Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Евклидовы пространства

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 проверки аксиом евклидова пространства 4

Пример 2 на построение матрицы Грама 22

Пример 3 на вычисление скалярного произведения с помощью матрицы Грама 40

Пример 4 на построение ОНБ 46

Пример 5 на поиск ортогонального дополнения 117

Евклидово пространство 166

Задача I.1 167

Задача I.2 168

Метод ортогонализации Грама-Шмидта 168

Задача II.3 169

Задача II.4 170

Ортогональное дополнение 170

Задача III.5 171

Задача III.6 172

Ответы и решения 173

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы****,* $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы****,* $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы****,* $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Выполнение первой и второй аксиомы следует из свойств операций транспонирования матриц и умножения матриц.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы****,* $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Выполнение первой и второй аксиомы следует из свойств операций транспонирования матриц и умножения матриц.

Мы применим *метод Лагранжа* (метод выделения полных квадратов). Согласно **формуле (1)** получаем

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2a^2 + 2ab - 4ad + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2.$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+tr \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2a^2 + 2ab - 4ad + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2.$$

Выделим полный квадрат в выражении в скобках:

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 =$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} + d^2 + ab - 2ad - bd$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{4} - d^2 + bd\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} + d^2 + ab - 2ad - bd$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{4} - d^2 + bd\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2}b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{4} - d^2 + bd\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2}b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 - 2d^2 + 11d^2 =$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{4} - d^2 + bd\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2}b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}\left(3b + 2d\right)^2 + 9d^2.$$

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения.

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения. При этом оно обращается в 0 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a + \frac{b}{2} - d = 0, \\ 3b + 2d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения. При этом оно обращается в 0 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a + \frac{b}{2} - d = 0, \\ 3b + 2d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение $a = b = d = 0$.

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Мы доказали, что это выражение равно 0 тогда и только тогда, когда $a = b = d = 0$.

Итак, U с **указанным скалярным произведением (1)** является евклидовым пространством.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку не указано, какому базису должна соответствовать искомая **матрица Грама**.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку не указано, какому базису должна соответствовать искомая **матрица Грама**.

Значит, базис мы можем выбрать сами.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Каждая матрица X из U является симметричной, то есть $X^t = X$. Иными словами, если $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, откуда $b = c$.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Каждая матрица X из U является симметричной, то есть $X^t = X$. Иными словами, если $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, откуда $b = c$. Итак, матрица X содержится в U тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ для некоторых вещественных коэффициентов a, b, d.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Матрица X содержится в U тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ для некоторых вещественных коэффициентов a, b, d. «Протаскивая единичку через параметры» a, b, d, получаем базис пространства U: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Б $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{13} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = -2,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{21} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{22} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 5,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{23} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = -2,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{32} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{33} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 13,$$

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства* U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Матрица Грама базиса **Б** имеет вид

$$\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение.

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Согласно **формуле (1)** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 9 + 2 = 11.$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. По **теореме о вычислении скалярного произведения с использованием матрицы Грама** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 11,$$

что совпадает с результатами **предыдущих вычислений**.

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3,$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 6,$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 22.$$

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше* 2 *с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Обозначим через **Б** естественный базис пространства многочленов степени не выше 2, т.е. многочленов вида

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Обозначим через **Б** естественный базис пространства многочленов степени не выше 2, т.е. многочленов вида $a + bx + cx^2$: $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0$.

Найдем e_2 в виде $e_2 = x + \alpha_{21}e_1 = x + \alpha_{21}x^0$. Можно сразу воспользоваться формулой для коэффициентов, но мы повторим ее вывод.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) = \left(x + \alpha_{21}x^0, x^0\right) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) = \left(x + \alpha_{21}x^0, x^0\right) = \left(x, x^0\right) + \alpha_{21}\left(x^0, x^0\right),$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) = \left(x + \alpha_{21}x^0, x^0\right) = \left(x, x^0\right) + \alpha_{21}\left(x^0, x^0\right),$$

откуда $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис **Б** $= \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2},$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad (x^0, x^0) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

$$e_2 = x + \frac{1/2}{} x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \qquad (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

$$e_2 = x + \frac{1/2}{1}x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис **Б** $= \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

$$e_2 = x + \frac{1/2}{1}x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама. Обычно вычисление с помощью матрицы Грама является более легким и быстрым, чем вычисление по определению. Но, к сожалению, саму **матрицу Грама** еще надо вычислить. Однако, «игра стоит свеч», и затраты на ее вычисление «окупятся», так как нам придется много раз вычислять скалярное произведение в рамках рассматриваемой задачи (предстоит еще вычислить e_3 и нормировать векторы).

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = (x^0, x^0) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 (x^0)^2\,dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 (x^0)^2\,dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = (x^0, x^0) = \int\limits_0^1 (x^0)^2\,dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (x^0, x) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (x^0, x) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x\,dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (x^0, x) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x\,dx = 1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (x^0, x) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x\,dx = 1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$\gamma_{13} = \gamma_{31} =$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = (x^0, x^2) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = (x^0, x^2) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^2 dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = (x^0, x^2) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^2 dx = 1/3.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1/3 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = (x^0, x^2) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^2 dx = 1/3.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1/3 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

Продолжая в том же духе (все эти вычисления легко проделать в уме), получаем

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Таким образом,

$$(x, x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $(x, x^0) = 1/2$.

И из умножения матриц «на макроуровне», и по определению матрицы Грама, получаем, что этот элемент равен γ_{12}. Но это просто более-менее случайный «подарок судьбы».

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $(x, x^0) = 1/2$.

Кроме того в данном случае щедрая судьба отвесила нам еще один подарочек: $(x^0, x^0) = \gamma_{11} = 1$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Таким образом, и этим, и другим способом получили $\alpha_{21} = -1/2$, откуда $e_2 = x - \frac{1}{2}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,
$e_3 = \ldots$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = \ldots$

Осторожно! В этом месте обычно делают «стандартную ошибку». Обратите внимание, мы ищем e_3 не в виде $x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}x$, а в виде $e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2},$

$$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31} = -\frac{\left(x^2, e_1\right)}{(e_1, e_1)} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31} = -\frac{(x^2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31} = -\frac{(x^2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -1/3,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31} = -\frac{(x^2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -1/3,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right).$

$$\alpha_{32} = -\frac{\left(x^2, e_2\right)}{(e_2, e_2)} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32} = -\frac{(x^2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32} = -\frac{(x^2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}{1/12} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32} = -\frac{(x^2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}}{1/12} = -1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + (-1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right).$

$$\alpha_{32} = -\frac{(x^2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}}{1/12} = -1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \frac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \frac{1}{3}x^0 + (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$
$= x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса **Б** $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}.$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса **Б** $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}$.

Проверим ортогональность:

$$(e_1, e_2) = \int\limits_0^1 x^0 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса **Б** $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}$.

Следующее скалярное произведение также легче вычислить по определению, без матрицы Грама:

$$(e_1, e_3) = \int\limits_0^1 x^0 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса **Б** $= \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}$.

А следующее скалярное произведение легче вычислить с помощью матрицы Грама:

$$(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса **Б** $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}$.

А следующее скалярное произведение легче вычислить с помощью матрицы Грама:

$$(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Итак, проверено, что

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \dfrac{1}{2};\ x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right\}$ — *ортогональный* базис. Осталось его нормировать: $e_i' = \dfrac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} e_i$. Вычислим скалярные произведения более удобным в каждом случае образом:

$$(e_1, e_1) = \int\limits_0^1 x^0 x^0 dx = 1,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \textbf{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2, e_2)}}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2, e_2)}}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2, e_2)}}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{1/12}}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{1/180}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \text{Б''} = \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Задача решена.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Задача решена.

Вернемся к лекции или **рассмотрим следующий пример?**

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом:

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

В каком виде запишем ответ?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений. Воспользуемся характеристическим свойством элементов из V:

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений. Воспользуемся характеристическим свойством элементов из V: $a + b + c = a + b(-1) + c(-1)^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \qquad\qquad\qquad \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Это базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{ x^0, x, x^2 \right\}.$$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{ 1 \cdot x^0 + \right.$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + \right.$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,\right.$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{x^0, 0 \cdot x^0 + \right.$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{x^0, 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x +\right.$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{ x^0, x, x^2 \right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{ x^0, 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \right\}$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \left\{ x^0, x, x^2 \right\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \left\{ x^0, x^2 \right\}$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Теперь займемся поиском **ортогонального дополнения**.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство (согласно **теореме об ортогональном дополнении**).

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные. Возьмем произвольный вектор из V, его координаты в базисе **Б** обозначим буквами: $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* По следствию об ортогональном дополнении к базису подпространства $g(x)$ принадлежит $V^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $g(x)$ ортогонален к базисным векторам пространства V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* Поэтому можно двумя способами вычислить скалярное произведение многочлена $g(x)$ с базисными векторами пространства V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* Поэтому можно двумя способами вычислить скалярное произведение многочлена $g(x)$ с базисными векторами пространства V. По теореме о вычислении скалярного произведения, используя найденную при решении примера 4 **матрицу Грама**, получаем

$$\begin{cases} 0 = (x^0, g(x)) = \\ \\ 0 = (x^2, g(x)) = \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\
0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Получилась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Получилась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases} \text{ с ФСР } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$ — это координаты базисного вектора одномерного пространства $V^{\perp}$, поэтому

$\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$ — это координаты базисного вектора одномерного пространства $V^{\perp}$, поэтому[1]
$V^{\perp} = \langle 3 - 16x + 15x^2 \rangle$.

[1]Обратите внимание на то, что скобки — угловые, а не фигурные, то есть V — это *линейная оболочка* системы $\mathbf{Б}_{V^{\perp}} = \{3 - 16x + 15x^2\}$.

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0,$$

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0,$$

$$\left(x^2, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0.$$

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0,$$

$$\left(x^2, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0.$$

Результат подтвердился. Задача решена.

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.175.) Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.211.) Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.243.) Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.305.) Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x,y); g(x,y)\Big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.309.) В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \Big\{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\Big\}$.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.322.) Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\Big(f(x), g(x)\Big) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \Big(g(x), f(x)\Big)$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \qquad\qquad = \Big(g(x), f(x)\Big)$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \qquad\qquad = \Big(g(x), f(x)\Big)$.

Воспользуемся свойством коммутативности произведения многочленов.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 g(x)\, f(x)\, dx = \Big(g(x), f(x)\Big)$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big) \qquad (\mathbf{?})$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big)$ (**?**)

$$\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, h(x)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big)$ (**?**)

$$\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) h(x) + \mu g(x) h(x)\Big)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big)$ (**?**)

$$\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\, dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big)$ (**?**)

$$\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\, dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\, dx = \lambda \int\limits_0^1 f(x)h(x)\, dx + \mu \int\limits_0^1 g(x)h(x)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big)$ (**?**)

$$\Big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \Big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\, dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\, dx = \lambda \int\limits_0^1 f(x)h(x)\, dx + \mu \int\limits_0^1 g(x)h(x)\, dx =$$

$$= \lambda \Big(f(x), h(x)\Big) + \mu \Big(g(x), h(x)\Big).$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

3. Положительная определенность: $\Big(f(x), f(x)\Big) \geq 0$ и $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx =$$

Мы рассматриваем линейное пространство многочленов степени не более двух, то есть многочленов вида $f(x) = a + bx + cx^2$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \Big(a + \quad + \quad\Big)^2 - \qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \quad\right)^2 - \qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 - \frac{1}{12}c^2 + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\Big(f(x), f(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(f(x)\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(a + bx + cx^2\Big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 - \frac{1}{12}c^2 + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 + \frac{1}{180}c^2 \geq 0.$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\Big(f(x), f(x)\Big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv 0$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Итак для рассматриваемого скалярного произведения выполняются все **аксиомы**, поэтому указанное в условии линейное пространство является **евклидовым пространством**.

Решение задачи 2.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) =$$

$$= \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= g(1,1)f(1,1) + g(1,2)f(1,2) + g(2,1)f(2,1) + \ldots =$$

$$= \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= g(1,1)f(1,1) + g(1,2)f(1,2) + g(2,1)f(2,1) + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g(m,n)\, f(m,n) = \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= g(1,1)f(1,1) + g(1,2)f(1,2) + g(2,1)f(2,1) + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g(m,n)\, f(m,n) = \Big(g(x,y), f(x,y)\Big)$$

Проверено выполнение **первой аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\ h(m,n) =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\; h(m,n) =$$

$$= \Big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\Big)\, h(1,1) + \Big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\Big)\, h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\ h(m,n) =$$

$$= \Big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\Big)\, h(1,1) + \Big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\Big)\, h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\; h(m,n) =$$

$$= \Big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\Big)\, h(1,1) + \Big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\Big)\, h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) + \mu\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\; h(m,n) =$$

$$= \Big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\Big)\, h(1,1) + \Big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\Big)\, h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) + \mu\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) =$$

$$= \lambda\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)h(m,n) + \mu\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g(m,n)h(m,n) =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\Big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\Big)\ h(m,n) =$$

$$= \Big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\Big)\,h(1,1) + \Big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\Big)\,h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) + \mu\Big(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\Big) =$$

$$= \lambda\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)h(m,n) + \mu\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g(m,n)h(m,n) =$$

$$= \lambda\Big(f(x,y), h(x,y)\Big) + \mu\Big(g(x,y), h(x,y)\Big).$$

Проверено выполнение **второй аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\big(ax^2 + bxy + cy^2,\; ax^2 + bxy + cy^2\big) = 0$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\big(ax^2 + bxy + cy^2,\; ax^2 + bxy + cy^2\big) = 0$$

$$\big(a+b+c)^2 + (a+2b+4c)^2 + (a+3b+9c)^2 + (4a+2b+c)^2 + (4a+4b+4c)^2 +$$
$$+(4a+6b+9c)^2 + (9a+3b+c)^2 + (9a+6b+4c)^2 + (9a+9b+9c)^2\big) = 0; \Leftrightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\big(ax^2 + bxy + cy^2,\; ax^2 + bxy + cy^2\big) = 0$$

$$\big(a+b+c)^2 + (a+2b+4c)^2 + (a+3b+9c)^2 + (4a+2b+c)^2 + (4a+4b+4c)^2 +$$

$$+(4a+6b+9c)^2 + (9a+3b+c)^2 + (9a+6b+4c)^2 + (9a+9b+9c)^2\big) = 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 294a^2 + 196b^2 + 294c^2 + 432ab + 392ac + 432bc = 0 \Leftrightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\big(ax^2 + bxy + cy^2,\; ax^2 + bxy + cy^2\big) = 0$$

$$\big(a+b+c)^2 + (a+2b+4c)^2 + (a+3b+9c)^2 + (4a+2b+c)^2 + (4a+4b+4c)^2 +$$

$$+(4a+6b+9c)^2 + (9a+3b+c)^2 + (9a+6b+4c)^2 + (9a+9b+9c)^2\big) = 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 294a^2 + 196b^2 + 294c^2 + 432ab + 392ac + 432bc = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c \Rightarrow \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c \Rightarrow a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c \Rightarrow a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\Big(f(x,y), f(x,y)\Big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c \Rightarrow a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x,y) \equiv 0$.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\Big(f(x,y), g(x,y)\Big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Итак для рассматриваемого скалярного произведения выполняются все **аксиомы**, поэтому указанное в условии линейное пространство является **евклидовым пространством**.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^0\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ ? & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & & \\ ? & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x^0; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & ? & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & ? & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & ? & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \end{pmatrix} \qquad \Big(x; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \qquad \Big(x^2; x^2\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1'$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x^0]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x^0]_{\mathbf{Б}}^t\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{1} =$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Bigg\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x - e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1,$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ e_2')}{(e_2',\ e_2')} e_2'\right\}$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{1}$$

$$[x^0]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{1}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{1}$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{4}{1} =$

$$[x-1]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1, x^2-2-4(x-1)\}$.
Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем
$\frac{4}{1} = 4$

$$[x-1]_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1,\ x^2-4x+2\}$.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x); g(x)\Big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1,\ x^2-4x+2\}$.

ОНБ: $\{e_1'',\ e_2'';\ e_3''\} = \left\{x^0,\ x-1,\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1\right\}$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x,y); g(x,y)\Big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — четверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Задача 4. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x,y); g(x,y)\Big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

Задача 4. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x,y); g(x,y)\Big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ y^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2 - 16}\left(xy - \frac{4}{3\pi}x^2\right)\right\} =$

$= \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ \frac{16 - \pi^2}{3\pi^2 - 16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2 - 16}xy + y^2\right\}.$

Задача 4. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\Big(f(x,y); g(x,y)\Big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ \frac{16-\pi^2}{3\pi^2-16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2-16}xy + y^2\right\}$.

ОНБ: $\{e_1'',\ e_2'';\ e_3''\} = \left\{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}x^2,\ \frac{12\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3\pi^2-16}}\left(xy - \frac{4}{3\pi}x^2\right),\right.$

$\left.\frac{2\sqrt{3\left(3\pi^2-16\right)}}{\sqrt{\pi\left(\pi^2-8\right)}}\left(\frac{16-\pi^2}{3\pi^2-16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2-16}xy + y^2\right)\right\}$.

Решение задачи 5.

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратиччных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} =$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичччных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем** $(x^2 - 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем** $(x^2 - 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем** $(x^2 + 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем** $(xy,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичччных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^{\perp}$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратиччных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$M^\perp =$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратиччных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} =$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ что равносильно}$$

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} p + r = 0, \\ q = 0. \end{cases} \right\} =$$

Задача 5. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\Big(f(x,y);\ g(x,y)\Big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ что равносильно}$$

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} p + r = 0, \\ q = 0. \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle -x^2 + y^2 \right\rangle.$$

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 4d = 0, \\ 20a - 57d = 0, \\ 20c + 33d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$ **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 4d = 0, \\ 20a - 57d = 0, \\ 20c + 33d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. $\begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$V^{\perp} =$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. $\begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \right\} =$$

Задача 6. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. $\begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 16 & 57 \\ -33 & 20 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?