Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Системы линейных уравнений

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Некоторые понятия теории систем линейных уравнений **4**
I.1. Основные определения теории СЛУ 5
I.2. Некоторые проблемы теории СЛУ 10
I.3. Стандартные формы представления СЛУ 13
I.4. Решение СЛУ 24

II. Методы решения СЛУ **35**
II.1. Формулы Крамера 36
II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения 45
II.3. Элементарные преобразования систем уравнений . . . 52
II.4. Теорема о равносильных преобразованиях СЛУ 57
II.5. Краткое описание метода Гаусса 59
II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица 101

II.7. Получение общего решения ОСЛУ 109
II.8. Получение частного решения НСЛУ 134

III. Основные теоретические результаты **135**
III.1. Теорема Кронекера-Капелли 136
III.2. Теорема об общем решении НСЛУ 155
III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ . . 164
III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ 171
III.5. Теорема об общем решении ОСЛУ 187
III.6. Фундаментальная матрица 189

I. Некоторые понятия теории систем линейных уравнений

Здесь мы ограничимся первоначальными сведениями и подробным изложением одного из основных методов решения систем линейных уравнений: **метода Гаусса**. Для решения некоторых систем линейных уравнений можно применить **формулы Крамера**.

I.1. Основные определения теории СЛУ

Определение 1. Системой уравнений *относительно неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение вида*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} . \qquad (1)$$

Это выражение представляет собой высказывание об одновременной истинности <u>*всех*</u> *уравнений этой системы.*

В случае, когда система состоит только из одного уравнения, левую фигурную скобку обычно не пишут, то есть пишут $2x - y = 3$ вместо $\{2x - y = 3$.

I.1. Основные определения теории СЛУ

Определение 2. Системой линейных уравнений *относительно неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2}$$

где a_{ij} *— некоторые числа, называемые* **коэффициентами** *этой системы, и* b_j *— также числа*[1]*, называемые* **свободными членами** *системы (2).*

[1] В общем случае a_{ij} и b_j являются элементами некоторого кольца.

I.1. Основные определения теории СЛУ

Определение 2. Системой линейных уравнений *относительно неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2}$$

где a_{ij} *— некоторые числа, называемые* **коэффициентами** *этой системы, и* b_j *— также числа, называемые* **свободными членами** *системы (2).*

Если при этом $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, *то система линейных уравнений (2) называется* **однородной системой линейных уравнений** *(сокращенно* **ОСЛУ***)*[2].

[2]Как пример использования этой аббревиатуры, приведем высказывание одного студента по поводу полученной им оценки: «Но я ведь нашел решение этому ОСЛУ!»

I.1. Основные определения теории СЛУ

Определение 2. Системой линейных уравнений *относительно неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2}$$

где a_{ij} *— некоторые числа, называемые* **коэффициентами** *этой системы, и* b_j *— также числа, называемые* **свободными членами** *системы (2).*

Если при этом $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, *то система линейных уравнений (2) называется* **однородной системой линейных уравнений** *(сокращенно* **ОСЛУ***). В противном случае (то есть если хотя бы один из свободных членов отличен от 0) система линейных уравнений (2) называется* **неоднородной системой линейных уравнений** *(сокращенно* **НСЛУ***).*

I.1. Основные определения теории СЛУ

Одной из причин, обусловивших введение названия «система линейных уравнений» является тот факт, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — числа, то уравнение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$ называется **линейным уравнением** относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

I.2. Некоторые проблемы теории СЛУ

Каков круг проблем, которыми мы должны заниматься в теории систем линейных уравнений? Наука воспринимает и обрабатывает только информацию, представленную в одной из стандартных форм. Из этого утверждения вытекают следующие задачи. Во-первых, следует определить несколько стандартных форм представления системы линейных уравнений.

I.2. Некоторые проблемы теории СЛУ

Каков круг проблем, которыми мы должны заниматься в теории систем линейных уравнений? Наука воспринимает и обрабатывает только информацию, представленную в одной из стандартных форм. Из этого утверждения вытекают следующие задачи. Во-первых, следует определить несколько стандартных форм представления системы линейных уравнений. Во-вторых, актуальным является вопрос о равносильных преобразованиях системы уравнений.

I.2. Некоторые проблемы теории СЛУ

Каков круг проблем, которыми мы должны заниматься в теории систем линейных уравнений? Наука воспринимает и обрабатывает информацию только информацию, представленную в одной из стандартных форм. Из этого утверждения вытекают следующие задачи. Во-первых, следует определить несколько стандартных форм представления системы линейных уравнений. Во-вторых, актуальным является вопрос о равносильных преобразованиях системы уравнений. В-третьих, желательно разработать алгоритм преобразования системы уравнений к наиболее важным стандартным формам представления.

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Для создания других стандартных форм представления системы линейных уравнений нам надо определиться с целями их создания. Начнем с компактности. Форма представления (2) нередко оказывается чрезмерно громоздкой при получении формул и других результатов теоретического анализа.

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Компактностью и богатыми возможностями отличается аппарат матричной алгебры, поэтому особую роль играет тот факт, что систему линейных уравнений (2) можно представить в виде

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Компактностью и богатыми возможностями отличается аппарат матричной алгебры, поэтому особую роль играет тот факт, что систему линейных уравнений (2) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Используя «**умножение матриц на макроуровне**», последнее равенство можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Итак, любую систему линейных уравнений (2) можно представить в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Итак, любую систему линейных уравнений (2) можно представить в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ниже мы подробнее займемся матричными уравнениями вида $AX = B$. Интерес к таким уравнениям вызван, в частности, тем обстоятельством, что для отыскания обратной матрицы можно решить матричное уравнение $AX = E$, где E — единичная матрица соответствующей размерности.

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Недостатком системы уравнений (2), который сохраняется и в **форме (3)** остается неочевидность значений переменных, при которых выполняются все равенства **системы (2)** и **матричное уравнение (3)**.

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Недостатком системы уравнений (2), который сохраняется и в **форме (3)** остается неочевидность значений переменных, при которых выполняются все равенства **системы (2)** и **матричное уравнение (3)**.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, можно выделить наиболее простую форму представления систем линейных уравнений:

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Недостатком системы уравнений (2), который сохраняется и в **форме (3)** остается неочевидность значений переменных, при которых выполняются все равенства **системы (2)** и **матричное уравнение (3)**.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, можно выделить наиболее простую форму представления систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = u_1; \\ x_2 = u_2; \\ \dots \\ x_n = u_n. \end{cases}$$

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Недостатком системы уравнений (2), который сохраняется и в **форме (3)** остается неочевидность значений переменных, при которых выполняются все равенства **системы (2)** и **матричное уравнение (3)**.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, можно выделить наиболее простую форму представления систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = u_1; \\ x_2 = u_2; \\ \dots \\ x_n = u_n. \end{cases}$$

Таким образом, актуальной является задача приведения СЛУ к данному виду.

I.3. Стандартные формы представления СЛУ

Цель 1. *Разработать стандартные формы представления системы линейных уравнений.*

Недостатком системы уравнений (2), который сохраняется и в **форме (3)** остается неочевидность значений переменных, при которых выполняются все равенства **системы (2)** и **матричное уравнение (3)**.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, можно выделить наиболее простую форму представления систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = u_1; \\ x_2 = u_2; \\ \dots \\ x_n = u_n. \end{cases}$$

На эту задачу можно выйти и из других соображений.

I.4. Решение СЛУ

Определение 3. Решением *(или* **частным решением***) системы (1) называется такой набор значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что при подстановке этих значений вместо соответствующих переменных в <u>каждое</u> уравнение системы получается верное высказывание.*

Например, набор значений $3, -4$ неизвестных, соответственно, x, y является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x - y = -1, \end{cases}$ поскольку при подстановке $x = 3, \quad y = -4$ каждое из уравнений «превращается» в истинное высказывание.

I.4. Решение СЛУ

Определение 3. Решением *(или* **частным решением***) системы (1) называется такой набор значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что при подстановке этих значений вместо соответствующих переменных в каждое уравнение системы получается верное высказывание.*

Естественным образом возникает вопрос о стандартных формах задания решения уравнения. Принцип **бритвы Оккама** предписывает по возможности обойтись без существенно новых конструкций. Будем отталкиваться от рассмотренных форм задания системы линейных уравнений (2), стр.6 и (3), стр.16.

I.4. Решение СЛУ

Определение 3. Решением *(или* **частным решением***) системы (1) называется такой набор значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что при подстановке этих значений вместо соответствующих переменных в каждое уравнение системы получается верное высказывание.*

В итоге получаем две стандартные формы задания решения уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = u_1; \\ x_2 = u_2; \\ \ldots \\ x_n = u_n \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

I.4. Решение СЛУ

Определение 4. *Если* ***система (1)*** *имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет — то* **несовместной**.

I.4. Решение СЛУ

Определение 4. *Если* ***система (1)*** *имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет — то* **несовместной**.

Система уравнений может иметь не одно решение. Известно, что, например, система линейных уравнений либо несовместна (не имеет решений), либо имеет единственное решение, либо имеет *бесконечно много* решений. В частности, СЛУ не может иметь ровно 2 решения.

I.4. Решение СЛУ

Определение 4. *Если система (1) имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет — то* **несовместной**.

Система уравнений может иметь не одно решение. Известно, что, например, система линейных уравнений либо несовместна (не имеет решений), либо имеет единственное решение, либо имеет *бесконечно много* решений. В частности, СЛУ не может иметь ровно 2 решения. Впоследствии мы подробнее изучим *множество* решений системы линейных уравнений, а сейчас обсудим вопрос о том, как можно задать это множество.

I.4. Решение СЛУ

Определение 4. *Если система (1) имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет — то* **несовместной**.

Например, общее решение системы из одного уравнения $x - 2y + 3z = 2$ можно представить в виде $x = 2 + 2y - 3z$.

I.4. Решение СЛУ

Определение 4. *Если система (1) имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет — то* **несовместной**.

Например, общее решение системы из одного уравнения $x - 2y + 3z = 2$ можно представить в виде $x = 2 + 2y - 3z$. Такую запись можно интерпретировать следующим образом: x мы считаем «настоящей неизвестной», а переменные y, z — «параметрами». Если «параметрам» y, z придать произвольные значения и вычислить по формуле $x = 2 + 2y - 3z$ значение «настоящей переменной» x, то полученный набор значений переменных x, y, z будет решением исходной системы $x - 2y + 3z = 2$.

I.4. Решение СЛУ

Форма записи решения, представляющая собой систему выражений для «настоящих переменных» через те переменные, которые считаются «параметрами», удобна для случая, когда исходная система была представлена в форме (2). Если же исходная система была представлена в матричной форме (3), то и ответ желательно представить в матричной форме. Это можно сделать, например, следующим образом.

I.4. Решение СЛУ

Обозначим через C, D значения, соответственно, переменных y, z. Тогда решение можно представить в виде $\begin{cases} x = 2 + 2C - 3D; \\ y = C; \\ z = D \end{cases}$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Такая форма представления ответа (см. также пример и пример) положена в основу следующего определения.

I.4. Решение СЛУ

Определение 5. *Система функций*

$$\varphi_1(C_1, C_2, \ldots, C_k), \varphi_2(C_1, C_2, \ldots, C_k), \ldots, \varphi_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)$$

называется **общим решением** *системы уравнений (2), если*

во-первых, *при любых значениях* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *переменных* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *набор* $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(P_1, P_2, \ldots, P_k), \\ x_2 = \varphi_2(P_1, P_2, \ldots, P_k), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_k) \end{cases}$ *является решением системы (2);*

во-вторых, *для любого решения* $\begin{cases} x_1 = u_1, \\ x_2 = u_2, \\ \ldots \\ x_n = u_n \end{cases}$ *системы (2) найдется такой набор чисел* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *что* $u_i = \varphi_i(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ *для всех* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

II. Методы решения СЛУ

Универсальной процедуры решения систем произвольных уравнений не существует. В отличие от общей ситуации, для систем линейных уравнений такие процедуры давно известны. Мы рассмотрим только 2 из них: решение с помощью **формул Крамера** (применима только к относительно узкому классу линейных уравнений) и решение **методом Гаусса**. Сейчас мы рассмотрим метод решения, основанный на **формулах Крамера** (решение системы из n линейных уравнений с n неизвестными), а потом подробно обсудим метод, более универсальный и более эффективный для систем с большим числом неизвестных, так называемый *метод Гаусса*.

II.1. Формулы Крамера

Теорема 1 (Крамер). *Пусть матрица A коэффициентов* ***системы линейных уравнений (2)*** *— квадратная, то есть $m = n$, причем $\det A \neq 0$. Положим $\Delta = \det A$, и, для $k\{1, 2, \ldots, n\}$, обозначим через Δ_{x_k} детерминант матрицы, полученной из A заменой k-го столбца столбцом свободных членов, то есть*

$$\Delta_{x_k} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ & & & \ldots & & & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие формулы, называемые **формулами Крамера***:* $x_k = \dfrac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$.

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x_1 = x_1^*, \\ x_2 = x_2^*, \\ \dots \\ x_n = x_n^* \end{cases}$ — решение **системы (2)**.

Используя свойства детерминанта, получаем:

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x_1 = x_1^*, \\ x_2 = x_2^*, \\ \dots \\ x_n = x_n^* \end{cases}$ — решение **системы (2)**.

Используя свойства детерминанта, получаем:

$$\Delta \cdot x_k^* = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot x_k^* =$$

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x_1 = x_1^*, \\ x_2 = x_2^*, \\ \dots \\ x_n = x_n^* \end{cases}$ — решение **системы (2)**.

Используя свойства детерминанта, получаем:

$$\Delta \cdot x_k^* = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot x_k^* =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k}x_k^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k}x_k^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k}x_k^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x_1 = x_1^*, \\ x_2 = x_2^*, \\ \dots \\ x_n = x_n^* \end{cases}$ — решение **системы (2)**.

Используя свойства детерминанта, получаем:

$$\Delta \cdot x_k^* = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k}x_k^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k}x_k^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k}x_k^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Как известно, детерминант не изменится, если в последней матрице заменить k-й столбец суммой k-го столбца с линейной комбинацией остальных столбцов. В качестве коэффициентов выберем числа x_1^* для первого столбца, x_2^* — для второго и т.д. Тогда элемент q-ой строки k-го столбца будет иметь вид:

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x_1 = x_1^*, \\ x_2 = x_2^*, \\ \dots \\ x_n = x_n^* \end{cases}$ — решение **системы (2)**.

Используя свойства детерминанта, получаем:

$$\Delta \cdot x_k^* = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k}x_k^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k}x_k^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k}x_k^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент q-ой строки k-го столбца будет иметь вид:

$$\underbrace{a_{q,1}x_1^* + \ldots + a_{q,k-1}x_{k-1}^*}_{\text{линейная комбинация элементов первых } k-1 \text{ столбцов}} + a_{q,k}x_k^* + \underbrace{a_{q,k+1}x_{k+1}^* + \ldots + a_{q,n}x_n^*}_{\text{линейная комбинация элементов последних } n-k \text{ столбцов}}$$

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Следовательно,

$$\Delta \cdot x_k^* = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1,p}x_p^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{2,p}x_p^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{n,p}x_p^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Но набор чисел $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ является решением **системы (2)**, поэтому $\sum\limits_{p=1}^{n} a_{q,p}x_p^* = b_q$, то есть

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Следовательно,

$$\Delta \cdot x_k^* = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1,p}x_p^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{2,p}x_p^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{n,p}x_p^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta_{x_k}.$$

II.1. Формулы Крамера

Доказательство. Следовательно,

$$\Delta \cdot x_k^* = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1,p}x_p^* & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{2,p}x_p^* & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{n,p}x_p^* & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta_{x_k}.$$

Следовательно, $x_k^* = \dfrac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$, что и требовалось доказать.

Рассмотреть пример?

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Сначала мы рассмотрим метод Гаусса (метод исключения неизвестных) на простом примере.

Метод Гаусса решения СЛУ называют еще *методом исключения неизвестных*. Метод Гаусса основан на преобразованиях системы уравнений, приводящих эту систему к, в некотором смысле, максимально простому виду. Сначала добьемся, чтобы, например, переменная x осталась только в первом уравнении. Как это сделать? Рассмотрим «арсенал» доступных средств. Сначала разберемся, какие преобразования допустимы. При решении системы уравнений нас сейчас интересует только множество решений этой системы. Поэтому допустимыми следует считать такие преобразования, которые не изменяют множество решений системы уравнений. Прежде чем продолжить решение этого примера, рассмотрим несколько новых понятий.

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Определение 6. *Две системы уравнений называются* **равносильными**, *если множество решений первой системы равно множеству решений второй системы уравнений.*

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Определение 6. *Две системы уравнений называются* **равносильными**, *если множество решений первой системы равно множеству решений второй системы уравнений.*

Иными словами, системы уравнений равносильны тогда и только тогда, когда всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот, всякое решение второй системы уравнений является решением первой системы.

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Определение 6. *Две системы уравнений называются* **равносильными**, *если множество решений первой системы равно множеству решений второй системы уравнений.*

Иными словами, системы уравнений равносильны тогда и только тогда, когда всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот, всякое решение второй системы уравнений является решением первой системы.

Переход к последней формулировке осуществлен с помощью определения равенства множеств. Действительно, пусть A — множество решений первой системы уравнений, B — множество решений второй системы. Тогда высказывание $A = B$, согласно *определению* равенства множеств, означает, что любой элемент множества A (то есть решение первой системы) является элементом множества B (то есть решением второй системы) и наоборот.

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Рассмотрим следующие преобразования системы уравнений.

- **Произведением** уравнения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на число λ назовем уравнение $\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- **Суммой** уравнений $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + u(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + v(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

II.2. Метод Гаусса: случай единственного решения

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы. Например, равносильными являются системы $\begin{cases} -x-y=2 \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} -x-y=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$, получаемые друг из друга перестановкой второго и третьего уравнений;

II.3. Элементарные преобразования систем уравнений

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы;

II.3. Элементарные преобразования систем уравнений

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы;
- умножение левой и правой частей любого уравнения системы на ненулевое число. Например, равносильными являются системы $\begin{cases} -x-y=2 \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$, так как они получаются друг из друга умножением первого уравнения на -1 (точнее, на -1 умножаются левая и правая части первого уравнения);

II.3. Элементарные преобразования систем уравнений

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы;
- умножение левой и правой частей любого уравнения системы на ненулевое число;
- Заменой одного из уравнений системы суммой этого уравнения с линейной комбинацией других уравнений.

II.3. Элементарные преобразования систем уравнений

Например, системы $\begin{cases} -x-y=2 \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+z+(-x-y)-3(\end{cases}$ равносильны, так как вторая система получаются из первой заменой третьего уравнения на сумму третьего уравнения первой системы с линейной комбинацией первого и второго уравнений с коэффициентами 1 и, соответственно, -3 (2 в правой части — это $3+2-3\cdot 1$).

II.3. Элементарные преобразования систем уравнений

Оказывается, для решения систем линейных уравнений нам достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы;
- умножение левой и правой частей любого уравнения системы на ненулевое число;
- Заменой одного из уравнений системы суммой этого уравнения с линейной комбинацией других уравнений.

II.4. Теорема о равносильных преобразованиях СЛУ

Теорема 2 (о равносильных преобразованиях СЛУ). *Пусть система A линейных уравнений получена из системы B линейных уравнений с помощью серии последовательных преобразований одного из следующих видов:*

1. *перестановка уравнений системы;*
2. *умножение левой и правой частей одного из уравнений на некоторое ненулевое число λ;*
3. *заменой одного из уравнений системы суммой этого уравнения с линейной комбинацией остальных уравнений;*
4. *удалением из системы уравнений тождества $0 = 0$;*
5. *добавлением в систему уравнений линейной комбинации уравнений системы B.*

Тогда системы A и B равносильны.

II.4. Теорема о равносильных преобразованиях СЛУ

Доказательство. Логическая структура этой теоремы для вас может показаться необычной: это система теорем-импликаций типа «если система B получена из системы A перестановкой двух уравнений системы A, то системы A и B равносильны» и др. Продолжение доказательства можно рассматривать как несложное упражнение по теме «доказательство теорем».

Возникли вопросы? Нужен комментарий?

Рассмотреть пример?

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Сделаем некоторые выводы из решения примера. С помощью метода Гаусса поиск решения системы линейных уравнений (СЛУ) осуществляется в 2 этапа, называемых *прямым* и *обратным* ходом метода Гаусса.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Сделаем некоторые выводы из решения примера. С помощью метода Гаусса поиск решения системы линейных уравнений (СЛУ) осуществляется в 2 этапа, называемых *прямым* и *обратным* ходом метода Гаусса.

На первом этапе мы постепенно исключаем неизвестные из уравнений, «находящихся ниже» того уравнения, с помощью которого проводится это исключение: сначала с помощью первого уравнения исключили во втором и третьем уравнениях переменную x, потом с помощью второго исключили в третьем уравнении переменную y.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса можно истолковать таким образом: уравнение, с помощью которого мы исключаем соответствующую неизвестную из «нижележащих» уравнений, является своеобразным «инструментом».

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса можно истолковать таким образом: уравнение, с помощью которого мы исключаем соответствующую неизвестную из «нижележащих» уравнений, является своеобразным «инструментом». Сначала мы подготавливаем этот «инструмент», добиваясь единичного коэффициента перед интересующей нас переменной.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса можно истолковать таким образом: уравнение, с помощью которого мы исключаем соответствующую неизвестную из «нижележащих» уравнений, является своеобразным «инструментом». Сначала мы подготавливаем этот «инструмент», добиваясь единичного коэффициента перед интересующей нас переменной. В первом уравнении нас интересует переменная x, во втором уравнении (после «очистки» второго и третьего уравнений от x), — это y, в третьем уравнении (после «удаления» y из третьего уравнения) — это переменная z.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса можно истолковать таким образом: уравнение, с помощью которого мы исключаем соответствующую неизвестную из «нижележащих» уравнений, является своеобразным «инструментом». Сначала мы подготавливаем этот «инструмент», добиваясь единичного коэффициента перед интересующей нас переменной. В первом уравнении нас интересует переменная x, во втором уравнении (после «очистки» второго и третьего уравнений от x), — это y, в третьем уравнении (после «удаления» y из третьего уравнения) — это переменная z. При этом каждый раз после «изготовления инструмента» (получения единичного коэффициента перед соответствующей переменной) сама «инструментальная строка» и все вышележащие строки больше не изменяются на протяжении всего прямого хода метода Гаусса.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

В отличие от прямого хода, на протяжении обратного хода метода Гаусса в качестве «инструментальной строки» используются нижние строки матрицы, и с их помощью исключаются неизвестные из «вышележащих» уравнений.

II.5. Краткое описание метода Гаусса

Прямой ход метода Гаусса на матричном языке в рассматриваемом примере осуществлялся следующим образом:

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ * & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ * & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ * & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & 1 & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & * & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & \mathbf{0} & * \\ 0 & 1 & * & \dots & \mathbf{0} & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \mathbf{0} & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & \mathbf{0} & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

Представление метода Гаусса на матричном языке:

- Во время прямого хода метода Гаусса мы постепенно получали единицы на главной диагонали матрицы, и нули — ниже нее.
- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали, начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right)$$

«Расшифровывая» полученную матрицу как систему линейных уравнений, получаем искомое решение исходной СЛУ.

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Теперь рассмотрим **более сложный пример**, в котором решение не является единственным.

Форма записи ответа, примененная нами при **решении примера**, в некоторых случаях нас не будет устраивать. В теории линейных пространств более удобной является форма записи, использующая понятие *фундаментальной системы решений*. Понятие фундаментальной системы решений ОСЛУ и фундаментальной матрицы мы рассмотрим в главе, посвященной теории линейных пространств.

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Для того, чтобы записать общее решение **системы уравнений примера** в соответствии с определением общего решения, достаточно положить $c = C_1, \quad d = C_2, \quad e = C_3$. Тогда общее решение исходной системы можно представить в виде $\begin{cases} a = 2 + -11C_1 + 8C_2 + 5C_3, \\ b = 1 + -6C_1 + 5C_2 + 3C_3, \\ c = C_1, \\ d = C_2, \\ e = C_3. \end{cases}$

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Последнюю систему уравнений часто записывают в матричной форме, «индустриальную методику» получения которой мы рассмотрим ниже, в разделе II.7:

$$\begin{cases} a = 2 + -11C_1 + 8C_2 + 5C_3, \\ b = 1 + -6C_1 + 5C_2 + 3C_3, \\ c = C_1, \\ d = C_2, \\ e = C_3. \end{cases}$$

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

$$\begin{cases} a = 2 + -11C_1 + 8C_2 + 5C_3, \\ b = 1 + -6C_1 + 5C_2 + 3C_3, \\ c = C_1, \\ d = C_2, \\ e = C_3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что с помощью «**умножения матриц на макроуровне**» представляется в виде

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

$$\begin{cases} a = 2 + -11C_1 + 8C_2 + 5C_3, \\ b = 1 + -6C_1 + 5C_2 + 3C_3, \\ c = C_1, \\ d = C_2, \\ e = C_3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что с помощью «**умножения матриц на макроуровне**» представляется в виде

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 8 & 5 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Система уравнений $\begin{cases} 2a-3b+4c-d-e=0 \\ a-2b-c+2d+e=0 \\ 4a-7b+2c+3d+e=0 \\ 3a-5b+3c+d=0 \\ 5a-8b+7c-e=0 \end{cases}$ называется *однородной системой уравнений*, **соответствующей** исходной системе $\begin{cases} 2a-3b+4c-d-e=1 \\ a-2b-c+2d+e=0 \\ 4a-7b+2c+3d+e=1 \\ 3a-5b+3c+d=1 \\ 5a-8b+7c-e=2 \end{cases}$

II.6. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Матрица $\Phi = \begin{pmatrix} -11 & 8 & 5 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется **фундаментальной матрицей** однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 2a - 3b + 4c - d - e = 0 \\ a - 2b - c + 2d + e = 0 \\ 4a - 7b + 2c + 3d + e = 0 \\ 3a - 5b + 3c + d = 0 \\ 5a - 8b + 7c - e = 0 \end{cases}$, а система матриц-столбцов $\begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — **фундаментальной системой решений** этой однородной системы линейных уравнений.

Наш способ получения фундаментальной матрицы из «преобразованной» расширенной матрицы является «ремесленным», более ко-

роткий «индустриальный» метод получения фундаментальной матрицы, см. рис. 1, и рис. 2, мы рассмотрим чуть ниже, в разделе II.7, в процессе решения соответствующего примера.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

Сейчас мы рассмотрим «индустриальный» метод получения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений после приведения матрицы ее коэффициентов к указанному виду. Мы будем иллюстрировать выкладки на примере ОСЛУ, соответствующей НСЛУ **примера**. Все преобразования метода Гаусса будем проводить на матричном языке (см. **список этих преобразований для матричной формы записи**). Как **уже отмечалось**, целью этих преобразований является получение равносильной системы уравнений, у которой матрица коэффициентов имеет «единичный фрагмент».

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

В частности, при решении упомянутого **примера** получена система, матрица коэффициентов которой имеет следующий вид (столбец свободных членов соответствующей однородной системы мы не пишем, так как мы сейчас занимаемся соответствующей ОСЛУ, а для однородной системы линейных уравнений при всех преобразованиях метода Гаусса столбец свободных членов остается нулевым) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. При этом «единичный фрагмент» состоит из первого и второго столбцов этой матрицы.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. При этом «единичный фрагмент» состоит из первого и второго столбцов этой матрицы. Все неизвестные, отвечающие этим номерам столбцов (**в примере** это a, b) будем считать «настоящими» неизвестными, а все остальные неизвестные (в **примере** это c, d, e) — параметрами.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. При этом «единичный фрагмент» состоит из первого и второго столбцов этой матрицы. Все неизвестные, отвечающие этим номерам столбцов (**в примере** это a, b) будем считать «настоящими» неизвестными, а все остальные неизвестные (в **примере** это c, d, e) — параметрами.

Будем искать фундаментальную систему решений в виде набора столбцов, в которых все параметры нулевые, кроме одного, равного 1. В роли этого «исключительного параметра», равного 1, сначала выбирается первый параметр, потом — второй параметр, потом — третий параметр, и т.п.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. При этом «единичный фрагмент» состоит из первого и второго столбцов этой матрицы. Все неизвестные, отвечающие этим номерам столбцов (**в примере** это a, b) будем считать «настоящими» неизвестными, а все остальные неизвестные (в **примере** это c, d, e) — параметрами.

Будем искать фундаментальную систему решений в виде набора столбцов, в которых все параметры нулевые, кроме одного, равного 1. В роли этого «исключительного параметра», равного 1, сначала выбирается первый параметр, потом — второй параметр, потом — третий параметр, и т.п. Эту процедуру мы назовем на нашем слэнге «протаскиванием единички через параметры».

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

Обратите внимание на тот факт, что числа в матрице являются *коэффициентами* перед неизвестными, а при «протаскивании единички через параметры» мы говорим о *значениях переменных*, то есть мы придаем какие-то значения одним переменным (неизвестным, которые мы считаем параметрами) и находим соответствующие значения других переменных («настоящих» неизвестных). На самом деле сейчас мы решаем систему линейных уравнений, которую можно представить в матричном виде

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{коэффициенты}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{\text{неизвестные}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, во время выполнения преобразований метода Гаусса, мы работали с *коэффициентами* перед неизвестными, а сейчас, на этапе записи решения, мы «манипулируем» с неизвестными: «протаскиваем единичку» через «параметры» x_3, x_4, x_5, и вычисляем соответствующие значения «настоящих неизвестных» x_1, x_2.

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{11} & -8 & -5 \\ 0 & 1 & \mathbf{6} & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{11} & -8 & -5 \\ 0 & 1 & \mathbf{6} & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{11} & -8 & -5 \\ 0 & 1 & \mathbf{6} & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & \mathbf{-8} & -5 \\ 0 & 1 & 6 & \mathbf{-5} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & \mathbf{-8} & -5 \\ 0 & 1 & 6 & \mathbf{-5} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & \mathbf{-8} & -5 \\ 0 & 1 & 6 & \mathbf{-5} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{5} \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & \mathbf{-5} \\ 0 & 1 & 6 & -5 & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & \mathbf{-5} \\ 0 & 1 & 6 & -5 & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & \mathbf{-5} \\ 0 & 1 & 6 & -5 & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{11} & -8 & -5 \\ 0 & 1 & \mathbf{6} & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{-6} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & \mathbf{-8} & -5 \\ 0 & 1 & 6 & \mathbf{-5} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -11 & \mathbf{8} & \bullet \\ -6 & \mathbf{5} & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.7. Получение общего решения ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & \mathbf{-5} \\ 0 & 1 & 6 & -5 & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -11 & 8 & \mathbf{5} \\ -6 & 5 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|ccc}
\multicolumn{2}{c|}{\text{«настоящие» неизвестные}} & \multicolumn{3}{c}{\text{«параметры»}} \\
\hline
x_1 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ \hline & & \text{«активный» столбец} & & \end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|ccc}
\multicolumn{2}{c|}{\text{«настоящие» неизвестные}} & \multicolumn{3}{c}{\text{«параметры»}} \\
\hline
x_1 & x_2 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} & & & \uparrow & \\ \hline & & & \text{«активный» столбец} & \end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|ccc}
\multicolumn{2}{c|}{\text{«настоящие» неизвестные}} & \multicolumn{3}{c}{\text{«параметры»}} \\
\hline
x_1 & x_2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} & & & & \uparrow \\ \hline & & & & \text{«активный» столбец} \end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Рис. 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.

Другой пример: допустим, решая некоторую ОСЛУ методом Гаусса, мы получили следующую матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 11 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

«Единичный фрагмент» в этом случае образуют второй, пятый и шестой столбцы этой матрицы. Процесс получения фундаментальной матрицы проиллюстрирован на рис. 3 (вместо точек $\bullet$ вставляем компоненты соответствующего «активного столбца» матрицы коэффициентов с обратными знаками).

Другой пример: допустим, решая некоторую ОСЛУ методом Гаусса, мы получили следующую матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 11 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 11 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.

Рассмотреть **еще один пример решения однородной системы линейных уравнений?**

II.8. Получение частного решения НСЛУ

Теперь **посмотрим, как аналогичная «индустриальная технология» позволяет быстро получать частное решение НСЛУ.**

III. Основные теоретические результаты

Мы рассмотрим несколько теорем:

— **теорему Кронекера-Капелли**;

— **теорему об общем решении НСЛУ**;

— **теорему о линейных комбинациях решений ОСЛУ**;

— **теорему о размерности пространства решений ОСЛУ**.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать *равенство* (равенство рангов, то есть чисел). Для **доказательства равенства обычно используются**:

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать *равенство* (равенство рангов, то есть чисел). Для **доказательства равенства обычно используются**:

- *равносильные преобразования*;

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать *равенство* (равенство рангов, то есть чисел). Для **доказательства равенства обычно используются**:

- *равносильные преобразования*;
- *сведение к двум неравенствам*: $\begin{cases} L \leq R, \\ L \geq R \end{cases} \Rightarrow L = R$;

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать *равенство* (равенство рангов, то есть чисел). Для **доказательства равенства обычно используются**:

- *равносильные преобразования*;
- *сведение к двум неравенствам*: $\begin{cases} L \le R, \\ L \ge R \end{cases} \Rightarrow L = R$;
- *метод «от противного»*.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Нам надо доказать *равенство* (равенство рангов, то есть чисел). Для **доказательства равенства обычно используются**:

- *равносильные преобразования*;
- *сведение к двум неравенствам*: $\begin{cases} L \le R, \\ L \ge R \end{cases} \Rightarrow L = R$;
- *метод «от противного»*.

В данном случае проще всего применить второй из этих методов.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Очевидно, что $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \leq \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$, так как, по **теореме о равенстве трех рангов**, ранг равен столбцовому рангу.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.
Осталось показать обратное неравенство: $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \geq \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Используя **умножение матриц на макроуровне** получаем, что если система линейных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Используя **умножение матриц на макроуровне** получаем, что если система линейных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Поэтому, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, базис линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является базисом линейной оболочки системы столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Используя **умножение матриц на макроуровне** получаем, что если система линейных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Поэтому, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, базис линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является базисом линейной оболочки системы столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Таким образом, столбцовые ранги матриц $\mathbf{A}$ и $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ совпадают.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна.

Используя **умножение матриц на макроуровне** получаем, что если система линейных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Поэтому, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, базис линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является базисом линейной оболочки системы столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Таким образом, столбцовые ранги матриц $\mathbf{A}$ и $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ совпадают.

Согласно **теореме о равенстве трех рангов** получаем, что если система уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен рангу матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$. Необходимость доказана.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о равенстве трех рангов**, это означает, что их столбцовые ранги совпадают.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о равенстве трех рангов**, это означает, что их столбцовые ранги совпадают. Значит, максимальная линейно независимая система столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о равенстве трех рангов**, это означает, что их столбцовые ранги совпадают. Значит, максимальная линейно независимая система столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией этой максимальной линейно независимой системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

III.1. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 3. *СЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ***совместна*** *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о равенстве трех рангов**, это означает, что их столбцовые ранги совпадают. Значит, максимальная линейно независимая система столбцов матрицы $\mathbf{A}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** столбец $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией этой максимальной линейно независимой системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Последнее утверждение с помощью **умножения матриц на макроуровне** легко представить в виде $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Таким образом, СЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решение, то есть совместна. Теорема доказана.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ — общее решение соответствующей ОСЛУ, $\tilde{\mathbf{X}}$ — произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ — общее решение соответствующей ОСЛУ, $\tilde{\mathbf{X}}$ — произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ.

Тогда при любых значениях переменных $C_1, \ldots, C_m$ имеем

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{AX}_0(C_1, \ldots, C_m) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0} + \mathbf{B} = \mathbf{B},$$

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ — общее решение соответствующей ОСЛУ, $\tilde{\mathbf{X}}$ — произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ.

Тогда при любых значениях переменных $C_1, \ldots, C_m$ имеем

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{AX}_0(C_1, \ldots, C_m) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0} + \mathbf{B} = \mathbf{B},$$

то есть при любых значениях параметров $C_1, \ldots, C_m$ матрица-столбец $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$ является решением НСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Осталось доказать, что для любого решения $\mathbf{X}$ НСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ можно так подобрать константы $C_1, \ldots, C_m$, что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Осталось доказать, что для любого решения $\mathbf{X}$ НСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ можно так подобрать константы $C_1, \ldots, C_m$, что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Осталось доказать, что для любого решения $\mathbf{X}$ НСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ можно так подобрать константы $C_1, \ldots, C_m$, что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$.

Заметим, что это решение ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, так как $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{AX} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Доказательство. Осталось доказать, что для любого решения $\mathbf{X}$ НСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ можно так подобрать константы $C_1, \ldots, C_m$, что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$.

Заметим, что это решение ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, так как $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{AX} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Поэтому найдутся такие значения параметров $C_1, \ldots, C_m$, что $\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$, то есть $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

III.2. Теорема об общем решении НСЛУ

Теорема 4. *Общее решение* $\mathbf{X}_1(C_1, \ldots, C_m)$ *НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *имеет вид* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m) + \tilde{\mathbf{X}}$*, где* $\mathbf{X}_0(C_1, \ldots, C_m)$ *— общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а* $\tilde{\mathbf{X}}$ *— произвольное фиксированное решение исходной НСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Таким образом, вопрос о структуре общего решения НСЛУ сводится к вопросу о структуре общего решения соответствующего ОСЛУ.

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство.

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Это означает, что надо проверить равенство $\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \mathbf{0}$.

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Это означает, что надо проверить равенство $\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \mathbf{0}$.

Это очевидно, так как по свойствам произведения матриц и в силу того, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, получаем

$$\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) =$$

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Это означает, что надо проверить равенство $\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \mathbf{0}$.

Это очевидно, так как по свойствам произведения матриц и в силу того, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, получаем

$$\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \lambda\mathbf{AX}_1 + \mu\mathbf{AX}_2 =$$

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Это означает, что надо проверить равенство $\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \mathbf{0}$.

Это очевидно, так как по свойствам произведения матриц и в силу того, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, получаем

$$\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \lambda\mathbf{AX}_1 + \mu\mathbf{AX}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} =$$

III.3. Теорема о линейных комбинациях решений ОСЛУ

Теорема 5. *Линейная комбинация решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *является решением этой ОСЛУ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Надо проверить, что $\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ является решением этой ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Это означает, что надо проверить равенство $\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \mathbf{0}$.

Это очевидно, так как по свойствам произведения матриц и в силу того, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — решения ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, получаем

$$\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2\right) = \lambda\mathbf{AX}_1 + \mu\mathbf{AX}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$, *где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$*, где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Тот факт, что множество решений ОСЛУ является подпространством, легко получить с помощью **критерия подпространства** и **теоремы о линейных комбинациях решений ОСЛУ**.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$*, где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Осталось доказать утверждение о размерности пространства решений. Согласно **теореме о совпадении трех рангов** имеем, что ранг матрицы коэффициентов равен размерности линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$*, где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Осталось доказать утверждение о размерности пространства решений. Согласно **теореме о совпадении трех рангов** имеем, что ранг матрицы коэффициентов равен размерности линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов ОСЛУ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Перенумеровывая, при необходимости, неизвестные, можно считать, что первые r столбцов матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ образуют **базис** линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$*, где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Считаем, что первые r столбцов матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ образуют **базис** линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** имеем, что для любого $j \in \{r+1, \ldots, n\}$ найдутся коэффициенты $\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{rj}$ такие, что

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Теорема 6. *Множество решений ОСЛУ* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ *является подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $n - r$, *где* r *— ранг матрицы* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Считаем, что первые r столбцов матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ образуют **базис** линейной оболочки системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \lambda_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{rj} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \dots \\ a_{nr} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \lambda_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{rj} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \dots \\ a_{nr} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

С помощью **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов** докажем, что система решений

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

является **базисом подпространства решений ОСЛУ** $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

То, что каждый элемент **системы (7)** является решением этой ОСЛУ, очевиден: согласно **равенствам (6)**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \dots \\ \lambda_{rk} \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

То, что каждый элемент **системы (7)** является решением этой ОСЛУ, очевиден: согласно **равенствам (6)**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \dots \\ \lambda_{rk} \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_{1k} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{rk} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \dots \\ a_{nr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix} =$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

То, что каждый элемент **системы (7)** является решением этой ОСЛУ, очевиден: согласно **равенствам (6)**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \dots \\ \lambda_{rk} \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_{1k} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{rk} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \dots \\ a_{nr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Линейная независимость **системы (7)** также очевидна: если

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то для любого номера $k \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ из сравнения $(r+k)$-й строки матриц из левой и правой частей последнего равенства следует, что $\alpha_k = 0$.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Осталось проверить полноту **системы (7)**, то есть осталось убедиться в том, что любое решение системы $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ является линейной комбинацией матриц-столбцов из **системы (7)**.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

Возьмем произвольное решение $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^t$ **системы (7)**. Тогда по **теореме о линейных комбинациях решений ОСЛУ** решением этой системы является такой набор значений переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - x_{r+1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+2} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - x_n \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $y_k = x_k - \sum\limits_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\lambda_{kj}$.

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - x_{r+1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+2} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - x_n \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $y_k = x_k - \sum\limits_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\lambda_{kj}$. Подставляя это решение в уравнение, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{r} y_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{r} y_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Но первые n столбцов матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы (так как это базис системы строк матрицы $\mathbf{A}$), поэтому $y_1 = \ldots = y_r = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -11 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \ldots + x_n \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

III.4. Теорема о размерности пространства решений ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \dots \\ \lambda_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ -11 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots + x_n \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \dots \\ \lambda_{rr} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, **система векторов (7)** является базисом пространства решений системы $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, в частности, его размерность равна $n - r$, что и требовалось доказать.

III.5. Теорема об общем решении ОСЛУ

Теорема 7. *Общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *имеет вид* $C_1\mathbf{X}_1 + \ldots + C_m\mathbf{X}_m$, *где* $m = n - r$, n *— число неизвестных,* r *— ранг матрицы коэффициентов* $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ *— базис линейного пространства решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Доказательство.

III.5. Теорема об общем решении ОСЛУ

Теорема 7. *Общее решение ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *имеет вид* $C_1\mathbf{X}_1 + \ldots + C_m\mathbf{X}_m$, *где* $m = n - r$, n *— число неизвестных,* r *— ранг матрицы коэффициентов* $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ *— базис линейного пространства решений ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием из **теоремы о размерности пространства решений ОСЛУ** и **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов**. Теорема доказана.

III.6. Фундаментальная матрица

Из **умножения матриц на макроуровне** получаем, что

$$C_1\mathbf{X}_1 + \ldots + C_m\mathbf{X}_m = \Phi \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_m \end{pmatrix}$.

III.6. Фундаментальная матрица

Из **умножения матриц на макроуровне** получаем, что

$$C_1\mathbf{X}_1 + \ldots + C_m\mathbf{X}_m = \Phi \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_m \end{pmatrix}$.

Определение 7. *Система* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ *называется* **фундаментальной системой решений** *ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а матрица* Φ — **фундаментальной матрицей**.

III.6. Фундаментальная матрица

Из **умножения матриц на макроуровне** получаем, что

$$C_1\mathbf{X}_1 + \ldots + C_m\mathbf{X}_m = \Phi \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_m \end{pmatrix}$.

Определение 7. *Система* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ *называется* **фундаментальной системой решений** *ОСЛУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$*, а матрица* Φ — **фундаментальной матрицей**.

Мы будем использовать аббревиатуру ФСР вместо фразы «фундаментальная система решений». «Индустриальная» методика нахождения ФСР была нами рассмотрена при решении **примеров**.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?