Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы теории групп

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 2-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2009

I. Группоиды 8

II. Группы 13

II.1. Элементарные теоремы теории групп 15

II.1.1. Критерий нейтрального элемента 16

II.1.2. Теорема об однозначности g' 21

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения 30

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению 35

II.2. Подгруппа 44

II.3. Критерий подгруппы 48

II.4. Смежные классы 55

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов 56

II.6. Порядок элемента и порядок конечной группы 68

II.7. Теорема Лагранжа 70

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа 77
II.9. Лемма о делимости на порядок элемента 81
II.10. Централизатор и нормализатор 84
II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе 90
II.12. Порождающие элементы 97
II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы 98
II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант 103
II.15. Взаимный коммутант подгрупп 104
II.16. Критерий перестановочности элементов 106
II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов 125
II.18. Нормальная подгруппа 165
II.19. Критерии нормальности подгруппы 166
II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе 188
II.21. Теорема о фактор-группе 192

II.22. Гомоморфизм 193
II.23. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов 196
II.24. Сопряженные подгруппы 199
II.25. Ядро гомоморфизма 212
II.26. Теорема о нормальности ядра 213
II.27. Естественный гомоморфизм 217
II.28. Теоремы о гомоморфизме 233
II.29. Вторая теорема о гомоморфизме 252
II.30. Третья теорема о гомоморфизме 287
II.31. Теорема о характеризации коммутанта 289

III. Операции алгебры подгрупп **294**
III.1. Пересечение подгрупп 297
III.2. Произведение подгрупп 305

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп 306
III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп 328
III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента 338
III.3. Прямое произведение подгрупп 353
III.3.1. Внутреннее прямое произведение 354
III.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп 357
III.3.3. Внешнее прямое произведение 360
III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений 375
III.4. Полупрямое произведение подгрупп 383

IV. Абелевы группы **392**
IV.1. Циклические группы 393

IV.1.1. Определение циклической группы 398
IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы . . 399
IV.2. Конечнопорожденные абелевы группы 408

V. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп 409

VI. Представления 412
VI.1. Подстановочные представления 413
VI.1.1. Регулярное подстановочное представление . . 414
VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе 415
VI.2. Операторные и матричные представления 442
VI.2.1. Приводимые и неприводимые представления . 446
VI.2.2. Теорема Машке 449
VI.2.3. Лемма Шура 450
VI.2.4. Эквивалентные представления 451

VII. Задание групп образующими и определяющими отношениями

455

I. Группоиды

Какие универсальные алгебры $\langle \mathbf{A}; \{f_1; f_2; \ldots\}\rangle$ наиболее интересны для первоначального изучения?

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

Значительно более богатый материал предоставили алгебры с одной бинарной операцией, называемые **группоидами**. Чаще всего мы работали с операциями, обладающими свойством ассоциативности, позволяющими не заботиться о расположении скобок в выражениях типа $a \cdot b \cdot c$. Поэтому такие группоиды получили специальное название — полугруппы.

I. Группоиды

Определение 1. *Группоид* $\langle \boldsymbol{G}; \{*\} \rangle$ *с одной двуместной операцией* $*$ *называется* **полугруппой**, *если эта операция является ассоциативной, т.е. выполняется тождество:* $(a * b) * c = a * (b * c)$.

II. Группы

Определение 2. Группой *называется множество G с определенной на нем операцией $*$, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в G существует такой элемент e, что $g * e = e * g = g$ для любого элемента g из G;*

существование обратного элемента: *для любого элемента g из G найдется такой элемент g', что $g * g' = e$.*

Элемент g' называется ***обратным*** *к g.*

II. Группы

Определение 2. Группой *называется множество G с определенной на нем операцией $*$, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в G существует такой элемент e, что $g * e = e * g = g$ для любого элемента g из G;*

существование обратного элемента: *для любого элемента g из G найдется такой элемент g', что $g * g' = e$.*

Элемент g' называется ***обратным*** *к g.*

В мультипликативной записи элемент, обратный к g, обычно обозначается через g^{-1}. В аддитивной записи — через $(-g)$.

II.1. Элементарные теоремы теории групп

Обычно изучение нового понятия осуществляется индуктивно (рассмотрением **примеров**) или дедуктивно (анализ определения, доказательство теорем).

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1 (критерий нейтрального элемента). $x = e$ *тогда и только тогда, когда для некоторого элемента* g *из* G *выполняется равенство* $g * x = g$, *или* $x * g = g$.

Доказательство.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1 (критерий нейтрального элемента). $x = e$ *тогда и только тогда, когда для некоторого элемента* g *из* G *выполняется равенство* $g * x = g$, *или* $x * g = g$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1 (критерий нейтрального элемента). $x = e$ *тогда и только тогда, когда для некоторого элемента* g *из* G *выполняется равенство* $g * x = g$, *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1 (критерий нейтрального элемента). *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $g * x = g$, или $x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$. Умножая обе части равенства слева на g', получаем $g' * (g * x) = g' * g$. Но правая часть равенства равна e согласно аксиоме существования обратного элемента. Правая часть равенства может быть преобразована следующим образом: $g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x$. Следовательно, $x = e$, что и требовалось доказать.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1 (критерий нейтрального элемента). *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $g * x = g$, или $x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$. Умножая обе части равенства слева на g', получаем $g' * (g * x) = g' * g$. Но правая часть равенства равна e согласно аксиоме существования обратного элемента. Правая часть равенства может быть преобразована следующим образом: $g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x$. Следовательно, $x = e$, что и требовалось доказать.

Случай $x * g = g$ разбирается аналогично.

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). $x * g = e$ *(или* $g * x = e$*) тогда и только тогда, когда* $x = g'$.

Доказательство.

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). $x * g = e$ *(или* $g * x = e$*) тогда и только тогда, когда* $x = g'$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). $x * g = e$ *(или* $g * x = e$*) тогда и только тогда, когда* $x = g'$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). $x * g = e$ *(или* $g * x = e$*) тогда и только тогда, когда* $x = g'$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow\; x = g'.$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то $x * g = e$ в силу аксиомы существования обратного элемента. Теорема доказана.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. Воспользуемся **теоремой об однозначности** g'.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

Теорема доказана.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') =$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

Соглашение 1. *Применяются следующие обозначения: если X — подмножество группы G, и g — элемент группы G, то*

$$g * X = \left\{ g * x \,\middle|\, x \in X \right\}, \quad X * g = \left\{ x * g \,\middle|\, x \in X \right\}. \tag{1}$$

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$.

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

Тот факт, что $H \leq G$ и $H \neq G$, то $H < G$.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Необходимость очевидна.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Ассоциативность выполняется во всем G, а тем более в H.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H. Теорема доказана.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Рассмотреть пример?

II.4. Смежные классы

Определение 4. *Для подгруппы H из G и элемента g из G множество* $g * H = \left\{ g * h \,\middle|\, h \in H \right\}$, *называется* **левым смежным классом** *группы G по H. Количество левых смежных классов группы G по подгруппе H называется* **индексом подгруппы** H *в группе G, и обозначается $|G : H|$.*

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * H = y * H$. Надо доказать, что $x' * y \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * H = y * H$. Для некоторого элемента h из H получаем $x = y * h$. Поэтому $y' * x = h \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * H = y * H$. Для некоторого элемента h из H получаем $x = y * h$. Поэтому $y' * x = h \in H$.

Так как H — подгруппа, то и обратный к h элемент содержится в H.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * H = y * H$. Для некоторого элемента h из H получаем $x = y * h$. Поэтому $y' * x = h \in H$.

Так как H — подгруппа, то и обратный к h элемент содержится в H. По теореме об элементе, обратном к произведению, имеем $h' = x' * y$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * H = y * H$. Для некоторого элемента h из H получаем $x = y * h$. Поэтому $y' * x = h \in H$.

Так как H — подгруппа, то и обратный к h элемент содержится в H. По теореме об элементе, обратном к произведению, имеем $h' = x' * y$.

Необходимость доказана.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Достаточность.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x' * y = h \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x' * y = h \in H$. Тогда, умножая это равенство на x слева, получаем, что $y = x * h \in x * H$. Теперь можно воспользоваться «классическим» способом проверки множеств на совпадение — убедиться, что всякий элемент из $x * H$ содержится в $y * H$, и наоборот.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x' * y = h \in H$. Тогда, умножая это равенство на x слева, получаем, что $y = x * h \in x * H$.

Всякий элемент из $x * H$ может быть представлен для подходящего g из H в виде $x * g = y * h' * g$ — элемент из $y * H$. С другой стороны, произвольный элемент $y * z$ из H, где z — элемент из H, можно записать в виде $y * z = x * h * z$ — элемент из $x * H$, поскольку $h * z$ содержится в H.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6 (критерий совпадения левых смежных классов). *Для подгруппы H равенство $x * H = y * H$ выполняется тогда и только тогда, когда элементы $x' * y$ и (или) $y' * x$ содержатся в H.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x' * y = h \in H$. Тогда, умножая это равенство на x слева, получаем, что $y = x * h \in x * H$.

Всякий элемент из $x * H$ может быть представлен для подходящего g из H в виде $x * g = y * h' * g$ — элемент из $y * H$. С другой стороны, произвольный элемент $y * z$ из H, где z — элемент из H, можно записать в виде $y * z = x * h * z$ — элемент из $x * H$, поскольку $h * z$ содержится в H.

Теорема доказана.

II.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной**, *если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы**, *обозначаемым* $|G|$, *называется количество элементов этой группы.*

II.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной**, *если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы**, *обозначаемым* $|G|$, *называется количество элементов этой группы.*

Определение 6. *Говорят, что* g — **элемент конечного порядка**, *если существует такое число* n, *для которого* $g^n = e$. *Если* g — *элемент конечного порядка, то наименьшее такое натуральное число* n, *что* $g^n = e$, *называется* **порядком элемента**, *и обозначается* $|g|$. *В этом случае говорят, что* g — **элемент порядка** n.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что различные смежные классы группы G по H не пересекаются, и всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением. Возьмем элемент z из пересечения этих смежных классов.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением. Возьмем элемент z из пересечения этих смежных классов. Тогда для подходящих элементов a и b из H имеем $x * a = z$ и $y * b = z$, то есть $x' * z = a$ и $y' * z = b$.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением. Возьмем элемент z из пересечения этих смежных классов. Тогда для подходящих элементов a и b из H имеем $x * a = z$ и $y * b = z$, то есть $x' * z = a$ и $y' * z = b$. Поэтому, согласно критерию совпадения левых смежных классов, $x * H = z * H = y * H$, что противоречит предположению о том, что $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением. Возьмем элемент z из пересечения этих смежных классов. Тогда для подходящих элементов a и b из H имеем $x * a = z$ и $y * b = z$, то есть $x' * z = a$ и $y' * z = b$. Поэтому, согласно критерию совпадения левых смежных классов, $x * H = z * H = y * H$, что противоречит предположению о том, что $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы.

Итак, доказано, что разные смежные классы не пересекаются. Остается заметить, что всякий элемент g из G содержится в смежном классе $g * H$, поскольку $g = g * e, \quad e \in H$.

Теорема доказана.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (о порядке элемента группы). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (о порядке элемента группы). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство. Очевидно, т.к. порядок элемента равен порядку порожденной им **циклической подгруппы** (подробнее циклические группы мы рассмотрим **ниже**).

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1 (**о делимости на порядок элемента**). *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1 (**о делимости на порядок элемента**). *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| * k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда $e = g^n = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m = g^m$, что противоречит определению $|g|$, как наименьшего такого натурального числа, что $g^{|g|} = e$.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1 (**о делимости на порядок элемента**). *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...». Итак, пусть $|g^u| = w$. Тогда, с одной стороны, $g^{(u \cdot w)} = (g^u)^w = e$, поэтому, как доказано выше, $u \cdot w$ делится нацело на $u \cdot v$, то есть w делится нацело на v. С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$, поэтому v делится нацело на w. Следовательно, $v = w$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Перейти к доказательству теоремы о цикличности мультипликативной группы поля Галуа?

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом.

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$.

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$. Во втором случае $x*y$ может отличаться от $y*x$, но $x * y = y * x'$ для некоторого x' из X. Эта мысль оказалась настолько плодотворной, что были введены специальные термины.

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **нормализатор** *множества X во множестве Y — это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\} \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **нормализатор** *множества X во множестве Y — это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\} \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

Напомним, что в соответствии с соглашением 1 равенство $\left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\}$ можно представить в виде $y * X = X * y$.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Как доказать включение одного множества в другое?

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Надо доказать, что всякий элемент из $C_H(X)$ является элементом из $N_H(X)$.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

Теорема доказана.

II.12. Порождающие элементы

Определение 9. *Пусть G — группа, A — какое-либо подмножество ее элементов. Говорят, что подгруппа H* ***порождена множеством*** *A, если H — это минимальная из подгрупп, содержащих A (внешняя характеризация). Подгруппа H, порожденная множеством A, обозначается $\langle A \rangle$.*

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9 (внутренняя характеризация порожденной подгруппы). *Пусть G — группа, и A —подмножество из G. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{(x^a)(y^b)...(z^c)\,\middle|\,(\{x,y,\ldots,z\}\subseteq A)\&(\{a,b,\ldots,c\}\subseteq\mathbb{Z})\right\}. \quad (4)$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9 (внутренняя характеризация порожденной подгруппы). *Пусть G — группа, и A —подмножество из G. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{(x^a)(y^b)...(z^c)\,\middle|\,(\{x,y,\ldots,z\}\subseteq A)\&(\{a,b,\ldots,c\}\subseteq\mathbb{Z})\right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9 (внутренняя характеризация порожденной подгруппы). *Пусть G — группа, и A —подмножество из G. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{(x^a)(y^b)...(z^c)\,\middle|\,(\{x,y,\ldots,z\}\subseteq A)\&(\{a,b,\ldots,c\}\subseteq\mathbb{Z})\right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$.

Очевидно, что P — подгруппа, включающаяся в $\langle A\rangle$, и что A включается в P. Следовательно $P \cap \langle A\rangle$ — подгруппа, содержащая все элементы из A.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9 (внутренняя характеризация порожденной подгруппы). *Пусть G — группа, и A —подмножество из G. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{(x^a)(y^b)...(z^c)\,\middle|\,(\{x,y,\ldots,z\}\subseteq A)\&(\{a,b,\ldots,c\}\subseteq\mathbb{Z})\right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$.

Очевидно, что P — подгруппа, включающаяся в $\langle A\rangle$, и что A включается в P. Следовательно $P \cap \langle A\rangle$ — подгруппа, содержащая все элементы из A. Но $\langle A\rangle$ — минимальная среди таких подгрупп, поэтому $\langle A\rangle$ включается в $\langle A\rangle \cap P$.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9 (внутренняя характеризация порожденной подгруппы). *Пусть G — группа, и A —подмножество из G. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{(x^a)(y^b)...(z^c)\,\middle|\,(\{x,y,\ldots,z\}\subseteq A)\&(\{a,b,\ldots,c\}\subseteq\mathbb{Z})\right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно.

Таким образом, с одной стороны, P включается в $\langle A\rangle$, с другой стороны $\langle A\rangle$ включается в P. Теорема доказана.

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Определение 10. *Элементы a и b группы G называются* **сопряженными** *с помощью элемента c, если $b = c' * a * c$. Выражение $c' * a * c$ коротко записывается в виде a^c.*

Определение 11. *Назовем* **коммутатором** *элементов x, y группы G элемент $[x, y]$, определяемый формулой $[x, y] = x' * y' * x * y$.*

II.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$, *где* a *из* A, b — *из* B.

II.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$, *где* a *из* A, b — *из* B.

Определение 13. Коммутантом G' *группы* G *называется подгруппа* $[G, G]$.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и аксиомы существование обратного элемента имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и аксиомы существование обратного элемента имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и аксиомы существование обратного элемента имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e$.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и аксиомы существование обратного элемента имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e$.

Итак, если $x * y = y * x$, то $[x, y] = e$.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$
$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y =$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y =$$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{x * x'}_{e} * x * y =$$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{x * x'}_{e} * x * y = e * x * y =$$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{x * x'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{x * x'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{x * x'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

Теорема доказана.

II.16. Критерий перестановочности элементов

Теорема 10 (критерий перестановочности элементов). *Для элементов x, y группы G равенство $x * y = y * x$ эквивалентно соотношению $[x, y] = e$.*

Определение 14. ***Группа*** *с* ***коммутативной*** *групповой операцией называется* ***коммутативной*** *или* ***абелевой группой***.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

1. $(a * b)^c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

1. $(a * b)^c = c' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c'*a*b*c = c'*a*e*b*c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c'*a*b*c = c'*a*c*c'*b*c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * c * c' * b * c = a^c * b^c$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e$,

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e$,
следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e$,
следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента $\left(a^b\right)' = (a')^b$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b = a * a' * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b = a * a' * b' * a * b = a * [a, b]$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

4. $[a, b] =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

4. $[a, b] = a' * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

4. $[a, b] = a' * b' * a * b = a' * (b^a) =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

4. $[a, b] = a' * b' * a * b = a' * (b^a) = b'^a * b$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a * b, c] =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a * b, c] = (a * b)' * c' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)'*c'*a*b*c = b'*a'*c'*a*b*c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)'*c'*a*b*c = b'*a'*c'*a*b*c =$$

$$= b'*a'*c'*a*e*b*c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)'*c'*a*b*c = b'*a'*c'*a*b*c =$$

$$= b'*a'*c'*a*\underbrace{c*b*b'*c'}_{e}*b*c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)'*c'*a*b*c = b'*a'*c'*a*b*c =$$

$$= b'*a'*c'*a*\underbrace{c*b*b'*c'}_{e}*b*c = [a,c]^b*[b,c].$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] = a' * (b * c)' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] = a' * (b * c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a'*(b*c)'*a*b*c = a'*c'*b'*a*b*c =$

$$= a'*c'*a*c*c'*a'*b'*a*b*c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * \underbrace{a * c * c' * a'}_{e} * b' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a'*(b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a'*(b*c)'*a*b*c = a'*c'*b'*a*b*c =$

$$= a'*c'*\underbrace{a*c*c'*a'}_{e}*b'*a*b*c = [a,c]*[a,b]^c.$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' = (a' * b' * a * b)' =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' = (a' * b' * a * b)' = b' * a' * \underbrace{(b')'}_{b} * \underbrace{(a')'}_{a} =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' = (a' * b' * a * b)' = b' * a' * \underbrace{(b')'}_{b} * \underbrace{(a')'}_{a} = [b, a]$.

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. *Подгруппа N из G называется* **нормальной** *в G, если для любого g из G справедливо равенство $g*N=N*g$ (т.е. левые смежные классы группы G по подгруппе N совпадают с правыми).*

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

Поэтому $x^g =$

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

Поэтому $x^g = g' * x * g =$

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.
Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.
Поэтому $x^g = g' * x * g = y \in N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому $x * g = g * y$, то есть $N * g$ содержится в $g * N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит,

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включается в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включаеся в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$. Пункт 1 доказан.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

Необходимость доказана.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, $\quad g$ из G.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

Теорема доказана.

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2 (об умножении смежных классов по подгруппе). *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2 (об умножении смежных классов по подгруппе). *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство.

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2 (об умножении смежных классов по подгруппе). *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) = (x*y)*N$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2 (об умножении смежных классов по подгруппе). *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) = (x*y)*N$$

Лемма доказана.

II.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12 (о фактор-группе). *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** *N является группой относительно операции умножения смежных классов, определенной в лемме об умножении смежных классов по подгруппе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к простой проверке аксиом группы.

II.22. Гомоморфизм

Определение 16. *Пусть G и H — группы. Функция $f : G \to H$ называется* **гомоморфизмом** *группы G на (в) группу H, если для любых элементов x, y из G* $\quad f(x * y) = f(x) * f(y)$. *Если f является* ***взаимно однозначной функцией****, то f называется* **изоморфизмом**.

II.22. Гомоморфизм

Определение 16. *Пусть G и H — группы. Функция $f : G \to H$ называется* **гомоморфизмом** *группы G на (в) группу H, если для любых элементов x, y из G* $\quad f(x * y) = f(x) * f(y)$. *Если f является взаимно однозначной функцией, то f называется* **изоморфизмом**.

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции (в том смысле, что нам неважно, каким образом, по какой формуле и т.п. вычисляется результат групповой операции, процесс вычисления мы не рассматриваем).

II.22. Гомоморфизм

Определение 16. *Пусть G и H — группы. Функция $f : G \to H$ называется* **гомоморфизмом** *группы G на (в) группу H, если для любых элементов x, y из G* $\quad f(x * y) = f(x) * f(y)$. *Если f является взаимно однозначной функцией, то f называется* **изоморфизмом**.

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции (в том смысле, что нам неважно, каким образом, по какой формуле и т.п. вычисляется результат групповой операции, процесс вычисления мы не рассматриваем). Поэтому в большинстве теорем в теории групп группы различаются только с точностью до изоморфизма (то есть изоморфные группы отождествляются).

II.23. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13 (об образах обратного и нейтрального элементов). *Если f — **гомоморфизм** группы G с единичным элементом a на группу H, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $\quad f(a) = b$ *и* $f(x') = f(x)'$.

II.23. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13 (об образах обратного и нейтрального элементов). *Если f — **гомоморфизм** группы G с единичным элементом a на группу H, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $\quad f(a) = b$ *и* $f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) * f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

II.23. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13 (об образах обратного и нейтрального элементов). *Если f — **гомоморфизм** группы G с единичным элементом a на группу H, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $\quad f(a) = b$ *и* $f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) * f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

Далее, $b = f(a) = f(x * x') = f(x) * f(x')$, поэтому, в силу **теоремы 2 об однозначности обратного элемента**, $f(x') = f(x)'$. Теорема доказана.

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

Покажем, что ψ является **изоморфизмом**.

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; g' * x * g = g' * y * g \;\Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

Для доказательства, что ψ — **изоморфизм**, осталось проверить свойство $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$.

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) =$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g =$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g =$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g =$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g = \psi(x) * \psi(y).$$

II.24. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{5}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{6}$$

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y).$$

Теорема доказана.

II.25. Ядро гомоморфизма

Определение 17. Ядром *гомоморфизма f называется множество* $\mathrm{Ker}(f)$ *всех тех элементов x группы G, образом которых является единичный элемент группы H:* $\quad f(x) = e$.

II.26. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство.

II.26. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$.

II.26. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

II.26. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

$$f([x, g]) = [f(x), f(g)] = [e, f(g)] = e,$$

что и требовалось доказать.

II.27. Естественный гомоморфизм

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Фактор-группа группы G по подгруппе N обозначается G/N.

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N*.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6)

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) =$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) =$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G *на* G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$
$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} =$$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} = g * h * N.$$

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (6), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} = g * h * N.$$

Следовательно, $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$. Теорема доказана.

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

II.27. Естественный гомоморфизм

Теорема 16 (теорема о естественном гомоморфизме). *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{6}$$

является гомоморфизмом группы G на G/N.

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

Оказывается, что фактор-группами исчерпывается, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов группы G.

II.28. Теоремы о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса).

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$ $\quad x * g = y$. Поэтому

$$f(y) = F(y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * g * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) = f(x).$$

Однозначность F доказана.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)).$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) =$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)),$$

то есть F — гомоморфизм.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

$$x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y).$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

Следовательно, $x' * y$ принадлежит $\mathrm{Ker}(f)$. Таким образом, по критерию совпадения смежных классов, $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$, что и требовалось доказать.

II.28. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Соотношение $f = E * F$ является просто переформулировкой определения отображения F.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

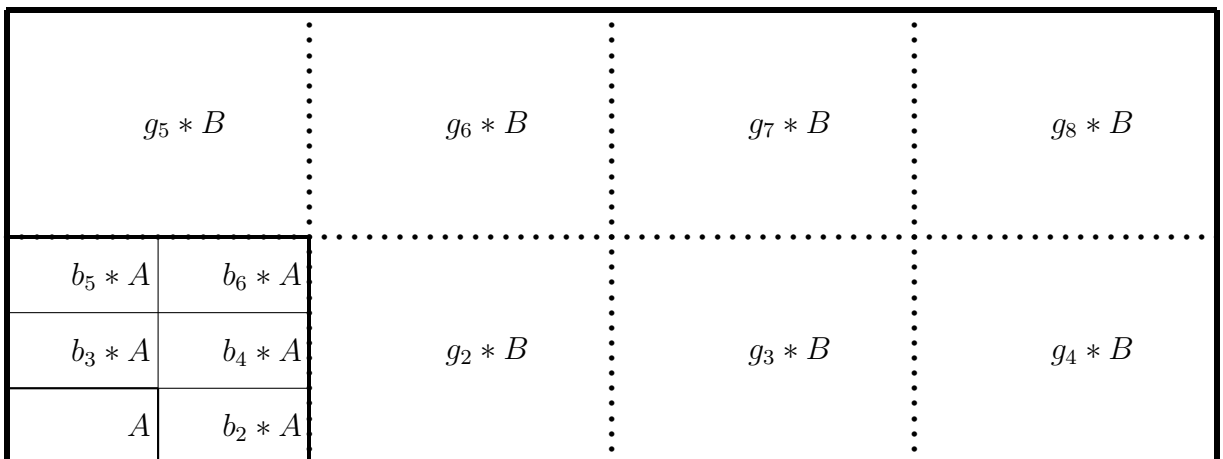
II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** G/B.

Прямоугольниками изображены группа G, $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

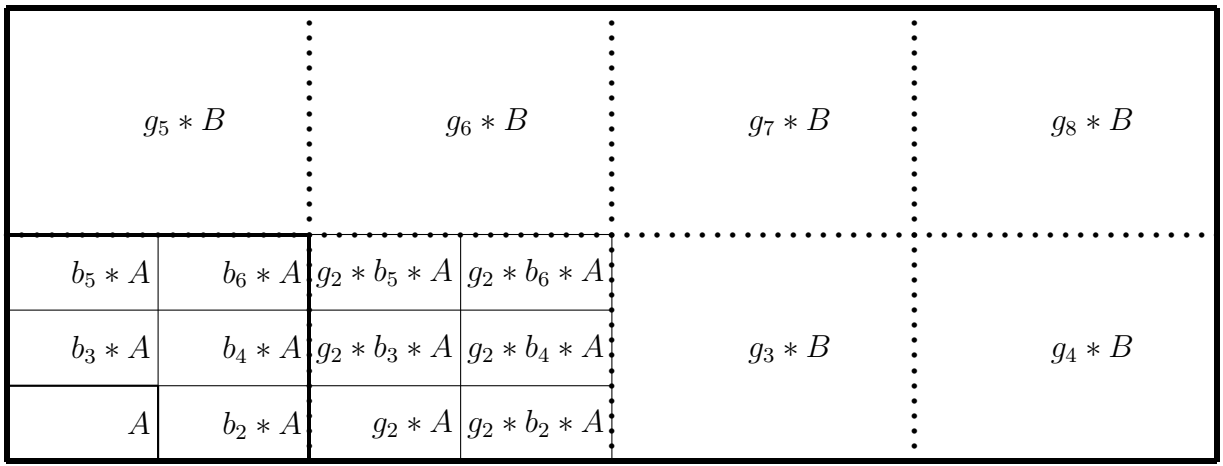
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * B$		$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * B$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * B$		$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$						
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$						
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

<table>
<tr><td>$g_5 * b_5 * A$</td><td>$g_5 * b_6 * A$</td><td>$g_6 * b_5 * A$</td><td>$g_6 * b_6 * A$</td><td colspan="4" rowspan="3">$g_7 * B$</td><td colspan="4" rowspan="3">$g_8 * B$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * b_3 * A$</td><td>$g_5 * b_4 * A$</td><td>$g_6 * b_3 * A$</td><td>$g_6 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * A$</td><td>$g_5 * b_2 * A$</td><td>$g_6 * A$</td><td>$g_6 * b_2 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_5 * A$</td><td>$b_6 * A$</td><td>$g_2 * b_5 * A$</td><td>$g_2 * b_6 * A$</td><td>$g_3 * b_5 * A$</td><td>$g_3 * b_6 * A$</td><td>$g_4 * b_5 * A$</td><td>$g_4 * b_6 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_3 * A$</td><td>$b_4 * A$</td><td>$g_2 * b_3 * A$</td><td>$g_2 * b_4 * A$</td><td>$g_3 * b_3 * A$</td><td>$g_3 * b_4 * A$</td><td>$g_4 * b_3 * A$</td><td>$g_4 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$b_2 * A$</td><td>$g_2 * A$</td><td>$g_2 * b_2 * A$</td><td>$g_3 * A$</td><td>$g_3 * b_2 * A$</td><td>$g_4 * A$</td><td>$g_4 * b_2 * A$</td></tr>
</table>

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * b_5 * A$	$g_7 * b_6 * A$		
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$	$g_7 * b_3 * A$	$g_7 * b_4 * A$	$g_8 * B$	
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$	$g_7 * A$	$g_7 * b_2 * A$		
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * b_5 * A$	$g_7 * b_6 * A$	$g_8 * b_5 * A$	$g_8 * b_6 * A$
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$	$g_7 * b_3 * A$	$g_7 * b_4 * A$	$g_8 * b_3 * A$	$g_8 * b_4 * A$
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$	$g_7 * A$	$g_7 * b_2 * A$	$g_8 * A$	$g_8 * b_2 * A$
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство. Обозначим через φ отображение, определенное формулой: для любого g из G положим

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * A * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * A * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \Rightarrow$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \Rightarrow g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

Следовательно, φ — **однозначное** отображение.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Взаимная однозначность отображения φ очевидна:

$$g_\alpha * A = g_\beta * A \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

Осталось проверить, что φ — **гомоморфизм**, т.е. что $\varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y)$.

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{g_\beta * b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \underbrace{\left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}}_{=\left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * A * g_\beta * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A^{g_\beta} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

II.29. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{7}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

Теорема доказана.

II.30. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если* A — ***нормальная подгруппа*** *группы* B, *которая является подгруппой в* G, *и* H — ***нормальная подгруппа*** *в* G, *то* $(B * H)/(A * H)$ ***изоморфна*** $B/\left(A * (B \cap H)\right)$.

Доказательство.

II.30. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если A — **нормальная подгруппа** группы B, которая является подгруппой в G, и H — **нормальная подгруппа** в G, то $(B * H)/(A * H)$ **изоморфна** $B/(A * (B \cap H))$.*

Доказательство. Положим $f(b * A * H) = b * A * (B \cap H)$. Непосредственной проверкой по определению получаем, что f — **функция**, потом — что это **гомоморфизм**, и, наконец, проверкой его **взаимной однозначности** заканчивается доказательство этой теоремы.

II.31. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство.

II.31. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор.

II.31. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор. Поэтому, согласно критерию перестановочности элементов, в силу абелевости G/N, получаем, что $[x, y] * N = N$ — единичный элемент фактор-группы G/N. Значит, G' включается в N.

II.31. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

II.31. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

Так как в фактор-группе все коммутаторы — единичные, то, по критерию перестановочности элементов, G/G' — абелева группа.

Теорема доказана.

III. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять:

III. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (досточно построить все фактор-группы).

III. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (досточно построить все фактор-группы).

В данном разделе для развития исследовательского аппарата теории групп применим **стратегию перехода от изучения отдельного объекта с исследованию системы объектов**. Рассмотрим **операции** на множестве подгрупп.

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой*[1] *группы G.*

Доказательство.

[1] Точнее, носителем подгруппы.

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow$$

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ \\ x \in B, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow$$

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow$$

III.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A \cap B, \\ x' \in A \cap B. \end{cases}$$

III.2. Произведение подгрупп

Определение 18. Произведением подгрупп *A и B группы G называется множество*

$$A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B. \end{cases} \right\} \tag{8}$$

Произведение подгрупп — **не обязательно подгруппа**.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\left\{\begin{array}{l} A \leq G, \\ B \leq G, \end{array}\right.$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} a \in A, \\ b \in B \end{array}\right. \right\}$ — *подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ — *подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ — *подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ — *подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?**

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?** Есть три распространенных способа.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?** Есть три распространенных способа. Первый — проверить, что первое множество содержится во втором, а второе первом.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?** Есть три распространенных способа. Первый — проверить, что первое множество содержится во втором, а второе первом. Второй — эквивалентными алгебраическими преобразованиями привести выражение в левой и правой частях доказываемого равенства к одинаковому виду.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?** Есть три распространенных способа. Первый — проверить, что первое множество содержится во втором, а второе первом. Второй — эквивалентными алгебраическими преобразованиями привести выражение в левой и правой частях доказываемого равенства к одинаковому виду. Третий — «от противного».

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Надо доказать совпадение двух множеств. **Как это сделать?** Есть три распространенных способа. Первый — проверить, что первое множество содержится во втором, а второе первом. Второй — эквивалентными алгебраическими преобразованиями привести выражение в левой и правой частях доказываемого равенства к одинаковому виду. Третий — «от противного».

Применим первый метод.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ — *подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Как доказать, что $B * A$ является подмножеством в $A * B$?

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Как доказать, что $B * A$ является подмножеством в $A * B$? Используем **определение подмножества**.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Как доказать, что $B * A$ является подмножеством в $A * B$? Используем **определение подмножества**. Итак, множество U является подмножеством в V, если всякий элемент из U содержится в V.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Возьмем произвольный элемент $b * a$, где b — элемент из B, и a — элемент из A. Тогда $a' * b'$ содержится в $A * B$, и, поскольку $A * B$ — подгруппа, то $(a' * b')'$ тоже содержится в $A * B$.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Возьмем произвольный элемент $b * a$, где b — элемент из B, и a — элемент из A. Тогда $a' * b'$ содержится в $A * B$, и, поскольку $A * B$ — подгруппа, то $(a' * b')'$ тоже содержится в $A * B$. Но, согласно **теореме об инволютивности операции обращения** и **теореме об элементе, обратном к произведению**, $(a' * b')' = b * a$. Значит $b * a$ действительно содержится в $A * B$, т.е. $A * B \subseteq B * A$.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Для доказательства включения $B * A \subseteq A * B$ достаточно заметить, что всякий элемент из $A * B$ представим в виде $a' * b'$ для подходящих элементов a из A и b из B.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B$ — подгруппа группы G. Надо доказать, что $A * B = B * A$.

Для доказательства включения $B * A \subseteq A * B$ достаточно заметить, что всякий элемент из $A * B$ представим в виде $a' * b'$ для подходящих элементов a из A и b из B.

Проводя теперь те же рассуждения, что и в предыдущем случае, получим требуемое включение. Значит, $A * B = B * A$, необходимость доказана.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Согласно критерию подгруппы, достаточно проверить, что $(a * b) * (c * d)$ и $(a * b)'$ содержатся в $A * B$ для элементов a, c из A и b, d из B.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Согласно критерию подгруппы, достаточно проверить, что $(a * b) * (c * d)$ и $(a * b)'$ содержатся в $A * B$ для элементов a, c из A и b, d из B. Так как $A * B = B * A$, то $b * c = x * y$ для подходящего x из A и y из B. Поэтому

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Согласно критерию подгруппы, достаточно проверить, что $(a * b) * (c * d)$ и $(a * b)'$ содержатся в $A * B$ для элементов a, c из A и b, d из B. Так как $A * B = B * A$, то $b * c = x * y$ для подходящего x из A и y из B. Поэтому

$$(a * b) * (c * d) = a * (b * c) * d = a * (x * y) * d = (a * x) * (y * d)$$

— элемент из $A * B$.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Согласно критерию подгруппы, достаточно проверить, что $(a * b) * (c * d)$ и $(a * b)'$ содержатся в $A * B$ для элементов a, c из A и b, d из B.

Итак, доказано, что $(a * b) * (c * d)$ содержится в $A * B$.

III.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22 (о произведении коммутирующих подгрупп). *Если* $\begin{cases} A \leq G, \\ B \leq G, \end{cases}$ *то* $A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}$ *— подгруппа группы* G *тогда и только тогда, когда* $A * B = B * A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Согласно критерию подгруппы, достаточно проверить, что $(a * b) * (c * d)$ и $(a * b)'$ содержатся в $A * B$ для элементов a, c из A и b, d из B.

Итак, доказано, что $(a * b) * (c * d)$ содержится в $A * B$.

Наконец, по аксиоме существования обратного элемента $(a * b)' = b' * a' = u * v$, где u — из A, v — элемент из B.

Теорема доказана.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что в условиях этой теоремы $A * B = B * A$ (см. доказательство теоремы).

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

Доказательство.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, совпадает с A.*

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Докажем, что A включается в $A * B$. Возьмем произвольный элемент из A.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Докажем, что A включается в $A * B$. Возьмем произвольный элемент из A. Элемент e содержится в B, поскольку B — подгруппа. Поэтому элемент a содержится в $A * B$, так как его можно представить в виде $a * e$, a — элемент из A, e — элемент из B.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, совпадает с A.*

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Докажем, что A включается в $A * B$. Возьмем произвольный элемент из A. Элемент e содержится в B, поскольку B — подгруппа. Поэтому элемент a содержится в $A * B$, так как его можно представить в виде $a * e$, a — элемент из A, e — элемент из B.

Доказано включение $A \subseteq A * B$.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, совпадает с A.*

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Осталось проверить, что $A * B$ включается в A.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть* A *— подгруппа группы* G, B *— подгруппа группы* A. *Тогда множество* $A * B$, *равное, по определению,* $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, *совпадает с* A.

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Осталось проверить, что $A * B$ включается в A. Возьмем элемент $a*b$, a — из A, b — из B. Но B — подгруппа в A, поэтому элемент b содержится в A.

III.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23 (о произведении инцидентных подгрупп). *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, совпадает с A.*

Доказательство. Вновь надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Осталось проверить, что $A * B$ включается в A. Возьмем элемент $a * b$, a — из A, b — из B. Но B — подгруппа в A, поэтому элемент b содержится в A. Таким образом $a * b$ — элемент из A, что и требовалось проверить для окончания доказательства.

Теорема доказана.

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство.

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости. Пусть в разложении $g = a * b$ множители определяются однозначно. Переведем это утверждение на «язык равенств и неравенств»:

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство необходимости.

$$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

Необходимость доказана.

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

Тогда

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

Тогда

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

Тогда

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \;\Rightarrow$$

III.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24 (об однозначности разложения элемента). *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

Тогда

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

III.3. Прямое произведение подгрупп

Теорема об однозначности разложения элемента позволяет выделить важный случай произведения подгрупп. Можно предложить две изоморфные, но не равные конструкции: **внутреннее прямое произведение подгрупп** и **внешнее прямое произведение групп**.

III.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 19. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

III.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 19. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп A и B группы G является группой, причем представление элемента из $A * B$ в виде $a * b$ определяется* ***однозначно***.

Доказательство.

III.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 19. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп A и B группы G является группой, причем представление элемента из $A * B$ в виде $a * b$ определяется* ***однозначно***.

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** и **теоремы об однозначности разложения элемента.**

III.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением***.

Доказательство.

III.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением***.

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда

III.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением***.

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда $[A, B] \leq A \cap B = \{e\}$, что и требовалось доказать.

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство.

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \Big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\Big) =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \Big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\Big) = \Big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\Big) =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \Big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\Big) = \Big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\Big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \Big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\Big) = \Big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\Big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \Big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\Big).$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\Big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \Big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\Big) = \Big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\Big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \Big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\Big).$$

Ассоциативность доказана.

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно,

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно, $(e_A,\ e_B)$, где e_A — нейтральный элемент группы A, e_B — нейтральный элемент группы B.

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' =$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' = (a',\ b')\,.$$

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Теорема доказана.

III.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{9}$$

Определение 20. *Пусть A и B — группы. Тогда декартово произведение $A \times B$ называется* **(внешним) прямым произведением** *групп A и B.*

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, и* $A \cap B = \{e\}$*, то произведение* $A * B$ *подгрупп* A *и* B ***изоморфно*** $A \times B$ *— внешнему прямому произведению подгрупп* A *и* B*.*

Доказательство.

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. В силу **теоремы об однозначности разложения элемента** отображение ψ, заданное формулой

$$\psi(a * b) = (a,\ b)\,, \text{ где } \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \tag{10}$$

является **взаимно однозначным**.

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) =$$

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) = \psi\Big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\Big) =$$

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) = \psi\Big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\Big) = \Big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\Big) =$$

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) = \psi\Big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\Big) = \Big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\Big) =$$

$$= \Big(a_1,\ b_1\Big) * \Big(a_2,\ b_2\Big) =$$

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) = \psi\Big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\Big) = \Big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\Big) =$$

$$= \Big(a_1,\ b_1\Big) * \Big(a_2,\ b_2\Big) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

III.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\Big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\Big) = \psi\Big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\Big) = \Big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\Big) =$$

$$= \Big(a_1,\ b_1\Big) * \Big(a_2,\ b_2\Big) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

Теорема доказана.

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство. В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** достаточно проверить, что $A * B = B * A$.

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b =$$

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b =$$

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b =$$

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \ \Rightarrow$$

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

III.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

Определение 21. *Произведение подгрупп A и B группы G называется* **полупрямым**, *если $A \trianglelefteq G$ и $A \cap B = \{e\}$.*

IV. Абелевы группы

Рассмотрим группы с коммутативной групповой операцией.

IV.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

IV.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

IV.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

IV.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

IV.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

– **период группы**, т.е. максимум **порядков элементов группы** и др.

IV.1.1. Определение циклической группы

Определение 22. *Группа G называется* **циклической**, *если для некоторого элемента g из G имеем*

$$G = \left\{ g^n,\ (g')^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ g^n,\ \left(g^{-1}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство.

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} =$$

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H}$$

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит,

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

IV.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

Следовательно, m делится нацело на k, т.е. все элементы из H являются стеренями элемента a^k. Теорема доказана.

IV.2. Конечнопорожденные абелевы группы

Теорема 31 (о строении конечнопорожденной абел. группы). *Любая* ***абелева*** *группа с конечным числом* ***порождающих элементов*** *представима в виде прямого произведения* ***циклических групп***.

V. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

V. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

V. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

Как результат применения **стратегии построения модели** можно интрепретировать исследования гомоморфизмов в определенные классы групп. Такие гомоморфизмы называют **представлениями** групп. В теории групп особую роль играют **подстановочные представления** групп, т.е. гомоморфизм группы в группу подстановок, т.е. **группу перестановок элементов некоторого множества** Ω.

VI. Представления

Под **представлением группы** понимают гомоморфизм группы в некоторый фиксированный класс групп.

VI.1. Подстановочные представления

Определение 23. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

VI.1.1. Регулярное подстановочное представление

Определение 23. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

Определение 24. ***Подстановочное представление*** F *группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n *множества* Ω *называется* **регулярным**, *если*

$$\forall \omega \in \Omega \; \exists g \in G \quad F[g](\omega) \neq \omega. \tag{11}$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. **Взаимная однозначность функции** $F[g]$:

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. **Взаимная однозначность функции** $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. **Взаимная однозначность функции** $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. **Взаимная однозначность функции** $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow\; F[g](x) = F[g](y).$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$F[g * h](x) =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$F[g * h](x) = (g * h) * x * H =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$$
$$= F[g]\,(F[h](x)) =$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$

$$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$$
$$= F[g]\,(F[h](x)) = F[g] \circ F[h](x).$$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x = g^x.$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$. Следовательно, $\operatorname{Ker} F \subseteq H$.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$. Пусть $g \in N$.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$

$F[g](x) =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$

$F[g](x) = g * x * H =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$

$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$

$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H =$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H.$

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H$. Значит, $g \in \operatorname{Ker} F$.

VI.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по под

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{12}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

VI.2. Операторные и матричные представления

Определение 25. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»****.*

VI.2. Операторные и матричные представления

Определение 25. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»****.*

Определение 26. Матричным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу $GL_n(F)$* ***невырожденных матриц*** *размерности $n \times n$ с коэффициентами из поля F с групповой операцией* ***«умножение матриц»****.*

VI.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

VI.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

Если $\mathcal{A}: \ G \to \operatorname{Aut} U$ — **операторное представление**, $\quad$ **Б** — **базис** линейного пространства U, $\quad$ то **матричное представление** $\mathcal{A}_M$ определено формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\mathbf{Б}}\,,$$

где $X_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе **Б**.

VI.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 27. ***Операторное представление*** $\mathcal{A}\colon G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}\colon G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

VI.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 27. ***Операторное представление*** $\mathcal{A}\colon G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}\colon G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно,

VI.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 27. ***Операторное представление*** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно, подпространство, являющееся $\mathcal{A}[g]$-инвариантным для любого $g \in G$.

VI.2.2. Теорема Машке

Теорема 33 (Машке). *Справедливы следующие утверждения:*
1) всякое ***операторное представление*** *над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений группы G над полем $\mathbb{C}$;*
2) если $\mathcal{A}$ — ***матричное представление*** *группы G над $\mathbb{C}$ и*
$$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall g \in G \quad \mathcal{A}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix},$$
то существует невырожденная матрица $\mathbf{T}$, что
$$\mathbf{T}^{-1}\mathcal{A}(g)\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix};$$
3) если $\mathcal{A}\colon G \to \operatorname{Aut} U$ — операторное представление группы G в группу ***невырожденных операторов*** *линейного пространства U. $V \leq U$, причем для любого $g \in G$ подпространство V —* ***$\mathcal{A}[g]$-инвариантное****, то существует такое* ***$\mathcal{A}[g]$-инвариантное*** *подпространство W, что $U = V \oplus W$.*

VI.2.3. Лемма Шура

Лемма 3 (Шур). *Пусть* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ — *неприводимые* ***операторные представления*** *группы* G *в линейные пространства* U *и* V *над полем* F. *Если* $\hat{P}: U \to V$ — *такой линейный оператор, что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{A}[g] \circ \hat{P} = \hat{P} \circ \mathcal{A}[g], \tag{13}$$

то либо $\hat{P}$ — *нулевой оператор, либо* $\operatorname{Ker} \hat{P} = \{\mathbf{0}_U\}$.

VI.2.4. Эквивалентные представления

«Одинаковость» представлений понимается в теории групп следующим образом.

VI.2.4. Эквивалентные представления

Определение 28. *Пусть U и V — линейные пространства над полем F и G — группа.* ***Операторные представления*** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, *и* $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такой изоморфизм (т.е.* ***невырожденный линейный оператор****) $\hat{T}$ линейного пространства U на линейное пространство V, что*

$$\forall g \in G\ \forall u \in U\ \left(\hat{T}\left(\mathcal{A}[g](u)\right) = \mathcal{B}[g]\left(\hat{T}(u)\right)\right). \tag{14}$$

VI.2.4. Эквивалентные представления

Определение 29. ***Матричные представления*** $\mathcal{A}: G \to GL_n(F)$, *и* $\mathcal{B}: G \to GL_n(F)$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такая матрица* $\mathbf{T}$, *что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{B}(g) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathcal{A}(g) \cdot \mathbf{T}. \tag{15}$$

VI.2.4. Эквивалентные представления

В силу **теоремы об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц** **операторные представления** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, и $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие матричные представления, т.е. матричные представления, полученные следующим образом: если **Б** — базис линейного пространства U, **В** — базис линейного пространства V, то матричные представления $\mathcal{A}_M$ и $\mathcal{B}_M$ определены формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\mathbf{Б}}\,, \quad \mathcal{B}_M(g) = (\mathcal{B}[g])_{\mathbf{В}}\,,$$

где $X_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе **Б**.

VII. Задание групп образующими и определяющими отношениями

Рассмотрим еще один типовой способ задания группы.

VII. Задание групп образующими и определяющими отношениями

Теорема 34 (Дик). *Если группа* $G = \left\{ I \,\middle|\, V(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $V(I)$*, а группа* $H = \left\{ I \,\middle|\, W(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $W(I)$*, причем* $V(I) \subseteq W(I)$*, то* H *есть гомоморфный образ группы* G*, т.е. существует такая нормальная подгруппа* N *группы* G*, что* $H \simeq G/N$.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?