Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Тело кватернионов

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Определение кватерниона **3**

II. Теорема о теле кватернионов **26**

III. Матричное представление алгебры кватернионов **31**

III.1. Доказательство представимости 34

III.2. Завершение доказательства теоремы 1 59

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов **70**

V. Деление в алгебре кватернионов **117**

Определение кватерниона

Конструкцию тела кватернионов можно рассматривать как результат абстрагирования для векторной алгебры с операциями сложения и векторного произведения векторов в так называемом аффинном пространстве (в котором рассматриваются векторы и точки).

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i,$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (\mathbf{a_1 a_2} - \qquad\qquad\qquad\qquad) +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $\mathbf{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 \mathbf{- b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2}) +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (\mathbf{a_1 b_2} + \qquad\qquad\qquad\qquad)\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + \mathbf{b_1} i + c_1 j + d_1 k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + \mathbf{a_2 b_1} + \qquad\qquad)\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad \mathbf{j \cdot k = i} = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mathbf{c_1 d_2} - \qquad)\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = \mathbf{i = -k \cdot j}$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - \mathbf{c_2 d_1})\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (\mathbf{a_1 c_2} + \qquad\qquad\qquad\qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + \mathbf{a_2 c_1} + \qquad\qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + \mathbf{d_1 b_2} - \qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$

$$(a_1 + \mathbf{b_1} i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - \mathbf{b_1 d_2})\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (\mathbf{a_1 d_2} + \qquad\qquad\qquad\qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + \mathbf{a_2 d_1} + \qquad\qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\mathbf{i \cdot j = k} = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + \mathbf{b_1} i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + \mathbf{b_1 c_2} - \qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - \mathbf{b_2 c_1})\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)\, k.$$

Это умножение называют **умножением Грассмана**.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом***.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом***.

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом***.

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом***.

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь. А именно, применим **стратегию построения модели**.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом***.

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь. А именно, применим **стратегию построения модели**.

Построим модель алгебры кватернионов средствами **матричной алгебры**.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[1]

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[2]

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[3]

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

[3] Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned}$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L=R$ равносильными преобразованиями к тождеству (при оформлении доказательства полученную цепоч-

ку равенств следует выписать в обратном порядке: от тождества к доказываемому равенству $L = R$);

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L = R$ равносильными преобразованиями к тождеству;

2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L = R$ равносильными преобразованиями к тождеству;

2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;
3) применение метода «от противного».

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) **приведение равенства $L = R$ к тождеству**;

2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;

3) применение метода «от противного».

Применим **первый способ**.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k)^{\varphi} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k)^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b_1+b_2)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (c_1+c_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (d_1+d_2)\Big($$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k)^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b_1+b_2)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (c_1+c_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (d_1+d_2)\Big($$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -\,(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -\,(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} =$$

$$= \left(a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+\left(a_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\right),$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -\,(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi} + (a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} =$$

$$= \left(a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+\left(a_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\right),$$

что приводится к полученному выше выражению для левой части L **равенства (2)**.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, правая часть **равенства (2)** приведена к тому же виду, что и его левая часть. **Равенство (2)** доказано.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для доказательства **равенства (3)** достаточно проверить соотношения $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$, что не вызывает проблем у человека, знакомого с операцией **произведения матриц**.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

Существование обратного элемента относительно умножения кватернионов следует из того, что **отображение (1)** является мономорфизмом, **критерия существования обратной матрицы** и невырож-

денности ненулевой матрицы

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix},$$

(т.е. если хотя бы один коэффициент не равен 0):

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} =$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di) =$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di) = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di) = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Значит, матрица $(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ обратима, если хотя бы один из коэффициентов не равен 0.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di) = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Значит, матрица $(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ обратима, если хотя бы один из коэффициентов не равен 0.

Теорема 1 о теле кватернионов доказана.

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставим вектор $b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, т.е введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $\mathbf{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$, $\quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j$
$k \cdot i = j = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 +$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - \qquad)\, i$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - \qquad)\,j +$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\, j +$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j + (b_1 c_2 - \qquad)\,k =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\,k =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$ $k \cdot i = j = -i \cdot k,$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\,k =$$

$$= -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -\left(b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left[b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]^{\psi^{-1}} =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -\left(b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left[b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]^{\psi^{-1}} =$$

$$= -\left((b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\psi},\ (b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\psi}\right) + \left[(b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\psi},\ (b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}.$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}},$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_2^{\psi},\ u_1^{\psi}\right) + \left[u_2^{\psi},\ u_1^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}.$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

Получаем формулы для скалярного и векторного произведения:

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

Получаем формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^{\psi}, \quad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^{\psi}, \quad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right],\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left[u_2^{\psi},\ u_3^{\psi}\right],\ u_1^{\psi}\right] + \left[\left[u_3^{\psi},\ u_1^{\psi}\right],\ u_2^{\psi}\right] =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) u_3 - u_3 \left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) + \right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$+\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\Big)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) + \right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$+\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\Big)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$+\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\Big)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$+\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\Big)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1u_2u_3 - u_2u_1u_3 - u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 - u_1u_2u_3 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1u_2u_3 - u_2u_1u_3 - u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 - u_1u_2u_3 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1 + u_2u_1u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_1 u_2 u_3} - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - \mathbf{u_1 u_2 u_3} + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-u_2u_1u_3 - u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1 + u_2u_1u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\mathbf{u_2 u_1 u_3} - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + \mathbf{u_2 u_1 u_3}\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. +u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\mathbf{u_3 u_1 u_2} + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + \mathbf{u_3 u_1 u_2} - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \qquad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_3 u_2 u_1} + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - \mathbf{u_3 u_2 u_1} + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \qquad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_2 u_3 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right.$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \qquad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_2 u_3 u_1} + u_1 u_3 u_2 + \right.$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - \mathbf{u_2 u_3 u_1}\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_3 u_2 - u_1 u_3 u_2\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^\psi, \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_3 u_2 - u_1 u_3 u_2\right)^\psi = 0.$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right)^{\psi}, \qquad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right],\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left[u_2^{\psi},\ u_3^{\psi}\right],\ u_1^{\psi}\right] + \left[\left[u_3^{\psi},\ u_1^{\psi}\right],\ u_2^{\psi}\right] = 0. \tag{5}$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставлен вектор $b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, т.е введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Для кватернионов $a_p + \underbrace{b_p i + c_p j + d_p k}_{u_p}$, где $p \in \{1;\ 2\}$:

$$(a_1 + u_1) \cdot (a_2 + u_2) = \underbrace{a_1 a_2 - \left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right)}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{a_1 u_2 + a_2 u_1 + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}}_{\text{векторная часть}}. \tag{6}$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Вычисление элемента, обратного относительно произведения, можно с помощью представления (в данном случае — изоморфизма), заданного **формулой (1)** и **вычисления обратной матрицы**. Однако, хотелось бы иметь явную формулу для нахождения обратного элемента.

V. Деление в алгебре кватернионов

Вычисление элемента, обратного относительно произведения, можно с помощью представления (в данном случае — изоморфизма), заданного **формулой (1)** и **вычисления обратной матрицы**. Однако, хотелось бы иметь явную формулу для нахождения обратного элемента.

Применим **стратегию поиска аналогии**. Алгебра кватернионов является развитием алгебры комплексных чисел, поэтому можно попробовать ввести **аналогичные конструкции**.

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**:

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$\alpha \cdot \overline{\alpha} =$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) =$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

Следовательно, по формуле для вычисления **скалярного произ-**

ведения векторов с помощью их координат

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = a^2 - (u\cdot u) = a^2 - \left(-\left(u^{\psi}, u^{\psi}\right) + \left[u^{\psi}, u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}} \right) = a^2 + \left(u^{\psi}, u^{\psi}\right) =$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

Следовательно, по формуле для вычисления **скалярного произ-**

ведения векторов с помощью их координат

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = a^2 - (u\cdot u) = a^2 - \left(-\left(u^{\psi}, u^{\psi}\right) + \left[u^{\psi}, u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}} \right) = a^2 + \left(u^{\psi}, u^{\psi}\right) = a^2 +$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Следовательно,

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \overline{\alpha}}\overline{\alpha}\right) = 1.$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \overline{\alpha}}\overline{\alpha}\right) = 1.$$

Поэтому

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \overline{\alpha}} \cdot \overline{\alpha}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}. \quad (8)$$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?