $p(x) = x^2$, $q(p(x)) = 2x^4 - x^2 + 1$. Найдите функцию q.

Задача II.18. (Ответ приведен на стр.143.) Пусть $p(x) = 2x - 1$, $q(p(x)) = 4x^2 - 8x + 5$. Найдите функцию q.

Задача II.19. (Ответ приведен на стр.145.) Пусть известно, что для любого неотрицательного вещественного числа t имеем $p(t) \leq 0$, $q(t) \geq 0$, $\quad r(y) = y^2 - 1$, $\quad r(p(x)) = r(q(x)) = x + 2\sqrt{x}$. Найдите функции p, q.

Задача II.20. (Ответ приведен на стр.147.) Решите уравнение $q(p(x)) = p(q(x))$, если $p(x) = x^2 + 1$ и $q(x) = 2x$.

Задача II.21. (Ответ приведен на стр.149.) Пусть $f(x) = x + 1$ и $g(f(t)) = t^2 + 2t + 2$. Найдите функцию g.

Задача III.22. (Ответ приведен на стр.151.) Известно, что уравнение $f(x) = x$ имеет два решения. Что можно сказать о количестве решений уравнения $f(f(x)) = f(x)$?

Задача III.23. (Ответ приведен на стр.153.) Функция f задана таблицей

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-2	-1	2	7

. Найдите таблицу функции g, заданной формулой $g(1-2x) = f(2+x)$.

Задача III.24. (Ответ приведен на стр.155.) Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Задача III.25. (Ответ приведен на стр.161.) Найдите обратную к суперпозиции функций $f(t) = 2t - 1$ и g, заданной таблицей

t	0	1	2
$g(t)$	1	2	0

.

Задача III.26. (Ответ приведен на стр.163.) Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d, \quad g(b) = c, \quad g(c) = b, \quad g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Задача III.27. (Ответ приведен на стр.168.) Проверьте, какая из функций: $f_1(x) = 3 \cdot 10^x - 5$, $f_2(x) = (3x)^{10} + 5$, $f_3(x) = 10^{3x} - 5$ является обратной к функции $g(y) = \frac{1}{3}\lg(y+5)$ на луче $y > -5$.

Задача III.28. (Ответ приведен на стр.170.) Функция f задана таблицей

s	-1	0	1	2
$f(s)$	3	-1	1	-2

Найдите обратную к функции g, где $g(t) = 2 \cdot f(t-1)$. Постройте графики функций g и g^{-1}.

Задача III.29. (Ответ приведен на стр.172.) Функции f и g заданы таблицами

p	-2	-1	0	1	2
$f(p)$	2	3	1	0	-2

,

q	-1	0	1	2
$g(q)$	3	-1	1	-2

.

Найдите таблицы значений функций $(f \circ g)^{-1}$, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ и $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Задача III.30. (Ответ приведен на стр.174.) Проверьте, является ли функция, заданная формулой $f(x) = 2x - 3$, обратной к функции, заданной формулой $g(y) = 0.5y + 1.5$.

Задача III.31. (Ответ приведен на стр.176.) Пусть $E(p) = E(q)$ и

x	-1	0	1
$p(x)$	2	3	1

,

x	-1	0	1
$q^{-1}\big(p(x)\big)$	3	2	0

.

Найдите функцию q.

Задача III.32. (Ответ приведен на стр.178.) Найдите обратную к функции $f(x) = 10^{2x} + 10^x + 2$.

Задача III.33. (Ответ приведен на стр.180.) Найдите обратные (с указанием множеств, на которых найдены обратные функции) к функциям: $f(x) = (x^3 - 5)^{1/5}$, $g(x) = \exp(5x^5 - 3)$, $h(x) = \lg^2\left((2x+4)^3 + 2\right)$, $k(x) = 4^x + 2^x - 2$, $m(x) = 10^{x-2} + 10$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Известно, что $D(f) = \{-1, 0, 1\}$, причем $f(-1) = 2$, $f(1) = 2 \cdot f(-1)$, $f(0) = f(1) + f(-1)$. Задайте функцию f таблицей значений.

Задача 1. Известно, что $D(f) = \{-1, 0, 1\}$, причем $f(-1) = 2$, $f(1) = 2 \cdot f(-1)$, $f(0) = f(1) + f(-1)$. Задайте функцию f таблицей значений.

Ответ.

x	-1	0	1
$f(x)$	2	6	4

.

Решение задачи 2.

Задача 2. Функции f и g заданы таблицами значений:

t	-1	0	1
$f(t)$	2	1	-2

,

s	-1	1	0
$g(s)$	2	-2	1

.

Выясните, равны ли функции f и g, постройте их графики. Перебором всех вариантов решите уравнение $f(x) = -2x$.

Задача 2. Функции f и g заданы таблицами значений:

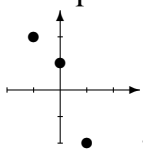
t	-1	0	1
$f(t)$	2	1	-2

,

s	-1	1	0
$g(s)$	2	-2	1

.

Выясните, равны ли функции f и g, постройте их графики. Перебором всех вариантов решите уравнение $f(x) = -2x$.

Ответ. $f = g$,  , $\left\{x \,\middle|\, f(x) = -2x\right\} = \{-1, 1\}$.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть $D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$ и в области определения функции f выполняется равенство $f(x) = 1 - x^2$. Задайте функцию f таблицей. Найдите $E(f)$. Является ли функция f *взаимно* однозначной?

Задача 3. Пусть $D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$ и в области определения функции f выполняется равенство $f(x) = 1 - x^2$. Задайте функцию f таблицей. Найдите $E(f)$. Является ли функция f *взаимно* однозначной?

Ответ.

t	0	1	2	3
$f(t)$	1	0	-3	-8

, $E(f) = \{-8, -3, 0, 1\}$. Согласно **критерию**, функция f является взаимно однозначной, так как для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Решение задачи 4.

Задача 4. Пусть функция f каждому слову из списка $\{\text{сорока}, \text{грач}, \text{жук}, \text{акула}\}$ ставит в соответствие количество содержащихся в нем согласных букв, а функция g — количество содержащихся в нем гласных букв. Найдите функции f и g (то есть задайте их стандартным образом), а также функцию h, заданную выражением $h(x) = 2 \cdot f(x) - 3$. Найдите $D(f)$, $E(f)$, $D(g)$,$E(g)$, $D(h)$, $E(h)$. Являются ли функции f и g <u>*взаимно*</u> однозначными? Решите уравнения и неравенства: **1**) $f(x) < g(x)$; **2**) $f(y) > g(y)$; **3**) $f(z) \geq g(z)$; **4**) $f(t) = g(t)$.

Задача 4. Пусть функция f каждому слову из списка $\{\text{сорока}, \text{грач}, \text{жук}, \text{акула}\}$ ставит в соответствие количество содержащихся в нем согласных букв, а функция g — количество содержащихся в нем гласных букв. Найдите функции f и g (то есть задайте их стандартным образом), а также функцию h, заданную выражением $h(x) = 2 \cdot f(x) - 3$. Найдите $D(f)$, $E(f)$, $D(g)$,$E(g)$, $D(h)$, $E(h)$. Являются ли функции f и g <u>*взаимно*</u> однозначными? Решите уравнения и неравенства: **1**) $f(x) < g(x)$; **2**) $f(y) > g(y)$; **3**) $f(z) \geq g(z)$; **4**) $f(t) = g(t)$.

Ответ.

t	сорока	грач	жук	акула
$f(t)$	3	3	2	2
$g(t)$	3	1	1	3

,

$$D(f) = D(g) = \{\text{сорока}, \text{грач}, \text{жук}, \text{акула}\},$$

$$E(f) = \{2, 3\}, \quad E(g) = \{1, 3\}.$$

Задача 4. Пусть функция f каждому слову из списка $\{\text{сорока}, \text{грач}, \text{жук}, \text{акула}\}$ ставит в соответствие количество содержащихся в нем согласных букв, а функция g — количество содержащихся в нем гласных букв. Найдите функции f и g (то есть задайте их стандартным образом), а также функцию h, заданную выражением $h(x) = 2 \cdot f(x) - 3$. Найдите $D(f)$, $E(f)$, $D(g)$,$E(g)$, $D(h)$, $E(h)$. Являются ли функции f и g *взаимно* однозначными? Решите уравнения и неравенства: **1**) $f(x) < g(x)$; **2**) $f(y) > g(y)$; **3**) $f(z) \geq g(z)$; **4**) $f(t) = g(t)$.

Ответ. f и g — не взаимно однозначные функции, так как, например, $f(\text{сорока}) = f(\text{грач})$ и $g(\text{грач}) = g(\text{жук})$. Решения уравнений и неравенств: $x = \text{акула}$, $y \in \{\text{грач}, \text{жук}\}$, $z \in \{\text{сорока}, \text{грач}, \text{жук}\}$, $t = \text{сорока}$.

Решение задачи 5.

Задача 5. Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $D(g) = D(k) = \{-1, 0, 1\}$ и в своей области определения функции f, g и k заданы формулами $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + x$, $k(t) = t^2 + t$. Найдите таблицы значений функций f, g и k. Выясните, какие из функций f, g, h, k равны, если h задана таблицей значений

t	-1	0	1
$h(t)$	0	0	2

.

Задача 5. Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $D(g) = D(k) = \{-1, 0, 1\}$ и в своей области определения функции f, g и k заданы формулами $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + x$, $k(t) = t^2 + t$. Найдите таблицы значений функций f, g и k. Выясните, какие из функций f, g, h, k равны, если h задана таблицей значений

t	-1	0	1
$h(t)$	0	0	2

.

Ответ. $g = h = k$,

t	-2	-1	0	1	2
$f(t)$	2	0	0	2	6

.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{0, 1, 3\}$. Найдите функцию f, если для любого x из области ее определения имеет место неравенство $2 - x < f(x)$. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача 6. Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{0, 1, 3\}$. Найдите функцию f, если для любого x из области ее определения имеет место неравенство $2 - x < f(x)$. Является ли функция f взаимно однозначной?

Ответ.

t	1	2	3
$f(t)$	3	1	0

. Функция f является взаимно однозначной в силу **критерия**.

Решение задачи 7.

Задача 7. Пусть функция f каждому подмножеству X множества $\{1, 2\}$ ставит в соответствие множество $X \cap \{2, 3, 4\}$, а функция g — множество $X \cup \{2, 3, 4\}$. Задайте функции f и g таблицами. Непосредственной проверкой выясните, для любого ли $X \subseteq \{1, 2\}$ выполняется включение $f(X) \subseteq g(X)$. Являются ли функции f и g взаимно однозначными?

Задача 7. Пусть функция f каждому подмножеству X множества $\{1, 2\}$ ставит в соответствие множество $X \cap \{2, 3, 4\}$, а функция g — множество $X \cup \{2, 3, 4\}$. Задайте функции f и g таблицами. Непосредственной проверкой выясните, для любого ли $X \subseteq \{1, 2\}$ выполняется включение $f(X) \subseteq g(X)$. Являются ли функции f и g взаимно однозначными?

Ответ.

t	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$
$f(t)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
$g(t)$	$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$

. Включение $f(X) \subseteq g(X)$ выполняется для любого $X \subseteq \{1, 2\}$. Функции f и g не являются взаимно однозначными, так как, например, $f(\emptyset) = f(\{1\})$ и $g(\emptyset) = g(\{2\})$.

Решение задачи 8.

Задача 8. Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{2, 6, 10\}$, $f(1) = 6$ и $f(2) < 5$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача 8. Пусть $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $E(f) = \{2, 6, 10\}$, $f(1) = 6$ и $f(2) < 5$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Ответ.

s	1	2	3
$f(s)$	6	2	10

. Функция f является взаимно однозначной в силу **критерия**.

Решение задачи 9.

Задача 9. Пусть $D(f) = \{0, 1, 2\}$, $E(f) = \{0, -1, 2\}$ и в области определения функции f выполняются неравенства $x - 2 < f(x) < x^2$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача 9. Пусть $D(f) = \{0, 1, 2\}$, $E(f) = \{0, -1, 2\}$ и в области определения функции f выполняются неравенства $x - 2 < f(x) < x^2$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Ответ.

s	0	1	2
$f(s)$	-1	0	2

. Функция f является взаимно однозначной в силу **критерия**.

Решение задачи 10.

Задача 10. Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $E(f) = \{-2, 0, 2, 4\}$, функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	-3	-1	2	1	3

и в области определения функции f выполняются неравенства $g(x) < f(x) < g(x) + 3$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Задача 10. Пусть $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $E(f) = \{-2, 0, 2, 4\}$, функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	-3	-1	2	1	3

и в области определения функции f выполняются неравенства $g(x) < f(x) < g(x) + 3$. Найдите функцию f. Является ли функция f взаимно однозначной?

Ответ.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	0	4	2	4

. Функция f не является взаимно однозначной, так как $f(0) = f(2)$.

Решение задачи 11.

Задача 11. Функция f задана таблицей значений

t	-1	0	1	2
$f(t)$	2	1	-1	1

. Найдите таблицы значений функций $p(x) = f(-x)$, $q(x) = -f(x)$, $r(x) = -f(-x)$, $g(x) = f(2x)$, $h(x) = 2f(x)$.

Задача 11. Функция f задана таблицей значений

t	-1	0	1	2
$f(t)$	2	1	-1	1

. Найдите таблицы значений функций $p(x) = f(-x)$, $q(x) = -f(x)$, $r(x) = -f(-x)$, $g(x) = f(2x)$, $h(x) = 2f(x)$.

Ответ.

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	1	-1	1	2	$-$
$q(x)$	$-$	-2	-1	1	-1
$r(x)$	-1	1	-1	-2	$-$
$h(x)$		4	2	-2	2

,

t	$-1/2$	0	$1/2$	1
$g(t)$	2	1	-1	1

.

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть

t	-2	-1	0	1	2
$p(t)$	2	0	1	1	-1

,

s	-1	0	1	2
$q(p(s))$	3	2	2	-1

и $D(q) \subseteq E(p)$. Найдите функцию q.

Задача 12. Пусть

t	-2	-1	0	1	2
$p(t)$	2	0	1	1	-1

,

s	-1	0	1	2
$q(p(s))$	3	2	2	-1

и $D(q) \subseteq E(p)$. Найдите функцию q.

Ответ.

t	0	1	-1
$q(t)$	3	2	-1

.

Решение задачи 13.

Задача 13. Пусть

x	-1	0	1
$h(x) = q(p(x))$	4	2	-1

,

y	1	3	5
$q(y)$	-1	4	2

и $D(p) = D(h)$. Найдите функцию p.

Задача 13. Пусть

x	-1	0	1
$h(x) = q(p(x))$	4	2	-1

,

y	1	3	5
$q(y)$	-1	4	2

и $D(p) = D(h)$. Найдите функцию p.

Ответ.

t	-1	0	1
$p(t)$	3	5	1

.

Решение задачи 14.

Задача 14. Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция p задана формулой $p(x) = 2x - 1$. Найдите функцию q.

Задача 14. Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция p задана формулой $p(x) = 2x - 1$. Найдите функцию q.

Ответ.

t	-3	-1	1
$q(t)$	4	2	-1

.

Решение задачи 15.

Задача 15. Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция q задана формулой $q(x) = 2x - 1$. Найдите функцию p.

Задача 15. Пусть

x	-1	0	1
$q(p(x))$	4	2	-1

и функция q задана формулой $q(x) = 2x - 1$. Найдите функцию p.

Ответ.

t	-1	0	1
$p(t)$	2.5	1.5	0

.

Решение задачи 16.

Задача 16. Пусть

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	1	2	-1	1	-3

,

x	-2	-1	0	1	2
$q(x)$	1	-2	0	2	-1

и

x	-2	-1	0	1
$r(q(p(x)))$	5	-2	-2	5

Найдите функцию r.

Задача 16. Пусть

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	1	2	-1	1	-3

,

x	-2	-1	0	1	2
$q(x)$	1	-2	0	2	-1

и

x	-2	-1	0	1
$r(q(p(x)))$	5	-2	-2	5

Найдите функцию r.

Ответ.

t	-2	-1	2
$r(t)$	-2	-2	5

.

Решение задачи 17.

Задача 17. Пусть $p(x) = x^2$, $q(p(x)) = 2x^4 - x^2 + 1$. Найдите функцию q.

Задача 17. Пусть $p(x) = x^2$, $q(p(x)) = 2x^4 - x^2 + 1$. Найдите функцию q.

Ответ. $q(t) = 2t^2 - t + 1$.

Решение задачи 18.

Задача 18. Пусть $p(x) = 2x - 1$, $q(p(x)) = 4x^2 - 8x + 5$. Найдите функцию q.

Задача 18. Пусть $p(x) = 2x - 1$, $q(p(x)) = 4x^2 - 8x + 5$. Найдите функцию q.

Ответ. $q(y) = y^2 - 2y + 3$.

Решение задачи 19.

Задача 19. Пусть известно, что для любого неотрицательного вещественного числа t имеем $p(t) \leq 0$, $q(t) \geq 0$, $r(y) = y^2 - 1$, $r(p(x)) = r(q(x)) = x + 2\sqrt{x}$. Найдите функции p, q.

Задача 19. Пусть известно, что для любого неотрицательного вещественного числа t имеем $p(t) \leq 0$, $q(t) \geq 0$, $r(y) = y^2 - 1$, $r(p(x)) = r(q(x)) = x + 2\sqrt{x}$. Найдите функции p, q.

Ответ. $p(x) = \sqrt{x} + 1$, $q(x) = -\sqrt{x} - 1$.

Решение задачи 20.

Задача 20. Решите уравнение $q(p(x)) = p(q(x))$, если $p(x) = x^2 + 1$ и $q(x) = 2x$.

Задача 20. Решите уравнение $q(p(x)) = p(q(x))$, если $p(x) = x^2 + 1$ и $q(x) = 2x$.

Ответ. $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Решение задачи 21.

Задача 21. Пусть $f(x) = x + 1$ и $g(f(t)) = t^2 + 2t + 2$. Найдите функцию g.

Задача 21. Пусть $f(x) = x + 1$ и $g(f(t)) = t^2 + 2t + 2$. Найдите функцию g.

Ответ. $g(y) = y^2 + 1$.

Решение задачи 22.

Задача 22. Известно, что уравнение $f(x) = x$ имеет два решения. Что можно сказать о количестве решений уравнения $f(f(x)) = f(x)$?

Задача 22. Известно, что уравнение $f(x) = x$ имеет два решения. Что можно сказать о количестве решений уравнения $f(f(x)) = f(x)$?

Ответ. Пусть a — решение уравнения $f(f(x)) = f(x)$. Если положить $b = f(a)$, то из $f(f(a)) = f(a)$ получим $f(b) = b$. Таких значений b, по условию, ровно два. Но уравнение $f(a) = b$ относительно a может иметь сколько угодно решений. Таким образом, количество решений уравнения $f(f(x)) = f(x)$ не меньше 2.

Решение задачи 23.

Задача 23. Функция f задана таблицей

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-2	-1	2	7

. Найдите таблицу функции g, заданной формулой $g(1-2x) = f(2+x)$.

Задача 23. Функция f задана таблицей

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-2	-1	2	7

. Найдите таблицу функции g, заданной формулой $g(1-2x) = f(2+x)$.

Ответ.

t	3	1	-1	-3	-5
$g(t)$	-1	-2	-1	2	7

.

Решение задачи 24.

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Ответ. Решение с помощью таблицы значений.

s	-5	-4	-3	-2	-1
$g(3+s)$	2	1	2	5	10
$f(2s) = 1 - 2s$	11	9	7	5	3

.

Получаем ответ $\left\{ t \,\middle|\, f(2t) = g(3+t) \right\} = \{-2\}$.

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Ответ. Решение с помощью задания функции g выражением: $(3+t)^2 + 2(3+t) + 2 = 1 - 2t$, откуда $t^2 + 10t + 16 = 0$, $t \in \{-2, -8\}$. Так как замена функции g выражением $g(x) = x^2 + 2x + 2$ не являлась эквивалентным преобразованием уравнения (ОДЗ уравнения могла увеличиться), то требуется провести отбор корней.

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Ответ. При $t = -2$:

$$\begin{cases} g(t+3) = g(-2+3) = g(1) = 5 \\ f(2t) = f(-4) = 1 - (-4) = 5 \end{cases} \Rightarrow g(-2+3) = f(2 \cdot (-2)).$$

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Ответ. При $t = -8$:

$$\begin{cases} g(t+3) = g(-8+3) = g(-5) \text{ — не определено,} \\ f(2t) = f(-16) = 1 - (-16) = 17. \end{cases}$$

Задача 24. Решите уравнение $f(2t) = g(3+t)$, если функция g задана таблицей

t	-2	-1	0	1	2
$g(t)$	2	1	2	5	10

, а функция f задана формулой $f(x) = 1 - x$. Найдите область определения функции g. Докажите, что в области определения функции g эта функция может быть задана формулой $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Решите исходное уравнение аналитически, используя задание функции g формулой.

Ответ. Значит, -8 не является решением уравнения $f(2t) = -g(3+t)$. Таким образом, единственным решением этого уравнения является число -2.

Решение задачи 25.

Задача 25. Найдите обратную к суперпозиции функций $f(t) = 2t - 1$ и g, заданной таблицей

t	0	1	2
$g(t)$	1	2	0

.

Задача 25. Найдите обратную к суперпозиции функций $f(t) = 2t - 1$ и g, заданной таблицей

t	0	1	2
$g(t)$	1	2	0

.

Ответ.

x	$1/2$	1	$3/2$
$f(x)$	0	1	2
$h(x) = g(f(x))$	1	2	0

, поэтому

y	1	2	0
$h^{-1}(y)$	$1/2$	1	$3/2$

.

Решение задачи 26.

Задача 26. Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d$, $g(b) = c$, $g(c) = b$, $g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Задача 26. Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d$, $g(b) = c$, $g(c) = b$, $g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Ответ. а) f — функция, но обратной у нее нет, так как она не является взаимно однозначной.

Задача 26. Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d$, $g(b) = c$, $g(c) = b$, $g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Ответ. б)

t	a	b	c	d
$g(t)$	d	c	b	a

.

Задача 26. Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d$, $g(b) = c$, $g(c) = b$, $g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Ответ. в)

t	a	b	c	d
$f \circ g(t) = g(f(t))$	b	b	d	c

,

t	a	b	c	d
$g \circ f(t) = f(g(t))$	b	a	c	c

.

Задача 26. Пусть f задана таблицей

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	c	a	b

и область определения функции g равна $\{a, b, c, d\}$, причем $g(a) = d$, $g(b) = c$, $g(c) = b$, $g(d) = a$.

а) является ли f функцией? Если возможно, то найдите обратную функцию;;

б) задайте функцию g таблицей значений;

в) найдите суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$;

г) решите уравнение $f(x) = g(x)$ (перебором всех значений аргумента).

Ответ. г) $\left\{x \,\middle|\, f(x) = g(x)\right\} = \{b\}$.

Решение задачи 27.

Задача 27. Проверьте, какая из функций: $f_1(x) = 3 \cdot 10^x - 5$, $f_2(x) = (3x)^{10} + 5$, $f_3(x) = 10^{3x} - 5$ является обратной к функции $g(y) = \frac{1}{3}\lg(y+5)$ на луче $y > -5$.

Задача 27. Проверьте, какая из функций: $f_1(x) = 3 \cdot 10^x - 5$, $f_2(x) = (3x)^{10} + 5$, $f_3(x) = 10^{3x} - 5$ является обратной к функции $g(y) = \frac{1}{3}\lg(y+5)$ на луче $y > -5$.

Ответ. $g^{-1} = f_3$.

Решение задачи 28.

Задача 28. Функция f задана таблицей

s	-1	0	1	2
$f(s)$	3	-1	1	-2

Найдите обратную к функции g, где $g(t) = 2 \cdot f(t-1)$. Постройте графики функций g и g^{-1}.

Задача 28. Функция f задана таблицей

s	-1	0	1	2
$f(s)$	3	-1	1	-2

Найдите обратную к функции g, где $g(t) = 2 \cdot f(t-1)$. Постройте графики функций g и g^{-1}.

Ответ.

t	0	1	2	3
$g(t)$	6	-2	2	-4

,

t	-4	-2	2	6
$g^{-1}(t)$	3	1	2	0

.

Решение задачи 29.

Задача 29. Функции f и g заданы таблицами

p	-2	-1	0	1	2
$f(p)$	2	3	1	0	-2

,

q	-1	0	1	2
$g(q)$	3	-1	1	-2

.

Найдите таблицы значений функций $(f \circ g)^{-1}$, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ и $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Задача 29. Функции f и g заданы таблицами

p	-2	-1	0	1	2
$f(p)$	2	3	1	0	-2

,

q	-1	0	1	2
$g(q)$	3	-1	1	-2

.

Найдите таблицы значений функций $(f \circ g)^{-1}$, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ и $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Ответ.

p	-2	1	-1
$g^{-1} \circ f^{-1}(p) = (f \circ g)^{-1}(p)$	-2	0	1

,

p	3	0	2
$f^{-1} \circ g^{-1}(p) = (g \circ f)^{-1}(p)$	0	1	2

.

Решение задачи 30.

Задача 30. Проверьте, является ли функция, заданная формулой $f(x) = 2x - 3$, обратной к функции, заданной формулой $g(y) = 0.5y + 1.5$.

Задача 30. Проверьте, является ли функция, заданная формулой $f(x) = 2x - 3$, обратной к функции, заданной формулой $g(y) = 0.5y + 1.5$.

Ответ. Является, так как $g(f(x)) = 0.5 \cdot (2x - 3) + 1.5 = x$ и $f(g(y)) = 2 \cdot (0.5y + 1.5) - 3 = y$.

Решение задачи 31.

Задача 31. Пусть $E(p) = E(q)$ и

x	-1	0	1
$p(x)$	2	3	1

,

x	-1	0	1
$q^{-1}\big(p(x)\big)$	3	2	0

.

Найдите функцию q.

Задача 31. Пусть $E(p) = E(q)$ и

x	-1	0	1
$p(x)$	2	3	1

,

x	-1	0	1
$q^{-1}\big(p(x)\big)$	3	2	0

.

Найдите функцию q.

Ответ.

y	3	2	0
$q(y)$	2	3	1

.

Решение задачи 32.

Задача 32. Найдите обратную к функции $f(x) = 10^{2x} + 10^x + 2$.

Задача 32. Найдите обратную к функции $f(x) = 10^{2x} + 10^x + 2$.

Ответ. $f^{-1}(t) = \lg\left(\sqrt{4t-7} - 1\right) - \lg 2$.

Решение задачи 33.

Задача 33. Найдите обратные (с указанием множеств, на которых найдены обратные функции) к функциям: $f(x) = (x^3 - 5)^{1/5}$, $g(x) = \exp(5x^5 - 3)$, $h(x) = \lg^2\left((2x+4)^3 + 2\right)$, $k(x) = 4^x + 2^x - 2$, $m(x) = 10^{x-2} + 10$.

Задача 33. Найдите обратные (с указанием множеств, на которых найдены обратные функции) к функциям: $f(x) = (x^3 - 5)^{1/5}$, $g(x) = \exp(5x^5 - 3)$, $h(x) = \lg^2\left((2x+4)^3 + 2\right)$, $k(x) = 4^x + 2^x - 2$, $m(x) = 10^{x-2} + 10$.

Ответ.

$f(x) = (x^3 - 5)^{1/5}$	$x \in \mathbb{R}$	$f^{-1}(z) = \left(x^5 + 5\right)^{1/3}$
$g(x) = \exp(5x^5 - 3)$	$x \in \mathbb{R}$	$g^{-1}(t) = \left(\frac{3 + \ln t}{5}\right)^{1/5}$
$h(x) = \lg^2\left((2x+4)^3 + 2\right)$ $h(x) = \lg^2\left((2x+4)^3 + 2\right)$	$x \geq -1$ $\begin{cases} -2 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < x \\ x \leq -1 \end{cases}$	$h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(10^{\sqrt{y}} - 2\right)^{1/3} - 2$ $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(10^{-\sqrt{y}} - 2\right)^{1/3} - 2$
$k(x) = 4^x + 2^x - 2$	$x \in \mathbb{R}$	$k^{-1}(s) =$ $\log_2\left(\sqrt{4s+9} - 1\right) - 1$
$m(x) = 10^{x-2} + 10$	$x \in \mathbb{R}$	$m^{-1}(y) = 2 + \lg(y - 10)$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?