Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Булевы и логические функции

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения практического занятия

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

Пример 1 (определение конъюнкции) 5

Пример 2 (решение уравнений для булевых функций) 15

Задачи для самостоятельного решения 36

Задача I.1 37

Задача I.2 38

Задача I.3 39

Задача I.4 40

Задача I.5 41

Задача I.6 42

Задача I.7 43

Задача I.8 44

Задача I.9 45

Задача I.10 46

Задача I.11 47

Задача I.12 48

Задача I.13 49

Задача I.14 50

Задача I.15 51

Задача I.16 52

Задача I.17 53

Задача I.18 54

Ответы и решения 55

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых,

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых,

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых, указать характеристические свойства.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых, указать характеристические свойства.

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция?

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция? Формулы типа $\min\{x, y\}$ не очень уместны, так как они «работают» только для случая, когда булевы значения 0 и 1 интерпретируются, как числа (а как быть, если вместо них используются, например, слова true и false?)

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция? Поэтому лучше всего просто указать ее таблицу истинности.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция?

Итак: **конъюнкцией** называется булева функция, задаваемая таблицей истинности:

x	y	$x\&y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Хорошо, что мало аргументов.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Хорошо, что мало аргументов. А если... :(

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Когда импликация равна 0?

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Когда импликация равна 0?

Только в одном случае — когда посылка равна 1 (в данном случае $x\&y = 1$), а заключение ложно (в данном случае $x \vee y = 0$).

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Получаем, что исходное *уравнение* эквивалентно *системе уравнений* $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ то есть *высказывание* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно *высказыванию* $(x\&y = 1)\&(x \vee y = 0)$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Получаем, что исходное *уравнение* эквивалентно *системе уравнений* $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ то есть *высказывание* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно *высказыванию* $(x\&y = 1)\&(x \vee y = 0)$.

Заметим, что первый знак $\&$ в последнем равенстве обозначает *булеву* функцию, а второй, «соединяющий» высказывания $x\&y = 1$ и $x \vee y = 0$, — *логическую* функцию.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Для дальнейших рассуждений можно применить два существенно различных языка.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Решение на языке высказываний

Решаем полученную систему уравнений. Высказывание $x\&y = 1$, как следует из таблицы истинности конъюнкции, эквивалентно высказыванию $(x = 1)\&(y = 1)$. Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда оба дизъюнкта равны 0. Значит, высказывание $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно высказыванию

$$((x = 1)\&(y = 1))\&((x = 0)\&(y = 0)).$$

Но последнее высказывание всегда ложно! Значит, у исходного уравнения нет ни одного решения.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Решение на языке множеств

С помощью таблиц истинности конъюнкции и дизъюнкции легко проверить, что множество V решений первого уравнения равно $\{(1,1)\}$, а множество W решений второго уравнения имеет вид $W = \{(0,0)\}$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \left\{(x;y) \,\middle|\, x\&y = 1\right\}, \\ W = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0\right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Всякий элемент (x, y) содержится в U тогда и только тогда, когда он является решением как первого уравнения (то есть содержится в V), так и решением второго уравнения (то есть является элементом множества W).

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \left\{(x;y) \,\middle|\, x\&y = 1\right\}, \\ W = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0\right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \left\{(x;y) \,\middle|\, x\&y = 1\right\}, \\ W = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0\right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Но, очевидно, $U = V \cap W = \{(1,1)\} \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ — пустое множество.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \left\{(x;y) \,\middle|\, x\&y = 1\right\}, \\ W = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0\right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Но, очевидно, $U = V \cap W = \{(1,1)\} \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ — пустое множество.

Таким образом, решений у исходного уравнения нет (что подтверждает сделанный ранее вывод).

Вернуться к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.57.) Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.60.) Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.63.) Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Задача I.4. (Ответ приведен на стр.66.) Решите уравнение $x \& (y \to x) = 1$.

Задача I.5. (Ответ приведен на стр.68.) Решите уравнение $x \to (x \to y) = 1$.

Задача I.6. (Ответ приведен на стр.70.) Решите уравнение $x \to (x \& y) = y$.

Задача I.7. (Ответ приведен на стр.72.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Задача I.8. (Ответ приведен на стр.75.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.

Задача I.9. (Ответ приведен на стр.78.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Задача I.10. (Ответ приведен на стр.81.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g) \vee h \equiv (f \vee h)\&(g \vee h)$.

Задача I.11. (Ответ приведен на стр.84.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Задача I.12. (Ответ приведен на стр.87.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Задача I.13. (Ответ приведен на стр.90.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Задача I.14. (Ответ приведен на стр.93.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 1 \equiv f$.

Задача I.15. (Ответ приведен на стр.96.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Задача I.16. (Ответ приведен на стр.99.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&0 \equiv 0$.

Задача I.17. (Ответ приведен на стр.102.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Задача I.18. (Ответ приведен на стр.105.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Ответ.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Ответ.

Решение задачи 2.

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Ответ.

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Ответ.

Решение задачи 3.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Ответ.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Ответ.

Решение задачи 4.

Задача 4. Решите уравнение $x \& (y \to x) = 1$.

Задача 4. Решите уравнение $x \& (y \to x) = 1$.

Ответ. $(x; y) \in \{(1; 0),\ (1; 1)\}$.

Решение задачи 5.

Задача 5. Решите уравнение $x \to (x \to y) = 1$.

Задача 5. Решите уравнение $x \to (x \to y) = 1$.
Ответ. $(x; y) \in \{(0; 0),\ (0; 1),\ (1; 1)\}$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Решите уравнение $x \to (x \& y) = y$.

Задача 6. Решите уравнение $x \to (x \& y) = y$.
Ответ. $(x; y) \in \{(0; 1),\ (1; 0)\}$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Задача 7. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Ответ.

Задача 7. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Ответ.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.
Ответ.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.
Ответ.

Решение задачи 9.

Задача 9. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Задача 9. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Ответ.

Задача 9. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Ответ.

Решение задачи 10.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g) \vee h \equiv (f \vee h)\&(g \vee h)$.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g) \vee h \equiv (f \vee h)\&(g \vee h)$.

Ответ.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g) \vee h \equiv (f \vee h)\&(g \vee h)$.

Ответ.

Решение задачи 11.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Ответ.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Ответ.

Решение задачи 12.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Ответ.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Ответ.

Решение задачи 13.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Ответ.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Ответ.

Решение задачи 14.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&1 \equiv f$.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&1 \equiv f$.

Ответ.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&1 \equiv f$.

Ответ.

Решение задачи 15.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Ответ.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Ответ.

Решение задачи 16.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&0 \equiv 0$.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&0 \equiv 0$.

Ответ.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&0 \equiv 0$.

Ответ.

Решение задачи 17.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Ответ.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Ответ.

Решение задачи 18.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответ.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответ.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?